AUGUSTE DELADÉRÉERE

Solution géométrique de la question d'analyse, proposée au concours d'agrégation en 1845

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 577-581

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__577_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

De la question d'analyse, proposée au concours d'agrégation en 1845. (V. p. 461.)

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
professeur au collége de Nantes, licencie ès sciences physiques et mathématiques.

I. *La projection de la spirale conique sur le plan principal passant par le sommet perpendiculairement à l'axe est une spirale logarithmique.*

Démonstration. — Soit S le sommet du cône ; M, un point de la spirale conique et M′ sa projection sur le plan principal, que nous pouvons supposer être horizontal, et soit MT, la tangente à la spirale conique au point M et T la trace horizontale de cette tangente ; dans le tétraèdre MSM′T, les angles SMM′, SMT sont donnés et l'angle dièdre formé par le plan de ces angles est droit ; donc ce tétraèdre est toujours semblable à lui-même, quelleque soit la position de M ; l'angle M′TS est donc constant ; or M′T, projection horizontale de la tangente, est la tangente à la projection de la spirale conique ; et cette dernière tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur SM′, donc, etc.

II. *La tangente à la spirale conique a une inclinaison constante sur l'axe,*

Démonstration. — Car l'angle M′MT du tétraèdre (1) est constant.

Coroll. 1. Si par un point de l'espace, on mène une parallèle à une tangente à la spirale conique, le lieu géométrique de cette parallèle est un cône droit dont l'axe est parallèle à celui du cône donné.

Coroll. 2. Toutes les tangentes sont également inclinées sur le plan horizontal.

III. *La longueur d un arc de la spirale conique divisée par la longueur de ce même arc projeté, donne un quotient constant.*

Démonstration. La proposition est évidente pour chaque arc élémentaire; elle est donc vraie pour la somme de ces arcs élémentaires ou pour les arcs de grandeur finie.

Coroll. 1. La spirale logarithmique est rectifiable; la spirale conique est donc aussi rectifiable.

Coroll. 2. Le quotient constant est séc. MTM'.

IV. *L'aire de l'espace conique compris entre deux génératrices et un arc de la spirale conique, divisée par l'aire de sa projection horizontale, donne un quotient constant.*

Démonstration. La même que pour la proposition précédente.

Coroll. 1. La spirale logarithmique est carrable, on sait donc aussi carrer l'espace conique.

Coroll. 2. Le quotient constant est la sécante de l'angle dièdre formé par les plans STM, STM' dans le tétraèdre (1).

V. *Le plan osculateur de la spirale conique a une inclinaison constante sur l'axe du cône et égale à l'inclinaison de la tangente sur l'axe.*

Démonstration. Par le point de rencontre du plan osculateur et de l'axe, concevons des parallèles à toutes les tangentes; elles forment un cône droit (II, coroll. 1); le plan osculateur contient deux tangentes consécutives, il est donc tangent à ce cône, donc, etc.

VI. *La normale principale de la conique spirale est horizontale; l'axe etant vertical.*

Démonstration. Par le point M de la spirale conique, concevons le plan osculateur rencontrant l'axe en un point O, et par OV menons une parallèle OV à la tangente MT; elle est dans le plan osculateur, qui est perpendiculaire au plan méridien VOS; car le plan osculateur est tangent au cône droit des parallèles (V); le plan normal en M étant perpendiculaire à la tangente MT est perpendiculaire à sa parallèle OV et par conséquent au plan méridien VOS; les deux plans, osculateur et normal, étant perpendiculaires au même plan méridien, leur intersection est aussi perpendiculaire à ce même plan méridien; or cette intersection donne la direction de la normale principale, donc, etc.

VII. *La projection horizontale de la normale principale est normale à la spirale logarithmique, projection de la spirale conique.*

Démonstration. La normale principale étant horizontale est perpendiculaire au plan vertical projetant MM'T (1); et par conséquent la projection de ce rayon de courbure est perpendiculaire à M'T, tangente à la spirale logarithmique, donc, etc.

Coroll. La plus courte distance de la normale principale de la spirale conique à l'axe est égale à la distance du pôle de la spirale logarithmique, à la normale correspondante.

VIII. Théorème. Six droites passent par le point M de la conique spirale · 1° la génératrice du cône; 2° la tangente MT; 3° le rayon du cercle parallèle; 4° la tangente à ce cercle; 5° la normale principale; 6° la parallèle à l'axe du cône; les quinze angles formés par ces droites, prises deux à deux, sont constants.

Démonstration. Pour un autre point M' de la spirale conique, ramenant les deux génératrices l'une sur l'autre, les six droites en M deviennent parallèles aux six droites en M', donc, etc.

IX. *Les centres de courbure de la spirale conique sont* *sur un cône droit de même sommet et de même axe que le cône donné.*

Démonstration. En ramenant, comme dans le théorème précédent, les génératrices l'une sur l'autre, les plans osculateurs respectifs deviennent parallèles ; les rayons de courbure sont donc proportionnels aux distances MS et M'S ; les droites qui joignent le sommet aux centres de courbure font des angles constants avec l'axe du cône, donc, etc.

X. *La projection horizontale de la courbe des centres de courbure de la spirale conique est une spirale logarithmique.*

Démonstration. Le rayon de courbure de la spirale conique et le rayon du cercle parallèle sont dans un rapport constant ; et se projettent suivant leurs véritables grandeurs ; le rayon de courbure de la spirale logarithmique et le rayon vecteur correspondant sont aussi dans un rapport constant ; et ce rayon vecteur n'est autre que la projection horizontale du rayon du cercle ; donc le rayon de courbure de la spirale logarithmique et celui de la spirale conique sont dans un rapport constant ; mais la développée de la spirale logarithmique est une spirale logarithmique, donc, etc.

XI *En développant le cône donné sur un plan tangent, la spirale conique se développe suivant une spirale logarithmique.*

Démonstration. Les tangentes de la spirale conique développée font des angles constants avec les rayons vecteurs, donc, etc.

XII. *La tangente à la spirale conique trace sur un plan perpendiculaire à l'axe une spirale logarithmique.*

Car la spirale conique se projette sur un tel plan, suivant une spirale logarithmique, et la tangente à la spirale conique trace sur ce plan une courbe semblable (voir p. 454).

XIII. *Le lieu des centres des courbures de la spirale conique est une spirale conique*

Démonstration. Ce lieu est situé sur un cône droit (IX) et a pour projection horizontale une spirale logarithmique (X); donc, etc.

Note. Soit une surface développable sur laquelle on a tracé une trajectoire coupant tous les éléments rectilignes suivant un angle donné; développant sur un plan tangent, les éléments rectilignes deviennent des tangentes à l'arête de rebroussement développée, et la trajectoire développée coupe toutes les tangentes suivant le même angle donné; si l'angle donné est droit la trajectoire développée devient une développante de l'arête de rebroussement développée; si l'arête se réduit à un point, ce qui est le cas des surfaces coniques, la trajectoire développée est une spirale logarithmique; et si le sommet est à l'infini, si la surface devient cylindrique, la trajectoire sur le cylindre est une hélice et sa développée est une droite. Tm.