

C. DROUETS

**Solutions de problèmes, sur l'ellipse,
le triangle et le tétraèdre, proposés
par M. Brassine**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 193-198

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE PROBLÈMES,

Sur l'ellipse, le triangle et le tétraèdre, proposés par M. Bras-
sine (IV, p. 139),

PAR M. C. DROUETS,

élève du collège royal militaire de La Flèche.

1. Si on joint successivement les deux foyers F, F' d'une ellipse à deux points conjugués m', m'' , on aura deux triangles; et il est aisé de trouver que la somme des carrés de leurs aires est constante. Si on évalue les tangentes des demi-angles $Fm'F', Fm''F'$, on aura, en désignant ces angles par α et α' , $\text{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \text{tang}^2 \frac{\alpha'}{2} = \text{constante}$. Si on désigne par χ_1 et χ_2 les abscisses des points où les tangentes conjuguées vont couper le grand axe de l'ellipse, on aura la relation $\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} = \text{constante}$. Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a'b'$ l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes; $y = \delta x, y = \delta_1 x$ les équations de deux diamètres conjugués, on aura $\delta\delta_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ et on obtiendra pour les coordonnées des deux points conjugués :

$$m \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2\delta^2 + b^2}} \\ y_1 = \pm \frac{ab\delta}{\sqrt{a^2\delta^2 + b^2}} \end{array} \right. \quad m'' \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2\delta_1^2 + b^2}} \\ y_2 = \pm \frac{ab\delta_1}{\sqrt{a^2\delta_1^2 + b^2}} \end{array} \right.$$

Les triangles ont pour mesures c, y_1 et c, y_2 ; donc la somme de leurs carrés est $c^2 (y_1^2 + y_2^2)$. En substituant y_1 et y_2 et

réduisant, on trouve $2a^2\delta^2\delta_1^2 + b^2(\delta^2 + \delta_1^2)$ facteur commun aux deux termes de la fraction, et en le supprimant il vient b^2c^2 pour la constante cherchée.

Si au point m' on mène la normale, on sait qu'elle fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs Fm' et $F'm'$; donc, l'angle de cette normale avec un de ces deux rayons est donc la moitié de l'angle $Fm' F''$ ou α . Le coefficient angulaire de la normale est $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$, celui du rayon $m'F$ $\frac{y_1}{x_1 - c}$.

L'angle de ces deux droites étant $\frac{\alpha}{2}$, on a, toute réduction faite, $\text{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{cy_1}{b^2}$; donc, en élevant au carré $\text{tang}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{c^2y_1^2}{b^4}$, et alors la distinction du rayon sera inutile, car les valeurs ne diffèreraient que par le signe de c ; de même,

pour le second point m'' , on aura $\text{tang}^2 \frac{\alpha'}{2} = \frac{c^2y_2^2}{b^4}$. Donc, la

somme des carrés des tangentes est $\frac{c^2y_1^2 + c^2y_2^2}{b^4}$, le numérateur, d'après le problème précédent, est égal à b^2c^2 ; donc $\text{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \text{tang}^2 \frac{\alpha'}{2} = \frac{b^2c^2}{b^4} = \frac{c^2}{b^2}$.

La tangente au point x_1y_1 est $a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2$. Pour $y=0$ on aura $A = \frac{a^2}{x_1}$; de même pour la tangente conjuguée, c'est-à-dire celle qui est menée au point conjugué x_2y_2 , on aura $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$, donc la somme proposée $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^4}$.

Substituant x_2^2 et x_1^2 et réduisant, on trouve $a^2(\delta^2 + \delta_1^2) + 2b^2$ facteur commun; et en le supprimant il viendra :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{b}{a^2}$$

2. Pour les problèmes suivants proposés par M. Brassine,

je rappellerai que si dans un triangle ABC on mène une sécante AD et qu'on désigne par m et n des lignes ou des nombres proportionnels à BD et DC, on aura :

$$m\overline{AC}^2 + n\overline{AB}^2 = (m+n)\overline{AD}^2 + n\overline{BD}^2 + m\overline{DC}^2 \quad (\text{fig. } 23).$$

Cela posé, je vais chercher la valeur de la somme des carrés des distances d'un point quelconque m aux trois sommets d'un triangle ABC. Le point m pouvant ne pas être dans le plan du triangle.

Le théorème précédent appliqué aux deux triangles mAB , mIC , on aura :

$$\begin{aligned} \overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 &= 2\overline{AI}^2 + 2\overline{mI}^2 \quad (\text{fig. } 24). \\ \overline{mC}^2 + 2\overline{mI}^2 &= 3\overline{mG}^2 + 2\overline{GI}^2 + \overline{GC}^2. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre :

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 = 3\overline{mG}^2 + 2\overline{AI}^2 + 2\overline{GI}^2 + \overline{GC}^2.$$

Or, dans le triangle AGB on a $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{GI}^2$;

donc $\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 = 3\overline{mG}^2 + [\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{GC}^2]$.

Supposons maintenant que le point m soit le centre o du cercle circonscrit, alors le premier membre de cette dernière égalité sera $3R^2$. On aura :

$$D^2 = R^2 - \frac{\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2}{3}.$$

Exprimons actuellement $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$ en fonction des côtés a, b, c .

Dans le triangle ABC on a :

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\overline{CI}^2; \quad \text{or } \overline{CI} = \frac{3}{2} \overline{CG};$$

d'où $2a^2 + 2b^2 - c^2 = 9\overline{CG}^2$;

De même $2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9\overline{GB}^2$, $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 9\overline{CA}^2$.

Ajoutant membre à membre :

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 9\overline{AG}^2 + 9\overline{BG}^2 + 9\overline{CG}^2;$$

donc
$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

On a donc ainsi :
$$D^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Si m est le centre du cercle inscrit o ,

$$\Delta^2 = \overline{Go}^2 = \left[\frac{\overline{Ao}^2 + \overline{Bo}^2 + \overline{Co}^2}{3} \right] - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées du centre o' sur les côtés, on aura :

$$\overline{o'A}^2 = r^2 + \overline{AP}^2 = r^2 + (\overline{p-a})^2$$

$$\overline{o'B}^2 = r^2 + \overline{BQ}^2 = r^2 + (\overline{p-b})^2$$

$$\overline{o'C}^2 = r^2 + \overline{CR}^2 = r^2 + (\overline{p-c})^2$$

Donc
$$\Delta^2 = r^2 + \frac{(\overline{p-a})^2 + (\overline{p-b})^2 + (\overline{p-c})^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

Soit $SABC$ (*fig. 25*) un tétraèdre donné ; g le centre de gravité de ABC ; G le centre de gravité du tétraèdre ; m un point quelconque. Le point m par rapport à la base ABC , puis dans le triangle Smg , donne les deux égalités :

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 = 3\overline{mg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$\overline{mS}^2 + 3\overline{mg}^2 = 4\overline{mG}^2 + 3\overline{Gg}^2 + \overline{SG}^2.$$

Ajoutant membre à membre :

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 + \overline{mS}^2 = 4\overline{mG}^2 + \overline{SG}^2 + 3\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

or
$$3\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2.$$

donc

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 + \overline{mS}^2 = 4m\overline{G}^2 + (\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{SG}^2).$$

Soient l, l', l'', l''' les longueurs des droites menées d'un sommet au centre de gravité de la face opposée, on aura :

$$\overline{AG} = \frac{3}{4}l, \overline{BG} = \frac{3}{4}l', \overline{CG} = \frac{3}{4}l'', \overline{SG} = \frac{3}{4}l''';$$

donc

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 + \overline{mS}^2 = 4m\overline{G}^2 + \frac{9}{16}(l^2 + l'^2 + l''^2 + l'''^2).$$

Soient d, e, f les arêtes SA, SB, SC, on aura :

$$d^2 + e^2 + f^2 = 3\overline{Sg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Donc la somme des arêtes $\Sigma a^2 = 3Sg^2 + \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Or $Sg = 4Gg$, d'ailleurs : $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = 3\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$;

$$\begin{aligned} \overline{SG}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 &= 3\overline{Gg}^2 + 9\overline{Gg}^2 + \\ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &= 12\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma a^2}{16} &= 3\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}; \quad \frac{\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{Gg}^2}{4} = \\ &= 3\overline{Gg}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \end{aligned}$$

Donc, l'égalité supérieure deviendra :

$$mA^2 + mB^2 + mC^2 + mS^2 = 4m\overline{G}^2 + \frac{1}{4}\Sigma a^2.$$

Donc maintenant, si on suppose que m soit le centre de la sphère circonscrite, on aura :

$$\overline{mG}^2 = D^2 = R^2 - \frac{\Sigma a^2}{16}; \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Appelons G le centre de gravité d'un contour polygonal

de m côtés égaux ; par ce point, menons une droite quelconque et prenons sur cette droite deux points M et M' que nous joindrons aux sommets du polygone, on aura :

$$\Sigma D^2 - \Sigma D'^2 = m(\overline{MG}^2 - \overline{M'G}^2).$$

Soient A, B, C, \dots les sommets du polygone donné, $2a$ la valeur d'un côté : pour trouver le centre de gravité du contour, on prendra les milieux P, Q, R des côtés et le centre de gravité du système de ces points.

Or, dans le triangle mAB , on aura :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2a^2 + 2\overline{MP}^2;$$

dans le triangle suivant :

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2 + 2\overline{MQ}^2,$$

et ainsi de suite, ajoutant membre à membre, chaque distance étant répétée comme commune à deux triangles. On aura :

$$2\Sigma D^2 = 2ma^2 + 2\Sigma mP^2 \text{ ou } \Sigma D^2 = ma^2 + \Sigma mP^2.$$

Or il est démontré, page 230 de la Statique de Poinsot, que l'on a : $m \cdot \Sigma \overline{mP}^2 = \Sigma d^2 + m^2(\overline{MG}^2)$. En appelant Σd^2 la somme des carrés des distances mutuelles des points P, Q, R , etc.

$$\text{Donc } \Sigma D^2 = ma^2 + \frac{\Sigma d^2}{m} + m\overline{MG}^2.$$

Pour un autre point M' quelconque :

$$\Sigma D'^2 = ma^2 + \frac{\Sigma d^2}{m} + m\overline{M'G}^2,$$

car le nombre des côtés et les distances des sommets n'auront pas changé.

$$\text{Donc } \Sigma D^2 - \Sigma D'^2 = m(\overline{MG}^2 - \overline{M'G}^2).$$

On voit même qu'il n'est pas nécessaire que les trois points M, G, M' soient en ligne droite.