NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARMAND FARCY

Note sur les cas singuliers d'insolubilité ou d'indétermination dans les équations du premier degré à plusieurs inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 474-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__474_1>

NOTE

sur les cas singuliers d'insolubilité ou d'indétermination dans les équations du premier degré à plusieurs inconnues.

PAR M. ARMAND FARCY,
Ancien élève de l'École polytechnique.

Tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues étant ramené à la forme simple

$$ax + by = k, \qquad a'x + b'y = k';$$

si $ab'-ba'=0$ et $ak'-ka'=0$, ce qui entraîne $kb'-bk'=0$, les deux équations sont incompatibles, c'est-à-dire, que rien de ce qui résout l'une ne peut résoudre l'autre ; si $ab'-ba'=0$ et $ak'-ka'=0$, ce qui entraîne $kb'-bk'=0$, les deux équations rentrent l'une dans l'autre, c'est-à-dire, que tout ce qui résout l'une résout l'autre.

L'*insolubilité* se manifeste par la forme $\frac{k}{0}$, et l'*indétermination* par la forme $\frac{0}{0}$ que prennent ensemble les deux inconnues, et l'on rend parfaitement compte de l'une et de l'autre en montrant que dans un cas les premiers membres sont, indépendamment de toutes valeurs attribuées à x et à y, dans un rapport déterminé, et les seconds membres (numériques) dans un autre rapport ; et que dans l'autre cas, les premiers membres sont, indépendamment de toutes valeurs attribuées à x et y, dans un rapport déterminé, et les seconds membres (numériques) dans le même rapport.

Rien n'est donc plus facile que de signaler nettement, dans les exemples numériques qui offrent quelqu'un de ces cas singuliers, les causes d'*insolubilité* ou d'*indétermination*, lorsque le nombre des équations n'est pas supérieur à deux.

Mais dès qu'il y a plus de deux équations, cette facilité disparaît, la multiplicité des équations pouvant donner lieu à bien des causes diverses soit d'insolubilité, soit d'indétermination. Le but de cette note est d'indiquer un moyen de découvrir ces causes cachées, quel que soit le nombre commun des équations et des inconnues.

Soit par exemple le système en apparence déterminé :

$3x-2y+z-3u=10$	qui donne en éliminant z :	
$4x+y-z+u=15$	$7x-y-2u=25$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=21$	$2x+3y+3u=9$	$23x-3u=84$
$3x+6y-2z+7u=14$	$5x-4y-5u=16$	$23x-3u=84$

Ces deux dernières équations rentrant l'une dans l'autre, admettent une infinité de solutions, et il en est par conséquent de même du système proposé. Soit encore le système en apparence déterminé :

$3x-2y+z-3u=10$	qui donne en éliminant u :	
$4x+y-z+u=15$	$15x-y-7z=53$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=21$	$10x\quad -3z=36$	$30x-9z=118$
$3x+6y-2z+7u=24$	$45x-y-16z=171$	$10x-3z=36$

Ces deux dernières équations étant contradictoires, leur système est insoluble, et il en est par conséquent de même du système proposé. Pour découvrir le vice caché de chacun de ces systèmes, qui ne diffèrent d'ailleurs que par un des seconds membres, remplaçons les seconds membres par des lettres, et traitons le système suivant :

$3x-2y+z-3u=A$	qui donne en éliminant u :	
$4x+y-z+u=B$	$15x+y-2z=A+3B$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=C$	$10x\quad -3z=B+C$	$10x-3z=A+4B-D$
$3x+6y-2z+7u=D$	$25x+y-5z=7B-D$	$10x-3z=B+C$

Le système proposé, en apparence déterminé, est donc en réalité :

insoluble, si $B+C >$ ou $< -A+4B-D$, c.-à-d. si $D >$ ou $< 3B-A-$(
indéterminé, si $B+C=-A+4B-D$, c.-à-d. si $D=3B-A-C$,

c'est-à-dire suivant que le second membre de la quatrième équation est ou n'est pas différent du triple du second membre de la seconde, diminué des seconds membres de la première et de la troisième. Cette relation forcée entre les seconds membres existe donc entre les premiers membres, quels que soient x, y, z, u, et l'on vérifie en effet que le premier membre de la quatrième équation est égal au triple du premier membre de la seconde, duquel on aurait retranché les premiers membres de la première et de la troisième équation. On reconnaît ainsi à quoi tenait l'*insolubilité* et l'*indétermination* des systèmes proposés, et l'on aperçoit en même temps le moyen de former à volonté de tels systèmes *insolubles* ou *indéterminés*, quoique en apparence déterminés.

Généralement : Lorsqu'un système, en apparence déterminé, conduit par l'élimination à une équation insoluble et indéterminée, ce système est lui-même insoluble ou indéterminé ; cela tient alors à ce qu'il existe entre les premiers membres des relations qui, n'existant pas entre les seconds, rendent les équations incompatibles ; ou qui, existant aussi entre les seconds membres, font rentrer certaines des équations dans les autres. Pour découvrir cette relation, cause d'insolubilité ou d'indétermination, on peut remplacer les seconds membres par des lettres, et éliminer les inconnues ; on arrive ainsi à certaines relations entre les seconds membres, relations qui sont celles existant entre les premiers membres.