Note sur la théorie des épicycloïdes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__83_0>

NOTE

SUR LA THEORIE DES ÉPICYCLOIDES.

PAR UN ABONNÉ.

—

Tout ce qu'on a pu trouver sur la rectification et sur la quadrature des Épicycloïdes, me paraît renfermé dans deux théorèmes qui s'appliquent aux roulettes en général. (On appelle *Épicycloïde* la courbe engendrée par un point quelconque du plan d'un cercle roulant sur un autre cercle : — *Roulette*, la courbe engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe roulant sur une autre courbe.) — Voici ces deux théorèmes :

Si un arc de courbe roule sans glissement, d'abord sur la convexité, puis dans la concavité d'une autre courbe, de sorte que, dans ces deux roulements, les mêmes points de la courbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points de la courbe fixe :

1er Théorème : *La somme ou la différence des deux arcs décrits par un point quelconque du plan de la courbe mobile sera indépendante de la nature de la courbe fixe : — la somme, si le rayon de courbure de la courbe fixe est, en chacun des points de contact, plus grand que celui de la courbe mobile ; la différence, dans le cas contraire.*

2me Théorème. *Si on considère, dans chacun de ces deux roulements, l'aire du quadrilatère mixtiligne, limité par l'arc de la courbe fixe, l'arc de la roulette décrite, et les deux lignes droites qui joignent les premières et dernières extrémités de ces* *arcs ; la somme des deux quadrilatères sera une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la nature de la courbe fixe (au lieu de la somme entendez la différence, dans la même circonstance que ci-dessus).*

Pour s'assurer de la vérité de ces théorèmes, il suffit de considérer : 1° que l'arc de roulette se forme en multipliant la normale, qui va du point décrivant au point de contact des courbes directrices, par la somme des angles de contingence, lorsque le roulement est sur convexité ; et par la différence de ces mêmes angles, quand le roulement se fait en concavité. — 2° : Que l'aire de la roulette se forme en ajoutant à chaque instant, au petit secteur curviligne qui a son sommet au point décrivant et pour base le petit arc de courbe mobile, cet autre secteur dont on vient d'exprimer l'arc, et dont le sommet, ou centre, est au point actuel de contact ; de sorte que le quadrilatère mixtiligne de la roulette, surpasse l'aire du secteur fini de la courbe mobile d'une certaine quantité qui est la somme de tous les petits secteurs engendrés par le roulement.

II. Il résulte de ces théorèmes généraux, que si on connait la longueur et l'aire des deux roulettes que décrit un point du plan d'une courbe roulant sur une courbe fixe particulière, on connaîtra les longueurs et aires de toutes les doubles roulettes, décrites par le même point, quand la courbe fixe est quelconque.

III. Il convient de remarquer par rapport à la courbe fixe, trois cas principaux :

1° Si la ligne fixe est une droite, il n'y a pas de différence entre sa concavité et sa convexité ; ainsi la longueur et l'aire de la roulette sur une droite est toujours moitié de la somme (ou différence) des longueurs et aires des deux roulettes décrites sur concavité et convexité d'une courbe quelconque.

2° Si l'on prend pour courbe fixe une courbe identique à la courbe mobile, en ayant soin que ces deux courbes se touchent dans le roulement par leurs points semblables, il n'y aura pas de roulement possible en concavité; il n'y aura pas, veux-je dire, de *roulette intérieure*; ainsi l'arc de la *roulette extérieure* sera alors précisément le double de l'arc de roulette sur une droite. Et, dans le même cas, l'aire de la roulette extérieure surpassera le secteur fini de la courbe mobile (*) d'une quantité double de l'excès qu'il a sur ce même secteur quand la ligne fixe est une droite.

3° Si on suppose qu'aux points correspondants de la courbe fixe et de la courbe mobile, les deux rayons de courbure ont constamment le même rapport, comme cela arrive manifestement dans le cas des Épicycloïdes, alors les angles de contingence ayant toujours entre eux aussi un même rapport; il s'ensuit que la somme (ou différence) constante des deux arcs finis de roulettes, se trouvera partagée, entre la roulette extérieure et la roulette intérieure, dans le rapport de la somme des rayons de courbure à leur différence; les excès de chaque aire de ces deux roulettes, sur le secteur fini de la courbe mobile, excès dont la somme (ou la différence) est constante; ces excès, dis-je, dans la même circonstance, se partageront aussi entre la roulette extérieure et la roulette intérieure, dans ce même rapport de la somme des rayons de courbure à leur différence.

Ces principes généraux étant bien compris, nous allons faire la rectification et la quadrature (indéfinies) de toutes les épicycloïdes, que nous distinguerons, comme on l'a toujours fait, en *épicycloïdes ordinaires*, *épic. allongées et épic. accourcies*.

IV. *Rectification et aire des épicycloïdes ordinaires.*

On doit à Cardan le cas particulier d'une épicycloïde ordi-

(*) Je veux dire le secteur de la courbe mobile qui a son sommet au point décrivant; et dont les deux rayons vecteurs vont aux extrémités de l'arc qui s'est enroulé sur la courbe fixe.

naire se réduisant à une ligne droite ; c'est l'*épicycloïde intérieure* produite par le point d'une circonférence roulant dans la concavité d'une circonférence de rayon double · théorême très-curieux qui se démontre par la géométrie la plus simple, et qui offre à l'art des machines une très-belle transformation du mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne alternatif.

Dans ce théorème de Cardan, l'épicycloïde intérieure a pour longueur totale le diamètre du cercle fixe ; en même temps l'aire totale de cette épicycloïde est la moitié du cercle fixe, ou le double du cercle roulant.

Ensuite, si on faisait tourner extérieurement le petit cercle sur le grand, on aurait, en vertu de la troisième remarque ci-dessus, une longueur totale égale à *six fois* le diamètre du cercle roulant ; et l'aire de cette roulette extérieure (limitée à l'épicycloïde et au cercle fixe) serait égale à *quatre fois* l'aire du cercle roulant, puisque son excès sur l'aire de cercle roulant doit être égal à trois fois l'excès qui est relatif à la roulette intérieure.

Donc si on fait rouler un cercle sur une courbe quelconque, d'abord dans la concavité, ensuite dans la convexité, en partant de la même origine, de manière que les deux roulettes se réunissant après le déroulement total de la circonférence mobile, offrent une courbe fermée, la LONGUEUR totale de cette courbe fermée sera de *huit fois le diamètre du cercle générateur*, et son AIRE sera *six fois l'aire du cercle générateur*.

La *cycloïde ordinaire* a donc pour longueur *quatre fois le diamètre du cercle générateur* ; et son aire est à celle de ce même cercle dans le rapport de *trois à un*.

D'ailleurs on aura par ce qui précède les longueurs et les aires totales de toutes les épicycloïdes, puisque connaissant le rapport entre le rayon du cercle fixe et celui du cercle mobile, on saura comment se partagent entre l'épicycloïde intérieure et l'extérieure, la longueur et l'aire des deux courbes réunies.

Mais ce ne serait que la rectification et la quadrature *définies*. Le théorème de Cardan peut donner davantage; c'est-à-dire peut donner la rectification et la quadrature *indéfinies*.

En effet, la longueur de l'épicycloïde droite de Cardan à partir de l'origine où le point décrivant est sur le cercle fixe, cette longueur est manifestement égale à *deux fois le sinus verse de la moitié de l'arc générateur*;... et il est également facile de voir que le demi-segment du cercle fixe qui forme à chaque instant l'aire de l'épicycloïde intérieure, est *le double du segment du cercle roulant*.

D'où on conclura que la somme des arcs des deux épicycloïdes (intérieure et extérieure), décrites sur une courbe fixe quelconque; ces arcs comptés à partir de l'origine commune où le point décrivant est sur la courbe fixe, cette somme est toujours égale à *huit fois le sinus verse de la moitié de l'arc générateur*. En même temps les portions correspondantes de l'aire de ces deux épicycloïdes valent ensemble *six fois le segment du cercle générateur*.

On voit qu'en particulier on est, par ce qui précède, en possession de la rectification et de la quadrature indéfinies de la cycloïde ordinaire. Je passe aux autres épicycloïdes.

V. *Rectification et quadrature des épicycloïdes allongées ou accourcies*. Au moyen de ce qu'une ellipse est toujours épicycloïde accourcie (ou allongée) d'un cercle dont le rayon est égal à la somme (ou à la différence) de ses demi-axes, tournant intérieurement dans un cercle de rayon double, on voit que tous les arcs de cycloïde (ou d'épicycloïde) allongée ou accourcie, sont comparables à certains arcs d'une ellipse déterminée. De plus, les aires correspondantes de ces épicycloïdes se trouveront comparées à des quadrilatères limités par deux droites, un arc de cercle et un arc d'ellipse; mais je laisse au lecteur de voir par lui-même le détail de la chose.

J'observerai seulement que si un cercle tourne extérieurement sur un cercle égal, un point quelconque de son plan décrit une courbe du genre de celles que M. Quételet appelle caustiques secondaires. (La développée de cette courbe serait la caustique par réflexion du point qui correspond dans le cercle fixe, au point décrivant mobile.) Cette courbe est algébrique à cause de l'égalité des deux cercles; c'est une courbe du quatrième degré. On aura d'après ce qui précède, sa longueur totale; elle sera égale à quatre fois le contour de l'ellipse ayant pour axes les deux segments du diamètre passant par le point décrivant; son aire totale sera également facile à calculer à l'aide des principes précédents et dépendra de l'aire de cette même ellipse. Ce résultat paraîtra d'autant plus remarquable, si on fait attention à la propriété de cette caustique secondaire remarquée par M. Sturm, qui est que la différence des distances de chacun de ses points au point lumineux et à son conjugué harmonique dans le cercle, ces deux distances multipliées respectivement par un certain coefficient constant, donne une somme invariable (*Annales de Mathémat.*, t. XV, p. 205, Gergonne); circonstance qui établit une analogie remarquable et très-étroite, entre la construction de cette courbe et celle des sections coniques.

Pascal, dans son fameux défi sur la roulette, a fait voir le premier que la longueur des cycloïdes allongées ou accourcies, dépend de la rectification de l'ellipse. Nicolle a montré la même chose pour les épicycloïdes (allongées ou accourcies) dans les mémoires de l'Académie des sciences pour 1708. Pascal avait aussi tiré de sa méthode, la détermination des deux cycloïdes allongées et accourcies qui ont des longueurs égales; ce qu'on peut aussi demander pour les épicycloïdes et ce qu'on fera facilement avec ce qui précède. Pascal emploie une marche équivalente au calcul intégral, qui est aussi le procédé de Nicolle ; je ne crois pas que cette théorie ait été jamais présentée dans les termes auxquels elle se trouve actuellement réduite. Aussi m'a-t-il paru intéressant de montrer comment de simples considérations intuitives pouvaient mettre les élèves en possession de tous ces beaux résultats.

J'ajouterai comme application des théorèmes généraux que lorsqu'une section conique roule sur elle-même, chacun de ses foyers décrit un arc de cercle ; il suit de là que les diverses roulettes décrites par le foyer d'une conique, dépendent pour leur rectification et leur quadrature du problème de la quadrature du cercle.

Je termine enfin en proposant aux lecteurs des Annales, d'examiner si cette théorie peut s'appliquer aux roulettes spheriques, et surtout s'il y a quelque épycicloïde sphérique qui soit un arc de grand cercle, ce qui ferait l'analogue du beau théorème de Cardan.