NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GILAIN

# Solution du problème 82

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 4 (1845), p. 520-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__520_1>

## SOLUTION DU PROBLÈME 82 (t. III, p. 40).

**PAR M. GILAIN,**
à Bruxelles.

Soit l'équation :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1. \qquad (a)$$

Si j'avais considéré cette équation en elle-même, c'est-à-dire, si je n'avais eu égard qu'aux résultats auxquels elle peut nous conduire, je ne me serais certes pas attaché à la discuter. Mais je me suis convaincu qu'elle signale une erreur de théorie, que je vais tâcher d'examiner aussi succinctement que possible.

On démontre facilement que l'équation $(a)$ n'a pas de racines réelles ; je vais prouver qu'elle n'en peut avoir d'imaginaires. A cette fin, je pars de ce prémisse évident, qu'une quantité réelle ne peut être égale à une quantité imaginaire. Par conséquent, pour que des valeurs imaginaires, substituées à la place de $x$ dans l'équation proposée, puissent la satisfaire, il faut que l'imaginarité introduite par cette substitution disparaisse dans le premier membre ; en d'autres termes, il faut que les quantités imaginaires se détruisent mutuellement. D'où l'on conclut nécessairement qu'il faut, pour que des racines imaginaires puissent satisfaire l'équation $(a)$ : 1° que la partie imaginaire de ces racines sorte des radicaux sous lesquels elle se trouve engagée ; 2° que la partie imaginaire du premier radical soit égale et de signe contraire à celle du second. Or, pour que les quantités imaginaires se dégagent des radicaux, il faut qu'elles entrent dans la composition de carrés, dont la somme générale sera, en ayant égard à la seconde condition :

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2 \quad \text{et} \quad (\gamma-\beta\sqrt{-1})^2. \qquad (b)$$

Reste à déterminer les valeurs des quantités $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ qui satisferont à l'équation $(a)$. Pour que celle-ci puisse avoir des racines imaginaires, on doit trouver des valeurs *réelles* pour chacune de ces quantités. Or, en mettant les carrés $(b)$ à la place des expressions $(1+x)$ et $(1-x)$ dans l'équation proposée, elle devient :

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2}+\sqrt{(\gamma-\beta\sqrt{-1})^2}=\alpha+\beta\sqrt{-1}+\\ +\gamma-\beta\sqrt{-1}=\alpha+\gamma=1.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Par conséquent,

$$1+x=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2=\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2,$$
$$1-x=(\gamma-\beta\sqrt{-1})^2=\gamma^2-2\gamma\beta\sqrt{-1}-\beta^2\,;$$

d'où

$$x=\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2-1,$$
$$x=1-\gamma^2+2\gamma\beta\sqrt{-1}+\beta^2\,;$$

et puisque $x$ a la même valeur dans les deux expressions, il vient :

$$\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2-1=1-\gamma^2+2\gamma\beta\sqrt{-1}+\beta^2,$$

dont on déduit les deux égalités :

$$2\alpha\beta\sqrt{-1}=2\gamma\beta\sqrt{-1}, \quad \text{d'où} \quad \alpha=\gamma,$$
$$\alpha^2-\beta^2-1=1-\gamma^2+\beta^2 \qquad (2)$$

Mais, d'après (1), $\alpha+\gamma=1$, par conséquent, $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$.
Substituant ces valeurs dans (2), on trouve :

$$\frac{1}{4}-\beta^2-1=1-\frac{1}{4}+\beta^2;$$

d'où l'on tire :

$$\beta=\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}.$$

On arrive donc a des valeurs imaginaires pour β. Ce qui nous prouve que l'équation ne peut avoir de racines imaginaires ; d'un autre côté, on démontre qu'elle n'en a pas de réelles ; nous devons donc en conclure que l'équation ($a$) n'a pas de racines.

Cette conclusion pourrait étonner certains esprits, car on croit généralement que toute équation algébrique a au moins une racine sinon réelle, du moins imaginaire. C'est là une erreur qu'il importe de déraciner (*).

Une quantité imaginaire, quoique n'ayant aucune traduction dans le monde réel, n'en a pas moins de la réalité, si je puis m'exprimer ainsi, en mathématiques. Un résultat imaginaire dénote toujours une absurdité dans l'énoncé du problème ; mais il n'indique pas une absurdité dans l'équation qui en est la traduction mathématique. Ainsi les racines

$$x=\pm\sqrt{-a}$$

satisfont à l'équation :

$$x^2=a,$$

parce que, dans cette substitution, on défait l'opération qui a conduit à l'impossibilité, qui a fait donner le nom d'imaginaires à ces quantités. On doit donc bien distinguer une absurdité mathématique, d'une absurdité hypothétique dans l'énoncé d'un problème. C'est ainsi que

$$x^2=-a$$

(*) C'est plutôt cette conclusion qui est une erreur à déraciner. Nous y reviendrons. Tm.

n'indique qu'une absurdité d'hypothèse, tandis que

$$+\sqrt{x} = -a$$

marque en outre une absurdité mathématique; puisque aucune valeur algébrique substituée à la place de $x$ dans cette équation ne peut la satisfaire. C'est précisément parce que le calcul ne peut conduire à aucun résultat dans un cas semblable, que l'on peut avoir confiance pleine et entière dans ceux auxquels il nous conduit. Si, au contraire, le calcul pouvait donner la solution d'une absurdité manifeste, on ne pourrait plus accorder aucun crédit aux résultats auxquels on arriverait par cet intermédiaire. Le calcul ne peut donc pas assigner des racines à l'équation ($a$), puisqu'elle est une absurdité mathématique. Ceci résulte de ce que les conséquences ne peuvent jamais détruire les principes sur lesquels elles reposent, aussi longtemps que l'on se conforme rigoureusement à ces principes. A moins, toutefois, que ceux-ci ne soient faux eux-mêmes, ce qu'il est toujours facile de vérifier *à priori*.

Le signe $\sqrt{\ }$ marquant une opération inverse, il faudra toujours passer par l'opération mère, pour arriver aux racines d'une équation dans laquelle l'inconnue sera engagée sous ce signe. Mais une équation d'un degré quelconque ne jouit pas de toutes les propriétés de l'équation d'un degré supérieur qui en est une conséquence. On doit donc toujours bien s'assurer, quand on déduit celle-ci de celle-là, quelles sont les propriétés de la seconde qui conviennent aussi à la première. Pour rendre ceci plus clair, donnons un exemple. Soit l'équation :

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1\,;$$

on en déduit :

$$x^2 = \frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Or la seconde équation est également satisfaite par les deux valeurs $x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$, tandis que la première n'admet que la première de ces racines, $x = + \sqrt{\frac{3}{4}}$. La seconde valeur de $x$ appartient à une autre équation,

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = 1,$$

dont (3) est aussi une conséquence.

Ainsi, je le répète, ce qui est vrai d'une équation ne l'est pas toujours de l'équation d'un degré inférieur qui en est une conséquence. D'un autre côté, toutes les propriétés de l'équation inférieure, étant renfermées dans celle d'un degré supérieur, la première ne peut jouir de propriétés dont ne jouisse pas la seconde. C'est pourquoi l'équation (3), n'admettant pas de racines imaginaires, l'équation ($a$), dont on peut la déduire, n'en admet pas non plus.

Quelques mathématiciens pensent, peut-être, qu'il pourrait exister des valeurs symboliques autres que les imaginaires ordinaires, satisfaisant les équations telles que $+\sqrt{x} = -a$. Mais une pareille opinion est complétement chimérique ; car un symbole n'a de valeur que pour autant qu'il indique une opération connue. Or, pour que l'équation $+\sqrt{x} = -a$, par exemple, puisse être satisfaite par une valeur de $x$, cette quantité doit être telle qu'en lui faisant subir l'opération inverse de l'élévation au carré, on arrive à la quantité $-a$ ; condition qu'il est impossible de remplir aussi longtemps que l'on astreindra le radical à rester positif ; car la solution $x = (-a)^2 = a^2$ s'applique à l'équation $-\sqrt{x} = -a$.

*Note*. Toute cette discussion roule sur un *mal-entendu*. Le signe *plus* représente une *addition*, mais pas toujours une *augmentation*. En algèbre, ces deux mots ne sont pas synonymes ; de même que la *soustraction algébrique* n'est pas synonyme à *diminution*. Ainsi, lorsque le terme $+x$ se rencontre dans une équation, on ne sait pas d'avance si ce $+x$ produira une augmentation ou une diminution, selon que $x$ est positif ou négatif ; mais si vous mettez impérativement la condition que ce terme produise une augmentation, la question peut devenir impossible, sans que cette impossibilité soit représentée par un symbole imaginaire.

Soit, par exemple, l'équation $2+x=1$ ; l'algèbre répond $x=-1$. En effet, $2+(-1)=1$ ; mais si vous tenez à ce que $x$ soit positif, à ce que $+x$ produise une augmentation, il y a impossibilite logique ; 2 ne peut augmenter de manière à devenir 1 ; il en est de même dans l'équation proposée $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$ ; l'algèbre répond $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Si l'on exige que $+\sqrt{1-x}$ soit une augmentation, la question est impossible ; mais si on laisse le sens algébrique, la question est possible ; car elle répond à celle-ci : $2+2\sqrt{1-x^2}=1$ ; et $2+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, solution réelle. Ainsi toute équation a une racine réelle on imaginaire. Mais si on y ajoute une condition de plus, en dehors de l'équation, alors elle peut n'avoir aucune solution possible. L'équation $ax=b$ a toujours une racine ; mais si vous ajoutez que cette racine doit être un nombre entier, elle peut devenir impossible ; l'imaginarité annonce une impossibilité ; mais la réciproque est fausse. Toute impossibilité ne se résout pas par des imaginaires. Trouver deux nombres impairs dont la somme soit impaire est une impossibilite qu'on ne peut représenter par le symbole imaginaire. On peut dire, en général, que toutes les fois qu'une quantité susceptible d'un maximum, positif ou négatif, est égalée à une quantité qui surpasse ce maximum, l'analyse indique l'impossibilité par le symbole imaginaire qui ne répond qu'à ce genre d'impossibilité et pas à d'autres.

Tm.