NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Principales propriétés d'un système de lentilles, d'après M. Möbius, professeur à Leipzig

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 667-673

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__667_1>

PRINCIPALES PROPRIETÉS

d'un système de lentilles.

D'après M. Möbius, professeur à Leipzig. (Crelle, t. V, p. 113; 1830.)

—

I. **Lemme.** Soit la fraction continue :

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d\text{, etc.}\; -\cfrac{1}{k}}}}} = \mathrm{F}.$$

Faisant $[a, b] = ab - 1$; $[a, b, c] = [a, b]c - a$.

$$[a, b, c, d] = [a, b, c]d - [a, b] ;$$

$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d]e - [a, b, c] ,$$

et ainsi de suite, on a :

$$\mathrm{F} = \frac{[b, c, d \ldots k]}{[a, b, c, d \ldots k]} ;$$

et l'on a les identités :

$$[a, b, c \ldots. i][b, c, d \ldots. k] - [a, b, c \ldots. k][b, c, d \ldots. i] = 1 ,$$
$$[a, b, c \ldots. i, k] = [k, i \ldots. b, a].$$

Ces formules sont démontrées dans les Eléments.

II. Lemme. Soit a la distance de l'objet au centre de la lentille, et b la distance de l'image au même point ; l'objet et l'image étant dans l'axe ; si f est la distance focale principale de la lentille ; on a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$. (*Voir* les traités d'optique.)

A. *Système de lentilles, l'objet étant dans l'axe du système.*

Notations.

III. Soient P_1, P_2, . . . P_{n-1}, P_n les centres des lentilles, tous sur une même droite :

A l'objet devant la première lentille P_1, A_1 l'image entre P_1 et P_2 ; A_2 l'image entre P_2 et P_3 .... ; A_n devant le dernier verre P_n ; faisant :

$$AP_1 = a_1 ;\ A_1P_2 = a_2 ;\ A_2P_3 = a_3 ;\ \ldots.\ A_{n-1}P_n = a_n ;$$
$$P_1A_1 = b_1 ;\ P_2A_2 = b_2 \ldots. P_n A_n = b_n.$$

h_1, h_2 . .. h_{n-1} étant les distances respectives des lentilles P_1, P_2 ; P_2, P_3 .... P_{n-1} P_n, on aura :

$$b_1 + a_2 = h_1 ;\ b_2 + a_3 = h_2 \ldots.\ b_{n-1} + a_n = b_{n-1}.$$

Si nous désignons par g_1, g_2, g_3 .... g_n les valeurs *réciproques* des distances focales des lentilles, on aura (Lemme II) :

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=g ;\ \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=g_2 \ldots. \frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=g_n.$$

Observation. Les signes de g_1, g_2 .... sont déterminés par la forme concave ou convexe des lentilles.

De même pour b_1, b_2 .... etc. ; mais h_1, h_2 .... sont toujours à prendre avec le signe +

Lieu de la dernière image.

IV. On déduit facilement de ces deux systèmes d'équation :

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]}\,; \quad b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]} \cdots\cdot$$

et enfin

$$b_n = \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \ldots\ldots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1} \ldots\ldots h_1, g_1, a_1]} =$$

$$= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \ldots\ldots h_1, g_1]\, a_1 - [h_{n-1}, g_{n-1} \ldots\ldots h_1]}{[g_n, h_{n-1} \ldots\ldots h_1, g_1]\, a_1 - [g_n, h_{n-1} \ldots\ldots h_1]} =$$

$$= \frac{[g_1, h_1, g_2 \ldots\ldots h_{n-1}]\, a_1 - [h_1, g_1 \ldots\ldots h_{n-1}]}{[g_1, h_1 \ldots\ldots g_n]\, a_1 - [h_1, g_1 \ldots\ldots g_n]}.$$

Faisons $[g_1, h_1 \ldots\ldots h_{i-1}] = \mathrm{H}_i\,; \quad [h_1, g_1 \ldots\ldots h_{i-1}] = -\mathrm{L}_i,$

$[g_1, h_1 \ldots g_{i-1}] = \mathrm{M}_i\,; \quad [h_1, g_1 \ldots\ldots g_{i-1}] = -\mathrm{N}_i;$

on aura :

$$b_n = \frac{\mathrm{H}_n a_1 + \mathrm{L}_n}{\mathrm{M}_{n+1} a_1 + \mathrm{N}_{n+1}}.$$

Cette expression a été donnée sous cette forme par Lagrange (M. de Berlin, 1778 et 1803) :

$$\text{pour } a_1 = \infty\,, \text{ on a } b_n = \frac{\mathrm{H}_n}{\mathrm{M}_{n+1}}\,;$$

$$\text{et pour } b_n = \infty\,,\ a_1 = -\frac{\mathrm{N}_{n+1}}{\mathrm{M}_{n+1}}.$$

Calcul de **H, M, L, N.**

Première méthode.

V. Les calculs de ces quantités, qui ne dépendent que de la construction de la lunette, s'abrégent au moyen de ces relations faciles à trouver :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{i+1} &= h_i \mathrm{M}_{i+1} - \mathrm{H}_i,\\
\mathrm{L}_{i+1} &= h_i \mathrm{N}_{i+1} - \mathrm{L}_i,\\
\mathrm{M}_{i+1} &= g_i \mathrm{H}_i - \mathrm{M}_i,\\
\mathrm{N}_{i+1} &= g_i \mathrm{L}_i - \mathrm{N}_i.
\end{aligned}$$

Connaissant les résultats pour n lentilles, on en déduit ceux pour $n+1$ lentilles.

Deuxième methode.

$$H_{i+1} = [h_i, g_i, h_{i-1} \ldots g_2, h_1, g_1]$$
$$= \frac{[h_i, g_i, h_{i-1} \ldots g_1]}{[g_i \ldots g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1} \ldots g_1]}{[h_{i-1} \ldots g_1]} \cdots \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1 g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1$$
$$= (h_i \ldots g_1)(g_i \ldots g_1) \ldots (g_2, h_1, g_1) \cdot (h_1, g_1) \cdot g_1.$$

Les quantites renfermées entre les parenthèses ( ) représentent les valeurs de fractions continues ; ainsi :

$$(h_1 g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1}; \quad (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)}, \text{ etc.}$$

Faisant donc :

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \alpha; \quad g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta; \quad h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma; \quad g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta,$$

on aura :

$$H_2 = \alpha g_1; \quad H_3 = \gamma\beta\alpha g_1; \text{ et } M_2 = g_1; \quad M_3 = \beta\alpha g_1 \ldots \text{ etc.}$$

Et faisant de même :

$$g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu; \quad h_2 - \frac{1}{\mu} = \nu, \quad g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi \ldots$$

on aura :

$$-N_3 = \mu h_1; \quad -N_4 = \pi\nu\mu h_1 \ldots; \quad -L_2 = h_1; \quad -L_3 = \nu\mu h;$$
$$-L_4 = \varphi\pi\nu\mu h.$$

Cette méthode est de M. Gabrio Piola (Éphémérides de Milan, 1822).

B. *L'objet n'étant pas dans l'axe du système.*

Notations.

VI. Soit C le lieu de l'objet; C_1 le lieu de la première image entre P_1 et P_2 ; C_2 le lieu de l'image entre P_2 et P_3.... ; et C_n le lieu de la dernière image devant P_n : et on sait, par les principes de dioptrique, que C, P_1 et C_1 sont sur une même droite, ainsi que C_1, P_2, C_2, etc., de sorte que tous ces points sont dans un même plan passant par l'axe. Prenons sur l'axe une distance PA $=$ PC ; ou, ce qui dans le cas actuel revient au même, abaissons la perpendiculaire CA sur l'axe ; de même les perpendiculaires C_1A_1 ; C_2A_2 ; C_nA_n ; A, A_1, A_2.... A_n représentent les mêmes points que ci-dessus, et nous conservons les mêmes notations. Faisons de plus :

$$AC = c;\quad A_1C_1 = c_1;\quad A_2C_2 = c_2\ \ldots\ A_nC_n = c_n;$$

on a évidemment :

$$\frac{c}{c_1} = -\frac{a_1}{b_1};\quad \frac{c_1}{c_2} = -\frac{a_2}{b_2}\ \ldots.$$

d'où

$$\frac{c}{c_n} = (-1)\frac{a_1 \,.\, a_2 \ldots. a_n}{b_1 \,.\, b_2 \ldots. b_n}.$$

Or

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1}a_1 + N_{i+1}},$$

d'où

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{H_{i+1}a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1}a_1 + N_{i+1}};$$

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1}a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i};$$

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_1 + N_i}{M_{i-1}a_1 + N_{i-1}};$$

d'où

$$\frac{a_i}{b_i}\cdot\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}\ldots\frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1}a_1 + N_{i+1}}{M_1a_1 + N_1} = M_{i+1}a_1 + N_{i+1};$$

car

$$M_1 = 0;\quad N_1 = 1;$$

et

$$c_n = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1}a_1 + N_{n+1}}.\qquad \text{C. Q. F. T.}$$

C. *Propriétés analogues d'une lentille et d'un système de lentilles.*

Une lentille.

VI. Soit A l'objet placé devant la lentille P, et B son image ; F le foyer principal de la lentille P du côté de l'objet A, et G le foyer principal du côté de l'image ; de sorte que $PF = PG = f$.

Faisons $AP = a$; $BP = b$; on aura :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}; \quad AF = a - f = \alpha; \quad GB = b - f = \beta.$$

d'où :

$$\alpha\beta = f^2; \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{f} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}};$$

$\frac{a}{b}$ est égal au diamètre de l'objet divisé par le diamètre de l'image. Appelant F le premier foyer principal et G le second foyer, nous avons ce théorème :

« La distance focale d'une lentille est moyenne proportionnelle entre la distance de l'objet au premier foyer et la distance de l'image au second foyer. Le diamètre de l'objet est à celui de l'image comme les racines carrées de ces distances. Les foyers principaux sont compris entre l'objet et l'image (lentille bi-convexe), ou l'inverse a lieu (lentille bi-concave).

Un système de lentilles.

VII. Reprenons les notations du paragraphe III.

Faisons $A_1 = p + \alpha$; $b_n = q + \beta$; p, q, α, β sont quatre indéterminées.

On a trouvé :

$$M_{n+1}a_1b_n - H_na_1 + N_{n+1}b_n = L_n \quad (IV).$$

Remplaçant a_1 et b_n par leurs valeurs, il vient :

$$M_{n+1}\alpha\beta + (M_{n+1}q - H_n)\alpha + (M_{n+1}p + N_{n+1})\beta =$$
$$= L_n - M_{n+1}pq + H_np - N_{n+1}q.$$

Faisons $\quad M_{n+1}q - H_n = 0$; $\quad M_{n+1}p + N_{n+1} = 0$; l'équation se réduit à :

$$M_{n+1}\alpha\beta = L_n + H_np ;$$

et éliminant p ·

$$M^2_{n+1}\alpha\beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1.$$

D'après les propriétés des fractions continues (1), faisant $\frac{1}{M_{\ \ +1}} = f$, on a donc, comme pour une lentille, $\alpha\beta = f^2$.

Déterminant donc sur l'axe deux points F et G, de sorte qu'on ait :

$$P_1F = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} \quad \text{et} \quad P_nG = q = \frac{H_n}{M_{n+1}}.$$

F est le *premier foyer principal* du système, et G le second foyer principal (*voir* IV). On a encore $AF.\,GA_n = f^2$, et on déduit pour ce système le même théorème que pour une seule lentille.

Le rapport du diamètre de l'objet à celui de l'image $=$
$$= \frac{(-1)^n c}{c^n} = M_{n+1}a_1 + N_{n+1} = M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1} =$$
$$= M_{n+1}\alpha = \frac{\alpha}{f} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{AF}{GA_n}},$$ comme dessus.

D. *Télescopes dioptriques.*

VII. On appelle de ce nom un système de lunettes où les rayons incidents sur la première lentille, ainsi que les rayons émergents, sont parallèles ; alors $f = 0$; donc $g_n = 0$; et $M_{n+1} = 0$; l'on a donc :

$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{N_{n+1}}$; à $a_1 = \infty$ répond $b_n = \infty$, ainsi que cela doit être.

On a $N_{n+1}c_n = (-1)^n c$; donc, quelle que soit la distance de l'objet, la grandeur de l'image ne varie pas.

On trouve dans les traités de physique les conséquences *dioptriques* de ces diverses formules, qui semblent plus simples que celles que l'on lit au tome II du Traité d'Astronomie physique, édit. de 1844.