

V. O. LEBESGUE

**Théorie des points associés dans l'ellipse  
et théorème de Fagnano**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 4  
(1845), p. 573-575

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1845\\_1\\_4\\_573\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4_573_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## THÉORIE

*Des points associés dans l'ellipse et théorème de Fagnano ;*

**PAR M. V. O. LEBESGUE,**

Professeur à la Faculté de Bordeaux.

---

**I. THÉORÈME.** Dans chaque quadrant d'ellipse, on peut toujours trouver deux points tels que les normales qui passent par ces points sont à une même distance donnée du centre; deux points ainsi déterminés sont des *points associés*.

*Démonstration.* Soit  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$  l'équation de l'ellipse; coordonnées rectangulaires; celle de la normale au point  $(x', y')$  est

$$y = \frac{a^2y'x}{b^2x'} - \frac{a^2e^2}{b^2}y'; \quad \text{ou} \quad a'e^2 = a^2 - b^2;$$

on a donc pour la perpendiculaire  $p$  abaissée du centre sur cette normale,

$$v = e^2 x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}}$$

d'où l'on déduit

$$e^4 x^4 - (a^2 e^2 + p^2) e^2 x^2 + a^2 p^2 = 0; \quad (1)$$

et 
$$2e^2 x^2 = a^2 e^2 + p^2 \pm \sqrt{(a^2 e^2 + p^2)^2 - 4a^2 p^2}.$$

La quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(a + b + p)(a - b + p)(a + b - p)(a - b - p);$$

or  $p < a$ , donc les trois premiers facteurs, sont positifs; pour que le quatrième soit aussi positif, on doit avoir  $p < a - b$ ; et dans ce cas,  $e^2 x^2$  a deux valeurs réelles et positives; donc  $x$  a deux valeurs réelles et de même signe. C. Q. F. D.

*Corollaire.* La plus grande valeur de  $p$  est  $a - b$ ; et alors les deux points associés se confondent; et l'on a pour les coordonnées de ce point associé *double*:

$$x = a \sqrt{\frac{a}{a+b}}; \quad y = b \sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

## II. Relation entre les abscisses des points associés.

Soient  $x$  et  $\xi$  les abscisses de deux points associés; l'équation (1) donne :

$$x^2 + \xi^2 = \frac{a^2 e^2 + p^2}{e^2}; \quad x^2 \xi^2 = \frac{a^2 p^2}{e^4};$$

éliminant  $p^2$ , il vient  $a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + e^2 x^2 \xi^2 = 0$  (2), relation cherchée qui peut prendre cette forme

$$(a^2 - x^2)(a^2 - \xi^2) = (1 - e^2) x^2 \xi^2.$$

*Corollaire I.* A  $x = 0$  correspond  $\xi = a$ , donc les deux sommets sont des points associés; ce qui est évident a priori, puisque alors, pour les deux points,  $p = 0$ .

*Corollaire II.*  $x$  augmentant,  $\xi$  diminue et *vice versa*.

*Corollaire III.* En résolvant l'équation de relation, on trouve :

$$\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 \xi^2}{a^2 - \xi^2}}; \quad \frac{a}{\xi} = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

**III. THÉORÈME de Fagnano.**

Différentiant l'équation de relation (2) et divisant par  $ax\xi$ ,

il vient 
$$\frac{adx}{\xi} + \frac{ad\xi}{x} = \frac{e^2}{a} d(x\xi);$$

ou bien

$$dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} + d\xi \sqrt{\frac{a^2 - e^2 \xi^2}{a^2 - \xi^2}} = \frac{e^2}{a} d(x\xi);$$

intégrant entre les limites  $x_0$  et  $x$  auxquelles répondent  $\xi_0$  et  $\xi$ , on aura :

$$\int_{x_0}^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} - \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \sqrt{\frac{a^2 - e^2 \xi^2}{a^2 - \xi^2}} = \frac{e^2}{a} x\xi - \frac{e^2}{a} x_0 \xi_0 = p - p_0.$$

la première intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par  $s = \text{arc}(\xi, \xi_0)$ ; et la seconde intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par  $\sigma = \text{arc}(\xi, \xi_0)$ ; donc  $\text{arc}(x_0, x) - \text{arc}(\xi, \xi_0) = p - p_0(a)$ ; faisant  $x = 0$ , l'équation (a) devient  $\text{arc}(0, x) - \text{arc}(\xi, a) = p$ ; ce qui est précisément l'équation de Fagnano (V. Cauchy, *Appl. géom. du calc. infn.*, t. II, p. 24); l'équation (a) revient à l'équation (108) de l'ouvrage cité.

---