NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Démonstration élémentaire des formules relatives au mouvement rectiligne, uniformément varié, et sur le mouvement rectiligne varié en général

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 644-648

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__644_1>

DÉ O NSTRATION ÉLÉMENTAIRE

des formules relatives au mouvement rectiligne, uniformément varié, et sur le mouvement rectiligne varié en général.

—

1. Nous supposons que le mouvement est uniformément et instantanément accéléré.

T = temps pendant lequel le mouvement a lieu, exprimé en unités de temps.

V = vitesse acquise au bout du temps T, exprimée en unités métriques.

E = espace parcouru pendant le temps T, exprimé en unités métriques.

$g.$ = vitesse acquise au bout de l'unité de temps, exprimée en unités métriques.

On a

$$V = gT \tag{1}$$

$$E = \frac{VT}{2} = \frac{gT^2}{2} \tag{2}$$

$$2gE = V^2. \tag{3}$$

Démonstration. 1°. Partageons le temps T en n parties égales, dont chacune renferme t unités de temps, de sorte que l'on a $T = nt$ (a) ; divisons de même la vitesse V en n parties égales, donc chacune renferme u unités de vitesse ; de sorte que l'on a $V = nu$ (b) ; imaginons un mouvement uniformément, mais non pas instantanément accéléré, tel que pendant le premier intervalle t de temps, d'une durée finie, le mobile soit constamment animé de la vitesse u ; pendant le deuxième intervalle de temps, de la vitesse $2u$; pendant le troisième intervalle de la vitesse $3u$; et pendant le $n^{ème}$ intervalle de la vitesse nu ou V ; les espaces parcourus successivement pendant ces intervalles, forment donc cette progression arithmétique

$$tu,\ 2tu,\ 3tu, \ldots . ntu\ ;$$

designant donc par E′ l'espace total, parcouru pendant les n intervalles ou pendant nt, on aura

$$E' = tu(1+2+3+\ldots . n) = \frac{tun(n+1)}{2} = \frac{tun^2}{2} + \frac{tun^2}{2n}$$

et, ayant égard aux équations (a) et (b), on aura

$$E' = \frac{VT}{2} + \frac{VT}{2n}.$$

Dans ce mouvement u représente l'accélération pendant le temps fini t ; or, dans le mouvement uniformément et instantanément accéléré, cette accélération a lieu à chaque instant ; ainsi pour avoir ce mouvement, il faut que t devienne un instant ; en d'autres termes que n soit infiniment grand, puisqu'il y a une infinité d'instants dans un temps fini T ; dans ce cas E' devient E, et l'on a $E = \frac{VT}{2}$; ce qui est l'équation (2).

2°. Dans le mouvement uniformément et instantanément accéléré, la vitesse croit proportionnellement au temps ; il suffit donc de connaître la vitesse au bout d'un temps donne quelconque, pour la connaître au bout d'un temps quelconque ; on choisit pour ce temps donné, l'unité de temps, ce qui donne l'équation $V = gT$ (1) ; celle-ci combinée avec $E = \frac{VT}{2}$ donne immédiatement $E = g\frac{T^2}{2}$; donc, les espaces croissent proportionnellement aux carrés des temps.

Observations I. Ainsi dans le mouvement uniformément, mais non instantanément accéléré, l'expression de l espace est un binôme qui se réduit à un monôme, lorsque l'impulsion tu infiniment petite, se renouvelle à chaque instant, comme cela a lieu pour la pesanteur terrestre.

II. Les mêmes raisonnements subsistent lorsque le mouvement est uniformément et instantanément retardé.

III. Réciproquement, lorsqu'un point parcourt des espaces proportionnels aux carrés des temps, on en conclut qu'il est animé d'une force accélératrice constante. On prend pour *unité* de ces forces, celle qui est capable de produire, en agissant pendant une seconde, une unité ou 1 mètre de vitesse. il n'existe pas de dénomination pour désigner cette unité de force ; nous avons proposé celle de *dynamide*. Ainsi, l'expérience montre, dans la machine d'Athood, que, dans le mouvement des corps pesants, $\frac{2E}{T^2}$ est égal à 9,8038 ; cela veut dire que la pesanteur équivaut à 9,8038 dynamides.

IV. Lorsque plusieurs forces infiniment petites, permanentes et constantes agissent sur un point, elles se composent, comme des forces ordinaires, par le théoreme du parallélogramme, et la résultante est encore une force permanente constante. Si donc, deux forces permanentes produisent un mouvement uniformément varié, et qu'on sait que l'une de ces forces, agissant seule, produit le même genre de mouvement, on en conclut que l'autre force est aussi permanente et constante. C'est ainsi que Coulomb et de notre temps M. Morin ont montré que le frottement combiné avec la pesanteur produit un mouvement uniformément varié. On en déduit que le frottement agit comme une force retardatrice constante.

V. Lorsqu'une force permanente ne fait pas décrire des espaces proportionnels aux carrés des temps, on en conclut que cette force n'est pas constante, qu'elle varie à chaque instant ; c'est-à-dire qu'à chaque instant elle a une autre mesure, contient un nombre différent de dynamides. Voici comment on trouve ce nombre variable : Soit en général $e=f(t)$ la relation entre les espaces et les temps, c'est-à-dire e contient autant d'unités métriques que $f(t)$ contient d'unités de temps. Pour fixer les idées, supposons que pour $t=0$ on a $e=0$; au bout du temps $t+h$ l'espace décrit est $e+k$; k et h deviennent infiniment petits simultanément, mais leur rapport reste fini. C'est ce rapport fini, représenté par la fonction prime de t, qui est évidemment la vitesse qui existe au bout du temps t ; de sorte qu'on a $v=f'(t)$, ou bien, v contient autant d'unités métriques que $f'(t)$ a d'unités de temps. Au bout du temps $t+h$, v devient $v+l$; h et l sont infiniment petits simultanément; alors même leur rapport est fini et représenté par la fonction prime de $f't$ ou par $f''(t)$. C'est cette fonction qui représente la force accélératrice au bout du temps t; ou bien cette force contient autant de dynamides que $f''(t)$ contient d'unités de temps.

VI. La physique étant exigée pour l'admission à l'École polytechnique, nous traiterons, en 1846, plusieurs questions physico-mathématiques, entre autres la théorie des ondes, d'une si haute importance et si universellement négligée.

Tm