NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

QUILLET

Note sur le problème des lumières, et sur un paradoxe de statique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 89-104

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__89_1>

NOTE

Sur le problème des lumières, et sur un paradoxe de statique.

PAR M. QUILLET.

Le problème des lumières donne lieu, dans le cas où le point cherché doit être situé sur la courbe représentée par l'équation bifocale $\varphi(z,z') = 0$, à une singularité d'analyse remarquée par M. Terquem, dans une de ses intéressantes notices (note IV de la page 118, du troisième volume des *Annales*).

La discussion analytique de ce problème peut être utile, en ce sens, qu'elle comprend presque tous les cas qui peuvent se présenter dans la recherche des valeurs maxima ou minima d'une fonction d'une seule variable entre les limites, pour lesquelles elle demeure continue. Le choix de la variable indépendante n'est pas ici purement arbitraire, et il y a une certaine liaison, que le calcul fait connaître, entre ce problème général, et celui que M. Gerono a traité. Nous examinerons, à cette occasion, dans le second paragraphe de cet article, un paradoxe de statique que l'on rencontre dans la recherche des positions d'équilibre d'une ellipse donnée, considérée comme une ligne matérielle, inflexible, uniformément pesante, et inscrite dant un angle droit, dont le plan est vertical, lorsqu'on fait abstraction du frottement de l'ellipse sur les côtés.

§ Ier.

Une ellipse donnée, dont le périmètre est sans pouvoir réflecteur, est située dans le vide, et éclairée par deux corps lumineux très-petits, par rapport à ses dimensions, et placés a ses foyers. Les intensités des deux lumières à l'unité de distance, et dans toutes les directions autour de chacune d'elles, étant respectivement représentées par (a) et par (b), qui seront des constantes données, déterminer sur le périmètre de cette ellipse, les points pour lesquels l'intensité de la lumière reçue, est un maximum, ou bien un minimum.

Si les dimensions des deux corps lumineux, autour des foyers, devenaient sensibles, par rapport à celles de l'ellipse, et que ces deux corps fussent des solides incandescents, il ne suffirait pas de les supposer sphériques, et également lumineux dans toute l'étendue de leur surface, pour être en droit de les traiter, dans le calcul, comme des points lumineux. En effet, le théorème de l'action, suivant la raison inverse du carré de la distance, d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur donné, suppose que l'on considère la totalité des points de cette couche, ce qu'on ne pourrait faire ici, d'après les hypothèses admises.

Les deux équations du problème, entre les deux variables z et z' qui représenteront les rayons vecteurs, et la fonction I qui mesurera l'intensité de la lumière reçue en un point quelconque de l'ellipse, seront :

$$z + z' = 2A \qquad (1)$$

$$I = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z'^2} \qquad (2)$$

(a) et (b) désignant les intensités des deux lumières qui occupent respectivement les foyers gauche et droit de l'ellipse, pour fixer les idées, nous supposerons $a > b$, la fonction I sera toujours continue entre les limites qui comprennent les valeurs possibles de z et de z', et pourra à volonté d'après l'équation (1), être considérée comme une fonction de z ou de z' seul.

On sait aussi :

1° Que lorsqu'une fonction réelle continue et explicite d'une seule variable indépendante, passe, pour une valeur particulière de cette variable, par une valeur maximum ou minimum, cette même valeur de la variable indépendante, doit rendre sa première dérivée par rapport à cette variable, nulle, infinie, ou discontinue.

2° Que pour s'assurer, dans le premier cas, s'il y a maximum ou minimum, il faut examiner si cette même valeur de la variable, donne une valeur finie et déterminée à la première des dérivées consécutives, qui cesse de s'évanouir. Cette dérivée doit être d'ordre pair, et dans ce cas, il y a maximum ou minimum pour la fonction primitive, selon que la valeur de cette dernière dérivée, est négative ou positive.

3° Que dans les deux derniers cas et même dans le précédent, si la première des dérivées consécutives qui cesse de s'évanouir prenait une valeur infinie, il est nécessaire pour décider s'il y a maximum ou minimum, et pour les distinguer, de soumettre la fonction I à une discussion spéciale.

1. Ceci étant admis, passons à l'examen du premier cas : les deux équations différentielles du problème seront :

$$dI = -\frac{2a}{z^3}\,dz - \frac{2b}{z'^3}\,dz' = 0, \qquad (3)$$

$$dz + dz' = 0, \qquad (4)$$

éliminons alternativement dz et dz' entre ces deux équations, les équations résultantes seront :

$$dz\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0, \qquad (5)$$

$$dz'\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0, \qquad (6)$$

et pourront remplacer l'équation (3).

La première manière de vérifier ces dernières, consiste à poser :

$$\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3} = 0,$$

d'où $\frac{z}{z'} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ en même temps que $z + z' = 2A$.

z, z' et I auront donc respectivement les valeurs suivantes

$$z = \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}, \quad z' = \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}},$$

$$I = \frac{a}{\left(\frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}\right)^2} + \frac{b}{\left(\frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}\right)^2},$$

les valeurs de z et de z' sont faciles à construire (voir les Ann. l. c.), et la détermination des points cherchés, s'effectue immédiatement. Cette solution n'est pas toujours admissible, car le maximum de la valeur du rapport $\frac{z}{z'}$, dans une ellipse dont 2A et 2C sont respectivement le grand axe et l'excentricité, est $\frac{A+C}{A-C}$; il faut donc que l'on ait :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{A+C}{A-C},$$

et dans cette hypothèse, elle détermine sur le périmètre de l'ellipse, et du côté droit par rapport à la direction du petit axe, deux points symétriquement placés par rapport à l'autre axe, et pour lesquels l'intensité de la lumière est un minimum. En effet, pour obtenir l'expression de d^2I, différentions les équations (3) et (4), en prenant z ou z' pour variable indépendante, il en résultera :

$$\frac{d^2I}{dz^2} = \frac{d^2I}{dz'^2} = \frac{6a}{z^4} + \frac{6b}{z'^4};$$

le second membre étant positif, fini et différent de zéro, lorsqu'on y substitue les valeurs de z et de z' précédemment trouvées, et cette dérivée étant d'ordre pair, il s'ensuit qu'aux points correspondants, l'intensité de la lumière est un minimum.

2. Pour obtenir d'autres solutions, reprenons les deux expressions différentielles :

$$dz\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right), \qquad dz'\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right),$$

et égalons dz ou dz' à zéro et à l'infini. Le facteur $\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}$, ne devenant infini pour aucun point de l'ellipse, les équations différentielles seront ainsi satisfaites.

Il est d'ailleurs permis d'égaler dz ou dz' à zéro ou à l'infini, pourvu que z et z' soient considérées comme des fonctions d'une certaine variable indépendante. Comme il s'agit d'une ellipse, et que les rayons vecteurs ont pour expressions :

$$z = A + \frac{Cx}{A}, \qquad z' = A - \frac{Cx}{A},$$

on ne pourra pas choisir l'abscisse pour variable indépendante, puisque l'on tire des valeurs de z et de z',

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C}{A}, \qquad \frac{dz'}{dx} = -\frac{C}{A},$$

valeurs finies et généralement différentes de zéro.

Nous choisirons pour variable indépendante l'ordonnée perpendiculaire au grand axe dont la direction passe par les points d'intersection, des deux circonférences décrites autour des foyers comme centres, respectivement avec les rayons z et z'.

3. Dans cette hypothèse, les équations (3), (4), (5), (6), deviendront :

$$\frac{dI}{dy} = -\frac{da}{z^3}\frac{dz}{dy} - \frac{db}{z'^3}\frac{dz'}{dy} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz'}{dy} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{dz}{dy}\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{dz'}{dy}\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0; \qquad (10)$$

en raison de la symétrie des formules par rapport à z et z', nous examinerons seulement les deux hypothèses :

$$\frac{dz}{dy} = 0, \qquad \frac{dz}{dy} = \infty,$$

l'expression de z en x et y étant

$$z = \sqrt{y^2 + (C + x)^2},$$

il en résulte

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y + (x + C)\dfrac{dx}{dy}}{z},$$

l'équation de l'ellipse donne :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{A^2 y}{B^2 x}.$$

Éliminons $\frac{dx}{dy}$ entre les deux équations précédentes, l'équation finale sera :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-Cy(A^2 + Cx)}{B^2 xz},$$

si donc on pose $\frac{dz}{dy} = 0$, les seules valeurs des coordonnées qui puissent convenir au problème, seront $y = 0$, d'où $x = \mp A$, l'hypothèse $\frac{dz}{dy} = \infty$, donnera $x = 0$, $y = \pm B$.

4 Les quatre points qui répondent à ces couples de coordonnées, sont les quatre sommets de la courbe ; mais il reste à examiner si, en ces points, l'intensité de la lumière est bien un maximum ou un minimum, et comme on peut le pressentir, la discussion dépendra principalement de la condition restrictive trouvée plus haut, savoir :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \not< \frac{A+C}{A-C} \quad \text{ou encore} \quad 2C > \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A\,;$$

cherchons d'abord pour le cas où $\frac{dz}{dy} = 0$, la valeur correspondante et le signe de la seconde dérivée $\frac{d^2 I}{dy^2}$ pour $y = 0$, $x = \pm A$, ou plutôt pour $z = A \mp C$, $z' = A \pm C$, les signes supérieurs se correspondant ainsi que les signes inférieurs. Des deux formules

$$\frac{dI}{dy} = \frac{dz}{dy}\left(-\frac{2a}{z^3} + \frac{2b}{z'^3}\right),$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz'}{dy} = 0,$$

on déduit

$$\frac{d^2 I}{dy^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}\left(-\frac{2a}{z^3} + \frac{2b}{z'^3}\right) + \frac{dz^2}{dy^2}\left(\frac{6a}{z^4} + \frac{6b}{z'^4}\right),$$

et de l'expression de $\frac{dz}{dy}$, savoir :

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-Cy\,(Cx+A^2)}{B^2xz},$$

on peut aussi conclure :

$$\frac{d^2z}{dy^2}=$$

$$=\frac{-B^2xz\left(C^2x+A^2C+C^2y\frac{dx}{dy}\right)+Cy(Cx+A^2)\left(B^2x\frac{dz}{dy}+B^2z\frac{dx}{dy}\right)}{B^4x^2z^2}$$

Introduisons maintenant dans les expressions de $\frac{d^2I}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, les hypothèses particulières :

$$y=0,\ x=\mp A,\ \frac{dz}{dy}=0,\ \frac{dx}{dy}=0,\ z=A\mp C,\ z'=A\pm C,$$

$\frac{d^2z}{dy^2}$, se réduira à la quantité

$$\frac{-C\,(A^2\mp AC)}{\mp B^2\,(A\mp C)\,A}=\pm\frac{C}{B^2},$$

le signe supérieur répondant à l'extrémité gauche du grand axe, et le signe inférieur à l'autre extrémité, ce qui fait voir que $\frac{d^2z}{dy^2}$, est positif pour le premier sommet, et négatif pour le second.

Pour en conclure l'ordre des signes de $\frac{d^2I}{dy^2}$, remarquons auparavant que la partie $\frac{dz^2}{dy^2}\left(\frac{6a}{z^4}+\frac{6b}{z'^4}\right)$, disparaîtra toujours, il reste donc à déterminer les signes que prend le facteur

$$-\frac{a}{z^3}+\frac{b}{z'^3},$$

dans l'une et l'autre hypothèse.

Dans la première $z=A-C$, $z'=A+C$, le signe du facteur sera négatif, donc aussi $\frac{d^2I}{dy^2}$, prendra le signe moins, sa vâleur numérique correspondante sera finie, et différente de zéro, à moins que l'ellipse ne dégénère en une circonférence; donc au sommet gauche du grand axe, l'intensité de la lumière est un maximum.

Dans la seconde hypothèse, le signe du facteur $\frac{-a}{(A+C)^3}+\frac{b}{(A-C)^3}$, change selon les valeurs numériques de (a) (b) C,A. Ainsi, l'extrémité droite du grand axe, satisfait tantôt à la condition du maximum, tantôt à celle du minimum. Si $C=0$, le signe du facteur sera négatif, mais comme $\frac{d^2z}{dy^2}$ se réduira à zéro, $\frac{d^2I}{dy^2}$ deviendra aussi nulle. Dans ce cas, on voit à priori, que tous les points de la circonférence satisfont à la fois à la condition du maximum et du minimum, et toutes les dérivées successives de I, par rapport à y se réduisant à zéro pour $C=0$, le calcul ne pourrait lever l'ambiguïté qui est évidemment inhérente à la question.

5. Il y aura maximum d'intensité à l'extrémité droite du grand axe, lorsque l'inégalité

$$-\frac{a}{(A+C)^3}+\frac{b}{(A-C)^3}>0 \text{ ou } 2C>\frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-2A$$

sera vérifiée;

mais on en tire : $\frac{a}{b}>\frac{(A+C)^3}{(A-C)^3}$, et par suite, le rapport $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ déterminé lors de la première solution, sera inférieur à $\frac{A+C}{A-C}$.

Ce qui fait voir que dans ce cas, l'intensité de la lumière est un maximum a l'extrémité droite du grand axe, et un minimum aux points déjà déterminés sur le périmètre de l'ellipse.

On s'explique aisément, comment ces deux derniers cas se trouvent liés entre eux, car puisque la courbe est continue, et que le rayonnement de la lumière a lieu également dans tous les sens, autour de chacune des deux lumières, entre deux maxima d'intensité consécutifs inégaux, doit exister un minimum.

6. Mais voici encore une autre manière plus naturelle de s'assurer, que dans le cas dont nous nous occupons, les points situés hors de l'axe et sur le périmètre de l'ellipse, reçoivent moins de lumière que chacun des deux sommets du grand axe.

Les valeurs de z et de z', savoir :

$$z = \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}, \quad z' = \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

sont ainsi que l'intensité correspondante I, indépendantes, de l'excentricité 2C ; de plus, le sommet le moins éclairé du grand axe, reçoit une quantité de lumière variable avec cette excentricité, et qui a pour expression :

$$\frac{a}{(A+C)^2} + \frac{b}{(A-C)^2},$$

ou plutôt

$$\frac{a}{v^2} + \frac{b}{(2A-v)^2},$$

en faisant $A + C = v$ d'où $A - C = 2A - v$.

D'un autre côté, v et $2A - v$, sont d'après la nature du problème, enfermées entre les limites 0, $2A$.

Ainsi, en se reportant à la discussion du problème traité par M. Gerono pour le cas d'une ligne droite de longueur $2A$, dont les extrémités sont occupées par deux lumières d'intensités (a) et (b), (voir le n° cité des *Annales*), on devra avoir l'inégalité

$$\frac{a}{(A+C)^2} + \frac{b}{(A-C)^2} > \frac{a}{\left(\dfrac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2} + \frac{b}{\left(\dfrac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2},$$

7. **On peut même, d'après la condition de l'existence des points extérieurs au grand axe, fixer pour v et $2A - v$ des limites correspondantes de variabilité.**

Cette condition est :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{A+C}{A-C} \quad \text{ou encore} \quad 2C > \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

ou en remplaçant $A+C$ par v et $A-C$ par $2A-v$,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{v}{2A-v},$$

d'où l'on tire :

$$v < \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}; \qquad 2A - v < \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}};$$

$$v < 2A, \qquad 2A - v > 0.$$

8. Il y aura au contraire minimum à l'extrémité droite du grand axe, lorsque l'inégalité

$$-\frac{a}{(A+C)^3} + \frac{b}{(A-C)^3} < 0, \quad \text{ou bien} \quad 2C < \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

sera satisfaite, c'est-à-dire toutes les fois que les points de minimum, extérieurs au grand axe, ne pourront pas exister.

Enfin dans le cas où l'on aurait précisément :

$$-\frac{a}{(A+C)^3} + \frac{b}{(A-C)^3} = 0 \quad \text{ou} \quad 2C = \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

$\frac{d^2I}{dy^2}$ se réduirait à zéro, et l'on ne pourrait plus conclure s'il y a ou s'il n'y a pas minimum en ce point.

Pour lever la difficulté autrement que par de nouvelles différentiations, observons qu'en raison de la symétrie de la courbe par rapport à son grand axe, le point dont il s'agit doit nécessairement être un point de maximum ou de minimum d'intensité. Or, si en ce point l'intensité était un maximum, il en résulterait, comme ci-dessus, l'existence de points de minimum hors de l'axe ; ce qui serait contre l'hypothèse, donc c'est le minimum qui doit avoir lieu.

9. Il reste encore à examiner l'hypothèse $\frac{dI}{dy} = \infty$ on plutôt $\frac{dz}{dy} = \infty$, en écartant pour le moment le cas où le facteur $\frac{a}{z'^3} - \frac{b}{z'^3}$ deviendrait nul en même temps. Or cette hypothèse rend aussi infinies toutes les dérivées successives de I par rapport à y; il faudra donc discuter directement la fonction I dans le voisinage des valeurs particulières de z et de z', qui rendent $\frac{dz}{dy}$ infini; ces valeurs étant toutes les deux égales à A, il s'ensuit que les points correspondants de l'ellipse sont les extrémités du petit axe.

Faisons dans I, $\quad z = A + h,\ z' = A - h,$
h désignant un accroissement réel positif ou négatif, aussi petit que l'on voudra, attribué au rayon vecteur z. Soit I_A la valeur de I, qui correspond à $z = A$, $z' = A$, et désignons par I' la valeur de I pour $z = A + h$, $z' = A - h$, nous aurons :

$$I' - I_A = \frac{a}{(A+h)^2} + \frac{b}{(A-h)^2} - \frac{a+b}{A^2}.$$

Développons en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes de h, et par la formule du binôme de Newton, les deux facteurs

$$\frac{1}{(A+h)^2}, \qquad \frac{1}{(A-h)^2},$$

les deux développements arrêtés aux termes en h^2 inclusivement, seront respectivement :

$$\frac{1}{A^2} - \frac{2h}{A^3} + \frac{3h^2}{A^4}, \qquad \frac{1}{A^2} + \frac{2h}{A^3} + \frac{3h^2}{A^4},$$

par conséquent

$$I' - I_A = \frac{2h(b-a)}{A^3} + \frac{3h^2(a+b)}{A^4} + \text{etc.}$$

Pour de très-petites valeurs de h, le second membre se reduit sensiblement à son premier terme, ou si l'on veut, on peut donner à h une valeur numérique positive ou négative, assez petite, pour que le signe du second membre soit le même que celui de son premier terme, et cela quelle que soit la valeur du coefficient de h. Il n'y a donc, ainsi qu'on devait s'y attendre, ni maximum, ni minimum d'intensité aux extrémités du petit axe, lorsque (a) diffère de (b), puisqu'alors $I' - I_A$ change de signe avec h pour des valeurs de h suffisamment petites en valeur numérique, et aussi pour toutes les valeurs encore plus faibles.

Au contraire si $a = b$, auquel cas l'expression de $I' - I_A$ devient :

$$I' - I_A = \frac{6ah^2}{A^4} + \text{etc.},$$

on voit bien que les extrémités du petit axe satisferont à la condition du minimum, puisque le signe du second membre demeure positif pour des valeurs suffisamment petites, positives ou négatives reelles de h, et pour toutes valeurs numériquement inférieures.

Il est vrai que les conditions $a = b$, $z = A$, $z' = A$, $\frac{dz}{dy} = \infty$ prises ensemble donnent $\frac{dI}{dy} = 0 \times \infty$.

Mais il est inutile de revenir sur les calculs précédents, puisque cette dernière discussion est directe. On voit aussi, que dans l'hypothèse de $a = b$, les points donnés par la première solution coïncident avec les extrémités du petit axe.

Enfin, lorsque (a) diffère de (b), et que l'excentricité $2C$ se réduit à zéro, les deux lumières sont réunies au centre; mais il est assez remarquable que, comme plus haut, première solution

$$\frac{z'}{z}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$
$$z+z'=2A.$$

celle que l'on recherche le plus ordinairement dans les problèmes de ce genre, en posant $dI=0$, ne satisfait pas du tout au problème, puisque dans le cercle le rapport $\frac{z}{c'}$ est égal à l'unité; nouvelle preuve de la nécessité de vérifier si les solutions données par l'algèbre, dans la résolution analytique des problèmes, conviennent aux questions proposées, dont les énoncés peuvent renfermer des restrictions (*).

10. Il y a bien des manières de généraliser le problème des lumières; par exemple, en faisant tourner l'ellipse autour de son grand axe, de manière à lui faire décrire une révolution complète, les points de minimum seront tous situés sur une parallèle de la surface, qui pourra se réduire à un point situé à l'extrémité la moins éclairée du grand axe. Si le centre de l'ellipse était occupé en même temps par une troisième lumière d'intensité (c), et sous les conditions spécifiées dans l'énoncé du problème général que nous venons de discuter, l'expression générale de I en z et z', serait rationnelle et ainsi composée :

$$I=\frac{a}{z^2}+\frac{b}{z'^2}+\frac{2c}{z^2+z'^2-2C^2},$$

comme cela résulte de la théorie des triangles, et les rayons vecteurs z et z' dépendraient de l'excentricité. Au surplus, dans le problème précédent, la position des points extérieurs au grand axe pour lesquels l'intensité de la lumière est un minimum, dépend implicitement de l'excentricité.

Enfin, dans le cas où la série des centres lumineux donnerait lieu à une courbe plane brillante, le problème dépendrait évidemment de différentiations par rapport à des paramètres

(*) Un point attiré vers deux centres fixes présente une semblable restriction, voir Legendre, Fonct. elliptiques, I. § 384.

renfermés sous un signe d'intégration définie, relatif à la courbe rayonnante.

§ 2^e.

Déterminer les positions d'équilibre d'une ellipse donnée de grandeur, que l'on considère comme une ligne matérielle, inflexible, uniformément pesante, et qui peut glisser sans frottement sur les côtés d'un angle droit fixe dont le plan est vertical, l'ellipse étant constamment appliquée sur le plan de l'angle.

1. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre stable ou instantané sont, comme on sait, que la direction de la verticale menée par le centre de gravité ou de figure de l'ellipse passe par le point de rencontre des deux normales aux points de contact, et que le poids de l'ellipse décomposé suivant les directions des deux normales fournisse deux composantes qui tendent à presser l'ellipse contre les côtés de l'angle. Il résulte tout d'abord, de cette dernière condition, que l'angle donné doit être entièrement situé au-dessus de l'horizontale menée dans son plan par son sommet.

La ligne droite qui réunit les points de contact, est traversée en son milieu par celle qui joint le sommet de l'angle au centre de l'ellipse. Cette dernière ligne est donc une diagonale du rectangle construit sur les normales, et dont un sommet coïncide avec le sommet de l'angle donné; on sait aussi que le centre de l'ellipse inscrite dans l'angle, doit être situé sur la circonférence de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, décrite du sommet de l'angle comme centre; donc, en général, cette diagonale du rectangle doit être verticale. Dès lors, il est facile de placer l'ellipse donnée dans les deux positions d'équilibre qu'elle peut prendre.

Supposons maintenant qu'on imprime à l'angle, dans son plan et autour de son sommet, un mouvement de rotation constamment dirigé dans le même sens; l'un des côtés se rapprochera de la verticale menée par le sommet de l'angle, et si on arrête le mouvement lorsque le sinus de l'angle, compris entre ces deux lignes, sera devenu inférieur à $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, l'ellipse ne pourra plus être placée en équilibre dans l'angle donné.

2. La difficulté tient encore à l'omission de solutions particulières ; le problème comporte en général quatre solutions, car l'ellipse peut être naturellement placée en équilibre dans deux positions telles que les contacts aient lieu à ses sommets. Dans ces deux positions, la verticale du centre de gravité ne passe pas constamment par le sommet de l'angle pendant sa rotation, en sorte que l'équilibre absolu ou relatif (*) peut subsister tant que l'angle demeure entièrement situé au-dessus de l'horizontale menée dans son plan par son sommet.

3. La théorie du plan incliné présente une autre singularité qui peut au premier abord embarrasser les élèves. Lorsqu'un prisme droit rigide pesant et homogène, s'appuie par sa base sur un plan incliné, quelle que soit l'inclinaison du plan, quelle que soit aussi la longueur des arêtes longitudinales, il ne peut jamais chavirer, lors même que la verticale abaissée du centre de gravité du solide tomberait en dehors de sa base.

Si habituellement le prisme se renverse, pour une certaine inclinaison du plan ou pour une certaine longueur des arêtes qui lui sont perpendiculaires, cela tient uniquement, si le système est dans le vide, à l'effet du frottement de la base du prisme sur le plan, frottement dont la direction ne peut jamais passer par le centre de gravité, et dont on fait abstraction dans la statique des corps rigides.

(*) A cause de l'action de la force centrifuge, il serait mieux de supprimer le mot *relatif*, et d'ajouter au mot *positions* l'épithète *fixes*. Q.