

**Théorèmes de M. Steiner sur la division
du plan par des droites et des cercles
; et sur la division de l'espace par des
plans et des sphères**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 491-494

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__491_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES DE M. STEINER

*sur la division du plan par des droites et des cercles ; et sur la
division de l'espace par des plans et des sphères.*

—

THEOREME I. Un plan est partagé par n droites qui y

sont situées *au plus* en $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ régions, dont $1 - n + \frac{n(n-1)}{2}$ sont entièrement fermées au plus, et $2n$ indéfinies.

THÉORÈME II. Si on trace dans un plan n systèmes de $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ parallèles, chaque système ayant une direction différente, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B$ régions; $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $B = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n$ dont $2A$ sont infinies et $1 - A + B$ fermées au plus.

THÉORÈME III. Si on trace dans un plan n systèmes a_1, a_2, \dots, a_n de droites parallèles et b droites non parallèles, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + \frac{b(b-1)}{2}$ régions au plus, dont $2A$ sans bornes, A et B comme dessus.

THÉORÈME IV. n circonférences partagent le plan au plus en $n(n-1) + 2$ régions, dont une seule est infinie.

THÉORÈME V. Si on trace dans un plan n systèmes de $c_1, c_2, c_3 \dots c_n$ circonférences concentriques, chaque système ayant un centre différent; le plan sera partagé en $1 + 2B$ régions au plus, $B = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n$, dont une seule est sans bornes.

THÉORÈME VI. Si on trace dans un plan n systèmes divers de $a_1, a_2 \dots a_n$ circonférences concentriques et b circonférences non concentriques, le plan sera partagé au plus en $2A + b(b-1) + 2$ régions, dont une seule est sans bornes.

THÉORÈME VII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles $a_1, a_2 \dots a_n$ et m systèmes de cercles concentriques $c_1, c_2 \dots c_m$, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + 2AA' + 2B'$ régions; A et B se rapportent aux droites; A' et B' aux circonférences; $2B$ sont sans bornes, au plus.

THÉORÈME VIII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles $a_1, a_2 \dots a_n$ et b droites quelconques; m systèmes de circonférences concentriques, c_1, c_2, \dots, c_m , et d cir-

conférences quelconques, le plan sera partagé au plus en $1+A+B+2AA'+2B'+\frac{b(b-1)}{2}+d(d-1)$ régions, dont $2A$ sont au plus sans bornes.

Observation. Les théorèmes IV, V, VI s'appliquent également à la sphère.

Espace.

THÉORÈME IX. n systèmes différents de plans parallèles; p_1, p_2, \dots, p_n partagent l'espace au plus en $1+A+B+C$ régions; $A=p_1+p_2+\dots+p_n$; $B=p_1p_2+\dots+p_{n-1}p_n$; $C=p_1p_2p_3+\dots+\dots+p_{n-2}p_{n-1}p_n$; donc $2B+2$ sont complètement bornés.

Et dont $1+A-B+C$ sont complètement fermés et forment des corps.

THÉORÈME X. n plans quelconques, dont trois ne sont pas parallèles à une même droite, et dont quatre ne passent pas par le même point, partagent l'espace au plus $1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ régions dont $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ sont complètement fermées.

THÉORÈME XI. p_1, p_2, \dots, p_n systèmes de plans parallèles et m plans quelconques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+\frac{m(m+1)}{1.2}A+mB+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ régions, et dont $2+2B+2mA+m(m-1)$ ne sont pas complètement bornées; A, B, C comme ci-dessus.

THÉORÈME XII. p_1, p_2, \dots, p_n systèmes divers de plans parallèles et s_1, s_2, \dots, s_m systèmes de sphères concentriques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+2BA'+2B'A+2A'+2C'$; A, B, C se rapportent aux plans, et A', B', C' aux sphères; $2+2B$ régions sont incomplètement bornées.

THÉORÈME XIII. n plans quelconques et m sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + mn(n-1) + mn(m-1) + 2m + \frac{2m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ régions,}$$

dont $2 + n(n-1)$ sont incomplètement bornées.

THÉORÈME XIV. $p_1, p_2 \dots p_n$ systèmes divers de plans parallèles et m plans quelconques, et $s_1, s_2 \dots s_q$ systèmes divers de systèmes concentriques et m' sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1 + A + B + C + 2A'B + 2B'A + 2A' + 2C' + \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + m'(m'-1) + 2mm' \right) A + (m + 2m') A + 2(m+m') AA' + (m+m')(m+m'-1)A' + 2(m+m')B' + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + mm'(m+m'-2) + 2m' + 2 \frac{m'(m'-1)(m'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ régions,}$$

dont $2 + 2B + 2mA + m(m-1)$ sont incomplètement bornées.
