NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème sur la divisibilité des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 81-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__81_1>

THÉORÈME SUR LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

PAR O. R.

Soit A un nombre de $p+1$ chiffres, n un facteur quelconque par lequel on multiplie le chiffre des unités de A, si l'on ajoute à ce produit le chiffre des dizaines, qu'on multiplie le résultat par n, qu'on ajoute à ce second produit le chiffre des centaines, etc.; qu'on répète la même opération jusqu'au chiffre de l'ordre le plus élevé de A, et qu'on désigne par R, le dernier résultat de ces opérations, la divisibilité de A par un diviseur quelconque de $10n-1$ dépendra de R.

Si, au lieu de procéder uniquement par l'addition, on emploie alternativement la soustraction et l'addition, retranchant du premier produit le chiffre des dizaines, ajoutant au second les chiffres des centaines, retranchant du troisième le chiffre des mille, etc., la divisibilité du dernier résultat obtenu R, par un diviseur de $10n+1$, sera la même que celle de A.

Dans les deux modes de vérification, on simplifiera le calcul, en élaguant successivement tous les multiples du diviseur essayé, à mesure qu'ils seraient compris dans les résultats successifs.

Si l'on considère la fraction $\frac{R}{n^p}$, et qu'on désigne par ρ le nombre qu'il en faut retrancher pour que son numérateur $R - \rho n^p$ soit divisible par le diviseur qu'on a en vue, ρ sera aussi le reste de la division de A par ce diviseur.

La démonstration de ce théorème est très-simple, car on a évidemment :

$R = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + a_3 n^{p-3} + \ldots + a_p$: a_0, a_1, a_2, a_p, désignant les chiffres de A, de manière que

$$A = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1}, \ldots a_1 . 10 + a_0 ,$$

d'où l'on tire :

$$n^p (A - \rho) = (\overline{10n}^{p} - 1) a_p + n a_{p-1} (\overline{10n}^{p-1} - 1) +$$
$$+ n^2 a_{p-2} (\overline{10n}^{p-2} - 1) \ldots\ldots + R - \rho n^p .$$

Si l'on considère les diviseurs de $10n - 1$; pour ceux de $10n + 1$, on a :

$$R = a_0 n^p - a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} \ldots\ldots \pm a_p ,$$

et $n^p (A - \rho) = (\overline{10n}^{p} \mp 1) a_p + n a_{p-1} (\overline{10n}^{p-1} \pm 1)$, etc.

Le théorème énoncé résulte de la considération de ces relations.

Exemples : Diviseurs de $10n - 1$ et de $10n + 1$, qu'on peut vérifier par la méthode que nous venons d'exposer.

$n = 1$ donne	3, 9 pour diviseur de $10n - 1$, et	11 pour diviseur de $10n + 1$
$n = 2$	19	3, 7, 21
$n = 3$	29	31
$n = 4$	3, 13, 39	41
$n = 5$	7, 49	3, 17, 51
$n = 6$	59	61
$n = 7$	3, 23, 69	71
$n = 8$	79	3, 9, 27, 81
$n = 9$	89	91
$n = 10$	3, 9, 11, 99	101
$n = 11$	7, 17, 119	131