Nouvelles annales de mathématiques

Paul Serret

Démonstration d'un théorème sur le foyer de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 652-654

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__652_0>

DÉMONSTRATION

d'un théorème sur le foyer de la parabole.

(Nouv. Ann., t. IV, p. 509.)

PAR M. PAUL SERRET,
elève en mathématiques.

Des extrémités M, M' d'une corde passant par le foyer d'une parabole, on abaisse des perpendiculaires MP, M'P' sur une droite fixe située dans le plan de la parabole; démontrer que la somme $\frac{\text{MP}}{\text{MF}} + \frac{\text{M'P'}}{\text{M'F}}$ est constante (*fig.* 64).

Examinons d'abord, ce qui d'ailleurs nous servira tout à l'heure, le cas particulier où la droite fixe est parallèle à la directrice. Si nous désignons par $\pm d$ la distance de cette droite à la directrice, on aura :

$$\text{MP} = \text{MF} \pm d\,; \quad \text{M'P'} = \text{M'F} \pm d\,,$$

les signes se correspondant dans les valeurs de MP et M'P', c'est-à-dire que l'on doit prendre d avec le même signe dans les deux expressions. Or soient $\text{MF} = \rho_1$, $\text{M'F} = \rho_2$, on aura :

$$\frac{\text{MP}}{\text{MF}} = 1 \pm \frac{d}{\rho_1}\,; \quad \frac{\text{M'P'}}{\text{M'F}} = 1 \pm \frac{d}{\rho_2}.$$

D'après ce théorème on doit avoir :

$$\frac{\text{MP}}{\text{MF}} + \frac{\text{M'P'}}{\text{M'F}} = \text{une quantité constante.}$$

Donc aussi la somme $2 + \frac{d(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}$ et par suite $\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}$ doit être une quantité constante

Donc, il découle de la proposition à démontrer le théorème suivant, que nous allons démontrer directement, et qui nous servira dans un instant.

Théorème (A). Dans toute parabole, la somme des distances du foyer à deux points de cette courbe situés sur une même droite passant par le foyer, est dans un rapport constant avec le produit de ces mêmes distances.

Prenons, en effet, l'équation polaire $\rho = \frac{p}{1-\cos\omega}$ de la parabole rapportée à son foyer comme pôle, et à son axe comme axe polaire.

Menons par le point F une droite faisant un angle ω avec l'axe polaire et rencontrant la courbe aux deux points M, M'. Posons $FM = \rho_1$; $FM' = \rho_2$; on aura :

$$\rho_1 = FM = \frac{p}{1-\cos\omega}, \quad \text{et} \quad \rho_2 = FM' = \frac{p}{1+\cos\omega}.$$

Formons l'expression $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}$.

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{2p}{1-\cos^2\omega}; \quad \rho_1\rho_2 = \frac{p^2}{1-\cos^2\omega}.$$

Donc

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p},$$

ce qui démontre le théorème (A) et donne en même temps la valeur du rapport constant dont il s'agit.

Maintenant passons au cas général où la droite fixe est à une distance quelconque d du foyer et fait avec l'axe polaire un angle quelconque α.

Soient MP, M'P' les perpendiculaires abaissées. Par le foyer menons une parallèle pp' à la droite PP', on a :

$$MP = Pp + Mp = d + Mp = d + \rho_1 \sin(\alpha-\omega),$$
$$M'P' = P'p' - M'p' = d - M'p' = d - \rho_2 \sin(\alpha-\omega).$$

Nous aurons donc :

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MF}}=\frac{d+\rho_1\sin(\alpha-\omega)}{\rho_1};\qquad \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{M'F}}=\frac{d-\rho_2\sin(\alpha-\omega)}{\rho_2};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MF}}+\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{M'F}}=\frac{d(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}.$$

Or d est une quantité constante, puisque la droite PP′ est fixe.

D'après ce qui vient d'être démontré , le rapport $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_3}$ est aussi constant et égale $\frac{2}{p}$.

Donc le théorème énoncé est démontré , et la somme constante des rapports dont il s'agit est égale à $\frac{2d}{p}$; d représentant la distance au foyer de la droite fixe considérée.

Remarque 1re. D'après l'expression de la valeur de la somme constante, on voit que la valeur de cette somme ne dépend aucunement de l'inclinaison de la droite considérée, mais simplement de la distance au foyer.

Remarque 2e. Si $d=p$, la somme constante est égale à 2 ; ce qui est facile à concevoir d'après la nature même de la parabole.