L. A. LE COINTE

Note sur la mesure des hauteurs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 581-583

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__581_1>

NOTE

Sur la mesure des hauteurs

PAR M L. A. LE COINTE.

—

On sait que parmi les nombreuses applications de la trigonométrie rectiligne, il en est une dont l'objet est de déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible :

Pour cela, sur le terrain, supposé de niveau, on mesure une base BC (*fig.* 55), à partir du pied de l'édifice ; et on place en C le pied d'un graphomètre avec lequel on mesure l'angle ADE, formé par DA avec l'horizontale DE parallèle à CB. Ensuite, au moyen de la formule

$$AE = DE \tan ADE,$$

on détermine AB $=$ AE $+$ BE (hauteur du pied du graphomètre).

Mais remarquons qu'en mesurant l'angle ADE, on peut commettre une erreur, laquelle en introduit une aussi sur la hauteur de l'édifice.

Cela posé, ne tenant pas compte de l'erreur que l'on peut commettre en mesurant la base BC, et n'ayant égard qu'à celle qui est commise dans la mesure de l'angle ADE (nous supposons cet angle mesuré toujours avec la même approximation, quelle que soit d'ailleurs la base BC que l'on ait choisie), nous allons nous proposer de résoudre la question suivante :

Déterminer le rapport qui doit exister entre la base BC et la hauteur AE de l'édifice, prise au-dessus de l'horizontale DE, *pour qu'on obtienne* la hauteur de l'édifice le plus exactement possible.

Désignons, d'abord, l'angle ADE par φ, et soit α l'erreur commise dans la mesure de cet angle (α peut être une quantité positive ou négative); alors, $\varphi + \alpha$ sera la mesure de l'angle ADE telle qu'on l'a obtenue.

Maintenant soit δ l'erreur introduite dans la mesure de AE (δ peut être une quantité positive ou négative) par suite de celle commise sur l'angle D, et désignant par λ la longueur exacte de AE, $\lambda + \delta$ sera la mesure de AE telle qu'on l'a obtenue.

Cela posé, on a la relation

$$\lambda = \beta \operatorname{tang} \varphi$$

en désignant la base BC par β

Mais, entre les quantités $\lambda + \delta$ et $\varphi + \alpha$, on a aussi la relation

$$\lambda + \delta = \beta \operatorname{tang} (\varphi + \alpha);$$

d'où

$$\delta = \beta [\operatorname{tang} (\varphi + \alpha) - \operatorname{tang} \varphi].$$

et comme on a $\beta = \frac{\lambda}{\operatorname{tang}\varphi}$, on aura

$$\delta = \frac{\lambda}{\operatorname{tang}\varphi}\left[\operatorname{tang}(\varphi+\alpha) - \operatorname{tang}\varphi\right],$$

ou bien

$$= \frac{\lambda\cos\varphi}{\sin\varphi}\left[\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos(\varphi+\alpha)} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right] =$$

$$= \frac{\lambda\left[\sin(\varphi+\alpha)\cos\varphi - \sin\varphi\cos(\varphi+\alpha)\right]}{\sin\varphi\cos(\varphi+\alpha)},$$

$$\delta = \frac{\lambda\sin\alpha}{\sin\varphi\cos(\varphi+\alpha)},$$

ou enfin

$$\delta = \frac{\lambda\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin(2\varphi+\alpha) - \frac{1}{2}\sin\alpha}.$$

Cette formule nous montre immédiatement que l'erreur δ sera la plus petite possible lorsqu'on aura

α le plus petit possible,

et $2\varphi + \alpha = 90°$.

Ces deux conditions réunies expriment que l'angle φ doit être sensiblement égal à 45°, ou en d'autres termes, que le rapport $\frac{BC}{AE}$ doit être à peu près égal à l'unité.

Ainsi, dans la pratique, si l'on tient à avoir la hauteur AB de l'edifice, avec une grande approximation, il faudra choisir (à vue d'œil) la base BC telle que l'on ait sensiblement $BC = AE$, ou que l'angle ADE soit à peu près égal à 45°, et ensuite on calculera cet angle avec l'approximation voulue.

Note. On trouve dans *Cagnoli* (ch. XI, § 302) les corrections à faire pour avoir la mesure précise des hauteurs.