NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

REMY

Théorème sur le quadrilatère sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 494-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__494_1>

THÉORÈME SUR LE QUADRILATÈRE SPHÉRIQUE.

Par M. Remy. (Crelle, t. III, p. 85, 1828.)

Théorème. a, b, c, d sont les côtés et e, f les diagonales d'un quadrilatère sphérique, g la distance sphérique des milieux des diagonales; on a :

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} f \cos g.$$

Démonstration. Soit le quadrilatère ABDC; $AC = a$; $AB = b$; $BD = c$, $DC = d$; $AD = f$; $BC = e$.

Soit F milieu de BC; et G milieu de AD ; FG $=g$; soit AF $=r$ et angle AFC $=\alpha$.

Ainsi dans le triangle ACF l'on a :

$$\cos a = \cos r \cos \frac{1}{2} e + \cos\alpha \sin \frac{1}{2} e \sin r,$$

et dans le triangle ABF :

$$\cos b = \cos r \cos \frac{1}{2} e - \cos\alpha \sin \frac{1}{2} e \sin r.$$

Donc $$\cos a + \cos b = 2 \cos r \cos \frac{1}{2} e\,,$$

et $$\cos c + \cos d = 2 \cos\rho \cos \frac{1}{2} e\,;$$

ρ est l'arc FD ; donc

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 2 \cos \frac{1}{2} e\,(\cos r + \cos\rho)\,;$$

mais $$\cos r + \cos\rho = 2 \cos \frac{1}{2} f \cos g\,;$$

donc, etc.

Note. En développant les côtés en séries, on peut déduire de ce théorème celui d'Euler sur le quadrilatère plan.