NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAURENT

Note sur les équations d'équilibre entre des forces quelconques, appliquées aux différents points d'un corps solide libre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 9-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__9_0>

NOTE

sur les équations d'équilibre entre des forces quelconques, appliquées aux différents points d'un corps solide libre.

PAR M. LAURENT,
ancien élève de l'École normale.

—

Soient $P, P', P'', \ldots$ les forces appliquées, et sous l'influence desquelles le corps est supposé en équilibre; représentons par (xyz), $(x'y'z')$, $(x''y''z'')\ldots$ les coordonnées de leurs points d'application respectifs, et par $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')\ldots$ les angles de leurs directions avec des parallèles aux axes rectangulaires des X, des Y et des Z.

Considérons la force P, et désignons par u, v, w les coordonnées courantes de la droite, suivant laquelle elle agit, on aura pour les équations de sa direction :

$$\frac{u-x}{\cos\alpha} = \frac{v-y}{\cos\beta} = \frac{w-z}{\cos\gamma}.$$

Prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre avec le plan XY, et les coordonnées du point d'intersection données par les équations précédentes sont

$$u = x - z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad v = y - z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad w = 0.$$

Supposons la force P transportée à ce point de sa direction et décomposons-la en trois suivant des parallèles aux axes des X, des Y et des Z ; ces composantes seront respectivement

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma :$$

laissons la force $P\cos\gamma$, perpendiculaire au plan XY, appliquée en ce point; la résultante des deux autres forces $P\cos\alpha$ et $P\cos\beta$ comprises dans ce plan, est dirigée suivant la droite

$$\frac{u-x}{\cos\alpha}=\frac{v-y}{\cos\beta},$$

laquelle prolongée jusqu'à l'axe des X, vient le couper au point

$$u=x-y\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Supposons encore cette résultante transportée en ce point, et décomposons-la en deux autres, égales aux précédentes : $P\cos\alpha$ dirigée suivant l'axe des X, et $P\cos\beta$ perpendiculaire au même axe.

D'après ce qui précède, la force P se trouve remplacée par trois autres, savoir : $P\cos\alpha$ dirigée suivant l'axe des X; $P\cos\beta$ située dans le plan XY perpendiculaire à l'axe des X, et appliquée au point $u=x-y\,\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; enfin $P\cos\gamma$ perpendiculaire au plan XY, appliquée au point dont les coordonnées sont

$$u=x-z\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\qquad v=y-z\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

La force P' pourrait également être remplacée par trois autres analogues appliquées aux deux points que l'on détermine de la même manière, et qu'il suffit de distinguer des précédents par l'accentuation Et ainsi des autres.

De sorte que le système des forces données se trouve transformé en trois groupes de forces : 1° des forces dirigées suivant l'axe des X; 2° un ensemble de forces parallèles, comprises dans le plan XY et perpendiculaire à l'axe des X; 3° enfin des forces perpendiculaires au plan XY.

Mais pour que l'équilibre puisse subsister, il faut qu'il y ait équilibre dans chacun de ces groupes séparément, sans quoi, en fixant dans le plan XY une droite arbitraire, les forces perpendiculaires à ce plan romperaient l'équilibre, si elles ne se détruisaient mutuellement; de même, si on fixe un point de l'axe des X, les forces perpendiculaires à cet axe doivent se faire équilibre pour ne pas faire mouvoir le corps dans leur plan autour du point fixe.

Or, pour qu'il y ait équilibre entre les forces dirigées suivant l'axe des X, la seule condition est que :

$$(1) \qquad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0;$$

pour l'équilibre des forces perpendiculaires à l'axe des X, il faut d'après les conditions d'équilibre entre des forces parallèles comprises dans un même plan :

$$(2) \qquad P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0,$$

et

$$P\cos\beta\left(x - y\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) + P'\cos\beta'\left(x' - y'\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right) + \ldots = 0;$$

cette dernière se transforme facilement en

$$(3) \quad P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = 0.$$

Enfin pour l'équilibre des forces parallèles perpendiculaires au plan XY, il faut les trois conditions suivantes :

$$(4) \qquad P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0,$$

$$P\cos\gamma\left(x - z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) + P'\cos\gamma'\left(x' - z'\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}\right) + \ldots = 0,$$

$$P\cos\gamma\left(y - z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) + P'\cos\gamma'\left(y' - z'\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}\right) + \ldots = 0;$$

ces deux dernières se réduisent à

$$(5) \quad P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \ldots = 0,$$

$$(6) \quad P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots = 0.$$

Telles sont les six équations générales d'équilibre d'un système de forces quelconques; et si l'on représente respectivement par X, Y, Z, les premiers membres des équations (1), (2), (4) et par L, M, N, ceux des équations (3), (5) et (6), ces équations deviendront :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Généralisation des formules précédentes.

Il nous reste maintenant à démontrer que les formules trouvées précédemment pour conditions d'équilibre sont générales, qu'elles conviennent à toutes les directions des forces, et qu'il suffit d'y substituer pour $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$,... les valeurs qui conviennent à la direction de chacune.

Examinons un seul cas, qui comprend tous ceux pour lesquels la décomposition précédente pourrait offrir quelque difficulte, celui où l'une des forces P_i par exemple, serait parallèle à l'axe des X.

Soit $x_i y_i z_i$, les coordonnées de son point d'application, on aura pour équations de sa direction :

$$v = y_i, \qquad w = z_i ;$$

au même point, appliquons deux forces m et $-m$ égales directement opposées et perpendiculaires au plan XY, puis prolongeons la direction de $-m$ jusqu'au plan XY au point dont les coordonnées sont $u = x_i$, $v = y_i$, cette force fera partie de celles perpendiculaires au plan XY. La résultante des deux forces m et P sera dirigée suivant la droite

$$\frac{u - u_i}{P_i} = \frac{w - z^i}{m}, \quad v = y_i,$$

et cette résultante ira rencontrer le plan XY au point

$$u = x_i - z_i \frac{P_i}{m}, \quad v = y_i,$$

auquel on pourra la supposer appliquée. Ici décomposons-la avec ses deux éléments P_i et m, la première parallèle à l'axe des X, et la seconde fera partie, comme $-m$, du groupe perpendiculaire au plan XY.

Or dans les conditions d'équilibre de ces forces parallèles, l'équation $Z = 0$ contiendra $m - m$, qui est identiquement nul.

L'équation $M = 0$ renfermera le groupe

$-mx_i + m\left(x_i - z_i \frac{P_i}{m}\right)$, qui se réduit à $-P_i z_i$.

Enfin l'équation $N=0$, aura les deux termes $my_i - my_i$ qui se détruisent immédiatement. De sorte que ces trois equations se composent avec la force P_i précisément comme si dans les équations générales, on avait fait $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 90°$ et $\gamma = 90°$ savoir :

$$
\begin{aligned}
P_i \cos\gamma_i &= 0 && \text{dans} \quad Z = 0, \\
P_i (x_i \cos\gamma_i - z_i \cos\alpha_i) &= -P_i z_i && \text{dans} \quad M = 0, \\
P_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i) &= 0 && \text{dans} \quad N = 0.
\end{aligned}
$$

Occupons-nous maintenant de la force P_i comprise dans le plan XY, et parallèle à l'axe des X. On a pour équation de sa direction $v = y_i$.

Au point $u = x_i$ de la droite suivant laquelle elle agit, appliquons deux forces u et $-u$ égales, directement opposées et perpendiculaires à l'axe des X; prolongeons $-u$ jusqu'à cet axe, et là elle fera partie du groupe des forces parallèles qui lui sont perpendiculaires.

La résultante des deux forces P_i et n sera dirigée suivant la droite

$$\frac{u - x_i}{P_i} = \frac{v - y_i}{n},$$

et rencontrera l'axe des X au point $u = x_i - y_i \frac{P_i}{n}$, et si on la décompose en ses deux éléments P_i et n, la première sera dirigée suivant l'axe des X, la seconde sera perpendiculaire au même axe.

Or, dans les conditions d'équilibre des forces parallèles comprises dans le plan XY, on introduira les termes $n - n$ qui se détruisent dans $Y = 0$.

Dans l'équation $L = 0$, on aura les termes

$-nx_i + n\left(x_i - y_i \frac{P_i}{n}\right)$ qui se réduisent à $-P_i y_i$, auquel on parvient précisément, quand dans l'équation générale $L = 0$ on fait $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 90°$, pour le terme

$$P_i\,(x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i).$$

Enfin le terme P_i qui se présente dans $X = 0$, correspond encore à celui $P_i \cos\alpha_i$ dans lequel on suppose que $\alpha_i = 0$.

Donc dans les équations trouvées, il suffira d'introduire chaque force avec sa direction quelle qu'elle soit.