MENTION

Solution du problème 102

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 654-656

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__654_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 102. (V. *p*. 370.)

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Quatre points sont sur une même circonférence ; dans chacun des triangles formés par ces quatre points trois à trois existe un point de rencontre des hauteurs : ces quatre points de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

I. *Lemme*. Dans tout triangle, la distance du cercle circonscrit, à l'un des côtés, est égale à la moitié du segment de la hauteur parallèle à cette distance ; segment compris entre le sommet et le point de rencontre des trois hauteurs.

Soit un triangle ABC dans lequel O est le point de rencontre des hauteurs, O′ le centre du cercle circonscrit, je dis que nous aurons : $O'E = \frac{AO}{2}$, $O'D = \frac{BO}{2}$.

En effet, joignant ED, nous aurons deux triangles O′DE, AOB qui sont semblables ; donc nous aurons :

$$O'D : BO :: DE : AB :: O'E : BO.$$

Mais $ED = \frac{AB}{2}$; donc $O'D = \frac{BO}{2}$, $O'E = \frac{AO}{2}$.

Il en est de même de la troisième distance.

II. Soit un quadrilatère inscrit ABCD : E, G, F, H sont les points d'intersection des hauteurs. Il suffit de démontrer que le quadrilatère EGFH a ses côtés parallèles et égaux à ceux du quadrilatère donné.

1° Je vais démontrer, par exemple, que EG est parallèle à AB : d'abord AG et BE sont parallèles ; il faut donc prouver que $BE = AG$.

Or, d'après le lemme précédent, O étant le centre du cercle, nous avons $BE = 2\,OI$, $AG = 2\,OI$; donc $BE = AG$. Démontrons encore que FH est parallèle à DC : il faut faire voir que $CH = DF$. Or $DF = 2OK$; $CH = 2OK$; donc $DF = CH$.

2° La circonférence circonscrite à ce nouveau quadrilatère est égale à la première. En effet, si nous prenons les deux triangles GEH, ADB ; ces deux triangles sont égaux, et quand deux triangles sont égaux, les rayons des cercles circonscrits à ces triangles sont égaux.

Le théorème est donc entièrement démontré.

Si le quadrilatère a deux angles droits, la démonstration est immédiate.

Le quadrilatère est alors BFDE.

DF étant perpendiculaire à BC sera parallèle à AB :

BE étant perpendiculaire à AD sera parallèle à DC :

BF sera de même parallèle à AD, ainsi que DE à BC.

(*Prochainement la solution du problème* 101, *par le même.*)