NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Sur la convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 66-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__66_0>

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la faculte de Bordeaux.

Proposition I. La série $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, \ldots$ (1), de nombres positifs et décroissants est de même espèce (convergente ou divergente) que la série $u_1, ku_k, k^2u_{k^2}, \ldots k^nu_{k^n}, \ldots$ (2), que l'on forme en multipliant chaque terme de la première par son indice, et prenant dans la série ainsi formée, les termes où les indices sont en progression géométrique.

Démonstration. Soit $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$; en décomposant cette somme en d'autres, on a :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} < (k-1)u_1 \quad \text{et} \quad > (k-1)u_k = \frac{k-1}{k} . ku_k,$$

de même

$$u_k + \ldots \quad u_{k^2-1} < (k-1)ku_k \quad \text{et} > \frac{k-1}{k} . k^2u_{k^2},$$

$$u_{k^2} + \ldots \quad u_{k^3-1} < (k-1)k^2u_{k^2} \,\text{et} > \frac{k-1}{k} . k^3u_{k^3}, \quad \text{etc.}$$

De là

$$S < (k-1)[u_1 + ku_k + k^2u_{k^2} + \ldots] \text{ et } > \frac{k-1}{k}[ku_k + k^2u_{k^2} + \ldots].$$

Les sommes S et $S_1 = u_1 + ku_k + k^2u_{k^2} + \ldots$ sont donc ensemble finies ou infinies, ce qui prouve le théorème. Pour $k = 2$, on a un théorème donné par M. Cauchy dans son analyse algébrique.

Proposition II. Les séries suivantes (A), où ln indique le logarithme de n pour une base quelconque, et α un nombre

réel positif ou négatif, restent de même espèce quand on y remplace n par an, a étant un nombre réel positif,

$$\left.\begin{array}{ll}
1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\ldots & +\frac{1}{n^{\alpha}}\ldots \\
1+\frac{1}{2(l2)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3)^{\alpha}}\ldots & +\frac{1}{n(ln)^{\alpha}}\ldots \\
1+\frac{1}{2l2(ll2)^{\alpha}}+\frac{1}{3l3(ll3)^{\alpha}}\ldots & +\frac{1}{nln(lln)^{\alpha}}\ldots \\
1+\frac{1}{2l2ll3(lll2)^{\alpha}}\ldots & +\frac{1}{nln.lln.(llln)^{\alpha}}\ldots
\end{array}\right\} \text{(A)}$$

Démonstration Représentons ces séries par $S, S', S'', S'''\ldots$ et par S_a, S'_a, S''_a, S'''_a,... quand on y change n en an, on a d'abord $S_a = \frac{1}{a^{\alpha}} S$, ainsi S et S_a sont de même espèce.

En supposant $a > 1$, et prenant n de manière à obtenir $lan < aln$ $\left(\text{d'où } ln > \frac{\log a}{a-1}\right)$. Si l'on regarde le terme répondant à cet indice comme le premier de la série, on aura $S_a < S$ et $S'_a > \frac{1}{a^{1+\alpha}} S'$, donc S' et S'_a sont de même espèce.

Pareillement, n étant pris de manière à avoir $llan < laln < alln$, on trouve $S''_a < S''$ et $S''_a > \frac{1}{a^{2+}} S''$, ainsi S'' et S''_a sont de même espèce, et ainsi de suite.

En supposant $a < 1$, ou en posant $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$, à cause de $l\frac{n}{b} > \frac{1}{b} ln$ $\left[\text{d'où } \left(1-\frac{1}{b}\right) ln > lb\right]$, on verra que les inégalités auront lieu en sens contraire, et la conclusion restera la même.

Proposition III. Les séries (A) sont toutes convergentes pour $\alpha > 1$ et divergentes pour $\alpha = 1$ ou < 1.

Démonstration. Si l'on applique à ces séries la proposition I, la série ku_k, $k^2u_{k^2}$, etc.; deviendra

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{k^{\alpha-1}}+\frac{1}{k^{2(\alpha-1)}}+\frac{1}{k^{3(\alpha-1)}}\cdots+\frac{1}{k^{n(\alpha-1)}}\cdots \\
\frac{1}{(lk)^{\alpha}}+\frac{1}{(2lk)^{\alpha}}+\frac{1}{(3lk)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(nlk)^{\alpha}}\cdots \\
\frac{1}{lk.(lk)^{\alpha}}+\frac{1}{2lkl\,(2lk)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{nlk,l(nlk)^{\alpha}}\cdots \\
\frac{1}{lk.llk.(lllk)^{\alpha}}+\frac{1}{2lk.ll(2k).lll(2k)^{\alpha}}+\frac{1}{nlk.l(nlk)[ll(nlk)]^{\alpha}}\cdots \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \quad (B)$$

On remarquera que la première série (B) est une progression géométrique, elle est donc convergente pour $\alpha>1$, divergente pour $\alpha=1$ ou <1, il en sera donc de même de la première série (A). La deuxième série (B) n'est que la première série (A), où l'on aurait remplacé n par nlk, donc la deuxième série (B), et par suite la deuxième série (A), sont convergentes ou divergentes, dans les mêmes cas que la première série (A); la troisième série (B) revenant à la deuxième série (A), où n est remplacé par nlk, il s'ensuit que la troisième série (B), et par suite la troisième série (A) seront convergentes ou divergentes dans les mêmes cas que la deuxième série (A), et par suite que la première série (A), et ainsi de suite.

Proposition IV. Si au-dessus d'une certaine valeur de n, les expressions

$$\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{ln},\quad \frac{l\left(\frac{1}{nu_n}\right)}{lln},\quad \frac{l\left(\frac{1}{nln.u_n}\right)}{llln},\quad \frac{l\left(\frac{1}{nlnlln.u_n}\right)}{lllln},\ \text{etc.},\qquad (C)$$

sont <1, la série $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$ sera divergente, au contraire si au delà de certaines valeurs de n les expressions (C) surpassent $1+\delta$, δ étant une quantité finie, la série sera convergente (*).

(*) On doit à M. O. Bonnet des demonstrations analogues. (*Journ. de Mathématiques*, VIII, 73.) Tm.

Démonstration. Posez $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, il en résulte $\alpha = \frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{ln}$, la série $u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \ldots$ devenant $\frac{1}{n^{\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha'}} + \frac{1}{(n+2)^{\alpha''}} \ldots$ si $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont < 1, la série surpassant $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots$ sera divergente. Au contraire si $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont $> 1 + \delta$, la somme de la série sera moindre que

$$\frac{1}{n^{1+\delta}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\delta}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\delta}} \ldots$$

quantité finie. La série sera donc convergente. Cette règle est de M. Cauchy et les autres sont de M. Bertrand; elles se démontrent de même, on les emploiera quand celle de M. Cauchy est en défaut, car pour certaines séries $\delta = 0$, et alors on ne peut conclure la convergence. M. Bertrand a démontré la proposition III, par la considération des intégrales définies. Pour plus de détails, voyez son mémoire (*Journal de Mathématiques*, t. VII, p. 55), il s'y trouve une autre série de règles de convergence.

La règle de M. Cauchy permet de vérifier la proposition suivante qui est importante.

Propositon V. Dans une série renfermant des termes négatifs, si on change l'ordre des termes, on pourra 1° changer la somme sans détruire la convergence; 2° détruire la convergence, c'est-à-dire, rendre la série divergente, de convergente qu'elle était.

1° Les séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2},$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2},$$

sont toutes deux convergentes, car dans la première, les termes vont en décroissant, et il en sera de même de la seconde en remplaçant $1+\frac{1}{3}$ par $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ par $\frac{12}{35}$, etc.

D'ailleurs si l'on prend pour termes généraux

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2n+1\,.\,2n+2}\,;\ \frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-$$
$$-\frac{1}{2n+2}=\frac{8n+5}{(4n+1)\,(4n+3)\,(2n+2)},$$

chaque terme de la deuxième série, surpassant le terme correspondant de la première, on devra en conclure que la somme de la première série, est moindre que celle de la deuxième.

2° La série $1-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{4}}+\ldots$ est convergente; mais si au lieu de prendre les termes négatifs de 2 en 2, on les prend comme plus haut, de 3 en 3, la série

$$1+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{1}{4}},\ldots$$
$$\sqrt{\frac{1}{4n+1}}+\sqrt{\frac{1}{4n+5}}-\sqrt{\frac{1}{2n+2}},$$

sera divergente. La règle de M. Cauchy donne, en supposant n fort grand,

$$\sqrt{\frac{1}{4n+1}}+\sqrt{\frac{1}{4n+3}}-\sqrt{\frac{1}{2n+2}}=\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{n}},$$

et

$$\frac{l.\dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}{ln}=\frac{1}{2}+\frac{l\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)}{ln}<1.$$

Ces exemples sont pris d'un mémoire de M. Dirichlet, où il établit que toute progression arithmétique renferme une infinité de nombres premiers, quand le premier terme et la raison sont premiers entre eux.