NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

VI.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE;

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME SIXIÈME.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V$^{\text{or}}$ DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1847.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOTE

Sur la génération des surfaces du second ordre par les lignes du second ordre.

PAR M. LENTHÉRIC NEVEU,
Professeur.

1. Soient trois axes rectangulaires ox, oy, oz et deux ellipses verticales ayant pour centre commun, l'origine des coordonnées.

La première située dans le plan des xz dont les équations sont :

$$\left.\begin{array}{c} c^2x^2+a^2z^2=a^2c^2 \\ y=0 \end{array}\right\} (1).$$

La deuxième située dans le plan des yz ayant un axe $2c$ commun avec la première et dont les équations sont :

$$\left.\begin{array}{c} c^2y^2+b^2z^2=b^2c^2 \\ x=0 \end{array}\right\} (2).$$

Un plan horizontal $z=h$ coupera généralement les ellipses en quatre points, savoir : l'ellipse (1) en deux points déterminés par

$y=0$, $z=h$ et $c^2x^2+a^2h^2=a^2c^2$, d'où $x=\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$, et l'ellipse (2) en deux autres points déterminés par

$x=0$, $z=h$ et $c^2y^2+b^2h^2=b^2c^2$, d'où $y=\pm\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$.

Imaginons dans le plan horizontal $z=h$, une troisième ellipse dont ces quatre points seraient les sommets, Elle aura pour équations :

$$\frac{a^2(c^2-h^2)}{c^2}y^2+\frac{b^2(c^2-h^2)}{c^2}x^2=\frac{a^2b^2(c^2-h^2)^2}{c^4}$$
$$z=h,$$

ou plus simplement en supprimant le facteur $\frac{c^2-h^2}{c^2}$ et chassant le dénominateur :

$$\left.\begin{array}{c} a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2(c^2-h^2) \\ z=h \end{array}\right\} (3).$$

En faisant varier h depuis $-c$ jusqu'à $+c$ l'ellipse (3) se mouvra d'une manière continue parallèlement au plan des x, pendant que ses quatre sommets décriront les deux ellipses verticales (1) et (2). Elle engendrera ainsi une surface dont l'équation résultera de l'élimination de h entre les deux équations (3) et s'obtiendra évidemment en substituant z en place de h dans la première de ces équations. L'équation de cette surface sera donc :

$$a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2(c^2-z^2),$$

ou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; équation de l'ellipsoïde.

2. En remplaçant les ellipses (1) et (2) par deux hyperboles dont l'axe commun $2c$ deviendrait l'axe non transverse, c'est-à-dire en chageant c^2 en $-c^2$ dans les équations (1) (2), les équations (3) seraient remplacées par :

$$a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2(c^2+h^2),$$
$$z=h,$$

et représenteraient encore une ellipse qui en faisant varier h resterait toujours horizontale, et dont les sommets décriraient les deux hyperboles verticales. L'équation de la surface engendrée s'obtiendrait en remplaçant h par z dans la première des équations ci-dessus, ce qui donnerait :

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

ou bien $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, équation de l'hyperboloïde à une nappe.

3. En changeant dans (1) a^2 en $-a^2$ et dans (2) b^2 en $-b^2$ les deux ellipses seraient remplacées par deux hyperboles ayant l'axe commun $2c$ pour axe transverse. Les équations (3) deviendraient :

$$a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2(h^2-c^2),$$
$$z=h,$$

et représenteraient encore une ellipse qui ne serait imaginaire que pour des valeurs de h comprises entre $-c$ et $+c$. L'équation de la surface engendrée serait :

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=-a^2b^2c^2,$$

ou bien $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, équation de l'hyperboloïde à deux nappes.

4. En remplaçant les ellipses (1) et (2) par deux paraboles verticales :

$$x^2=2pz,\ y=0 \quad \text{et} \quad y^2=2qz,\ x=0;$$

le plan $z=h$ donnera quatre points d'intersection qui seront les sommets d'une ellipse variable ayant pour équations :

$$qx^2+py^2=2pqh,$$

et

$$z=h.$$

L'ellipse ne sera imaginaire que pour des valeurs négatives de h, et l'on aura pour équation de la surface engendrée :

$$qx^2+py^2-2pqz=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

équation du paraboloïde elliptique.

En changeant le signe de q, c'est-à-dire en supposant que la seconde parabole tourne la concavité en sens contraire, l'équation de la surface engendrée serait $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ équation connue du paraboloïde hyperbolique.

Note. C'est ainsi que les surfaces du second ordre sont construites dans le *Manuel de géométrie* (p. 360).

Tm.

NOTE SUR LES ANNUITÉS (*).

PAR M. G. H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au collége royal de Saint-Louis.

—

En résolvant pour n la formule ordinaire des annuités $(a-Cr)(1+r)^n=a$ (1), on trouve $n=\dfrac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)}$.
Si la division se fait exactement, on a le nombre d'années cherchées; mais s'il y a un reste, que signifie-t-il? Car il est clair qu'on ne saurait prendre un nombre fractionnaire pour la valeur de n, la formule (1) étant construite dans l'hypothèse de n entier.

Pour lever la difficulté, cherchons la formule des annuités

(*) Voir Choquet, t. I, p. 78. Tm.

pour un nombre n d'années et k de mois. En conservant la même notation et en raisonnant comme pour la formule (1), on a :

$$C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{12}\right)=a(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{12}\right)+a(1+r)^{n-2}\left(1+\frac{kr}{12}\right)+\ldots$$
$$+a(1+r)\left(1+\frac{kr}{12}\right)+a\left(1+\frac{kr}{12}\right)+\frac{ka}{12};$$

d'où l'on tire :

$$(a-Cr)(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{12}\right)=a \qquad (2),$$

formule générale dont on obtient la formule (1) en faisant $k=0$.

On a maintenant la valeur de n

$$n=\frac{\log a-\log(a-Cr)-\log\left(1+\dfrac{kr}{12}\right)}{\log(1+r)}.$$

Comme n doit être entier et que $\log(1+r)>\log\left(1+\frac{kr}{12}\right)$, il faut que le reste R provenant de la division de $\log a-\log(a-Cr)$ par $\log(1+r)$ soit égal à $\log\left(1+\frac{kr}{12}\right)$, c'est-à-dire qu'on ait $R=\log\left(1+\frac{kr}{12}\right)$.

Ainsi, voilà la signification du reste lorsqu'en cherchant n par la formule (1), la division ne donne pas un quotient entier.

Alors, pour avoir le nombre de mois k, on détermine le nombre N qui a R pour logarithme, et il vient :

$$1+\frac{kr}{12}=N, \text{ d'où } k=\frac{(N-1)12}{r}.$$

Quand le reste R est nul, on a $\log\left(1+\frac{kr}{12}\right)=0$, d'où $k=0$.

J'ai employé, suivant l'usage, la progression géométrique pour trouver la formule des annuités, mais on sait qu'il y a un moyen plus simple de l'obtenir. Je demande la permission de le rapporter ici.

Une annuité est une rente payée pendant n années; son capital peut être considéré comme la différence des capitaux de deux rentes perpétuelles dont la première commence aujourd'hui et la seconde après n années seulement. Or, en appelant r les intérêts d'un franc, le capital de la rente perpétuelle a qui commence aujourd'hui est représenté par $\frac{a}{r}$; celui de la rente perpétuelle a qui commence après n années seulement est $\frac{a}{r(1+r)^n}$; donc le capital C de l'annuité a sera :

$$C=\frac{a}{r}-\frac{a}{r(1+r)^n} \text{ ou bien } (a-Cr)(1+r)^n=a.$$

Ce qui est bien la formule (1). On trouvera de même la formule (2) (*).

PROBLÈME 134 (t. V, p. 671).

La surface d'un cylindre oblique à base circulaire, est équivalente à celle d'un rectangle, dont un côté serait le diamètre du cercle, et l'autre côté la circonférence d'une ellipse ayant pour axes la hauteur et l'arête du cylindre.

(BRINKLEY).

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

Fig. 3. Faisons passer par l'axe du cylindre un plan OoKM

(*) Voir Huet, t. V, p. 346. Tm.

perpendiculaire à celui de sa base. Soit Oo' l'axe $= a$; soit h la hauteur, considérons un élément du cylindre compris entre deux arêtes $m\mu$, $m'\mu'$.

Son aire sera :

$$mm' \times m\mu \sin \mu mm'$$

$$mm' = ds;\quad m\mu = a,$$

donc l'aire du parallélogramme élémentaire est

$$ads \times \sin \mu mm'.$$

Menons la droite mR tangente au cercle, elle est la trace du plan tangent sur le plan de la base. Menons mL parallèle à OM; nous aurons un trièdre dont les trois arêtes sont $m\mu$, mL, mR rectangle en mL; et en supposant une sphère décrite de m comme centre, on obtient un triangle sphérique dans lequel

$$\cos \mu mm' = \cos \mu m\mathrm{L} \times \cos \mathrm{L}m\mathrm{R};$$

or

$$\sin \mu m\mathrm{L} = \frac{h}{a},\quad \cos \mathrm{L}m\mathrm{R} = \frac{dx}{ds};$$

par conséquent l'aire du parallélogramme élémentaire a pour expression :

$$ads\sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}} = \sqrt{a^2 ds^2 - (a^2 - h^2) dx^2};$$

mais dans le cercle de base $ds = \dfrac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Par conséquent cette expression devient :

$$dx\sqrt{\frac{a^2 r^2}{r^2 - x^2} - (a^2 - h^2)} = dx\sqrt{\frac{r^2 h^2 + (a^2 - h^2) x^2}{r^2 - x^2}};$$

posons $x = r \sin\varphi$, d'où $dx = r\cos\varphi$, et elle devient :

$$rd\varphi \cos\varphi \sqrt{\frac{r^2 h^2 + (a^2 - h^2) r^2 \sin^2\varphi}{r^2 \cos^2\varphi}} =$$

$$= rd\varphi\sqrt{h^2 + (a^2 - h^2)\sin^2\varphi}.$$

Si on intègre cette expression depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$ et qu'on double l'intégrale, on aura l'aire cherchée

$$A = 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{h^2 + (a^2 - h^2)\sin^2\varphi} =$$

$$= 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - h^2)\cos^2\varphi}.$$

Or l'intégrale représente précisément le périmètre d'une ellipse dont les axes seraient a et h : donc le théorème est démontré.

Note. On a la proportion $\frac{h}{a} = \frac{2r\sin\alpha}{2r}$; donc l'ellipse qui a pour axes h et a, est semblable à l'ellipse qui a pour axes $2r\sin\alpha$ et $2r$, à l'ellipse *arc droit;* leurs périmètres sont donc dans le rapport de $2r : a$; donc le théorème est démontré. Tm.

On peut arriver au même résultat, de la manière suivante :

Considérons, *fig.* 4, toujours le plan qui passe par l'axe du cylindre, et est perpendiculaire au plan de la base.

Par les points B et B′, menons deux plans perpendiculaires à l'axe ; ils couperont, l'un le cylindre, et l'autre le prolongement du cylindre, suivant deux ellipses égales et parallèles ; et il est aisé de voir que la figure ABC a la même surface que la figure A′B′C′ ; donc le cylindre de BC et de hauteur BB′, a la même surface que le cylindre proposé ; or ce dernier cylindre a pour mesure

Périm. BC × BB′ ;

donc aussi le cylindre proposé a la même mesure.

Ainsi l'aire est égale à celle d'un rectangle, qui aurait pour hauteur la génératrice a du cylindre, et pour base le périmètre d'une ellipse, dont les axes sont :

$$2r \quad \text{et} \quad 2r \sin\alpha.$$

L'équation de cette ellipse est $y^2 \sin^2\alpha + x^2 = r^2 \sin^2\alpha$; donc

$$ds = \frac{dx}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{r^2 \sin^4\alpha + x^2 \cos^2\alpha}{r^2 \sin^2\alpha - x^2}};$$

posons : $\qquad x = r \sin\alpha \sin\varphi,$

et

$$ds = r d\varphi \sqrt{1 - \cos^2\alpha . \cos^2\varphi} = r d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2\varphi}.$$

Le périmètre total sera donné par l'intégrale

$$4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2\varphi};$$

et la surface du cylindre a pour expression :

$$S = 4ar \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2\varphi} =$$

$$= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - h^2) \cos^2\varphi},$$

expression identique à celle que l'on a trouvée ci-dessus, et dont on déduirait la même conséquence.

Dans le cas où la base du cylindre serait une ellipse, dont les axes seraient A et B, on aurait :

$$S = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{B^2 \sin^4\alpha - (B^2 \sin^2\alpha - A^4) \sin^2\varphi},$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{B^2 h^2 - (B^2 h^2 - A^2 a^2) \sin^2\varphi},$$

ou

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{A^2 a^2 - (A^2 a^2 - B^2 h^2) \cos^2\varphi};$$

formule qui redonnerait la précédente si on avait $A = b = r$.

On peut l'écrire :

$$S = 2A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - \left(a^2 - \frac{B^2}{a^2} h^2\right) \cos^2\varphi};$$

et l'ellipse hauteur du rectangle aurait pour axes a et $\frac{B}{A} h$. La hauteur de ce rectangle serait A.

SOLUTION

D'un problème d'algèbre sur les mélanges.

PAR M. ÉMILE COUPY,
Bachelier ès sciences et professeur de mathématiques à Orléans.

—

On a deux vases d'égale capacité prise pour unité ; le premier plein d'eau, et le second plein de vin, à $\frac{1}{n}$ près (c'est-à-dire que les $\frac{n-1}{n}$ seulement du deuxième vase sont pleins de vin, la $n^{ème}$ partie est vide). On remplit le deuxième vase avec de l'eau du premier, puis on remplit le premier avec le mélange du deuxième puis on remplit le deuxième avec le mélange du premier et ainsi de suite alternativement. On demande ce qu'il y aura d'eau et de vin dans chaque vase, après ν opérations?

Il est bien entendu que dans ce problème, comme dans tous ceux de ce genre, on fait abstraction des circonstances physiques. Ainsi on suppose qu'il ne se perd pas même une goutte de liquide à chaque opération, et que le volume du mélange est égal à la somme des volumes des liquides mélangés.

Il faut d'abord distinguer deux cas, selon que ν est pair ou impair. On voit en effet qu'après un nombre pair d'opérations, c'est le premier vase qui est tout plein, le deuxième n'est plein qu'à $\frac{1}{n}$ près. C'est l'inverse après un nombre impair d'opérations. Remarquons ensuite que la quantité d'eau contenue dans les deux vases est constante et égale à 1 (capacité commune des deux vases); et la quantité de vin contenue dans les deux vases, aussi constante et égale à $\frac{n-1}{n}=p$.

Cela posé, soit k_{2m}, ce que contient de vin le premier vase, après $2m$ opérations; ce nombre d'opérations étant pair, le premier vase est tout plein; donc il contient $(1-k_{2m})$ d'eau et le deuxième vase qui n'est plein, lui, qu'à $\frac{1}{n}$ près, renfermera alors : $(p-k_{2m})^{\text{vin}}$ et $k_{2m}{}^{\text{eau}}$, puisque la quantité totale de vin est p. et que celle d'eau est 1. Ce qui nous montre déjà qu'après un nombre *pair* d'opérations, il y aura toujours autant d'eau dans le deuxième vase que de vin dans le premier.

Passons à l'opération suivante, la $(2m+1)^{\text{ème}}$.

Le premier vase ne contiendra plus que k_{2m} de vin, diminué de ce qu'on verse dans le second vase, c'est-à-dire diminué de $\frac{1}{n}\,k_{2m}$; ce qui fait en résultat pk_{2m} : de même il ne contiendra plus que $p(1-k_{2m})$ eau, et quant au second vase, qui sera maintenant tout plein, il contiendra :

$$p-pk_{2m} \text{ de vin } = p(1-k_{2m}),$$

et en eau : $$1-p(1-k_{2m}) = \frac{1}{n} + pk_{2m}.$$

On voit par là qu'après un nombre *impair* d'opérations, il y aura toujours autant de vin dans le second vase que d'eau dans le premier, ce qui est l'inverse de tout à l'heure.

Enfin voyons ce qui arrive après l'opération suivante, la $(2m+2)^{ème}$.

Le premier vase, qui est tout plein alors, contient en vin : pk_{2m} qu'il avait d'abord, plus ce qu'on lui a ajouté du deuxième vase, c'est-à-dire $\frac{p}{n}(1-k_{2m})$, ce qui fait :

$$pk_{2m} + \frac{p}{n} - \frac{p}{n}k_{2m},$$

ou $$p\left[\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)k_{2m}\right] = p\left[\frac{1}{n} + pk_{2m}\right].$$

On trouverait de même, que la quantité d'eau de ce premier vase est actuellement : $p\left[1-pk_{2m}\right] + \frac{1}{n^2}$, et que les quantités d'eau et de vin du second vase sont respectivement :

$$p(1-k_{2m}) \text{ et } p\left[\frac{1}{n} + k_{2m}\right].$$

Du reste ces trois dernières expressions n'ont pas besoin d'être connues.

En résumé, nous avons :

quantité totale constante d'eau : $=1$.

———————— de vin : $=p$; $p<1$, car $p=\frac{n-1}{n}$.

Nombre d'opérations.	1er vase.	
	vin.	*eau.*
$2m$,	k_{2m}.	$1-k_{2m}$.
$2m+1$.	pk_{2m}.	$p(1-k_{2m})$.
$2m+2$.	$p\left[\frac{1}{n}+pk_{2m}\right]$.	$p\left(1-pk_{2m}\right)+\frac{1}{n^2}$.
	2e vase.	
$2m$.	$p-k_{2m}$.	k_{2m}.
$2m+1$.	$p(1-k_{2m})$.	$\frac{1}{n}+pk_{2m}$.
$2m+2$.	$p^2(1-k_{2m})$.	$p\left(\frac{1}{n}+pk_{2m}\right)$.

Et si, maintenant, nous faisons successivement :

$$m=0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous formerons les deux tableaux suivants, dont la loi est manifeste :

$$k_0=0. \qquad\qquad k_1=0.$$

$$k_2=\frac{p}{n}. \qquad\qquad k_3=\frac{p^2}{n}.$$

$$k_4=\frac{p+p^3}{n}. \qquad\qquad k_5=\frac{p^2+p^4}{n}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_{2r}=\frac{p+p^3+p^5+\ldots.+p^{2r-1}}{n}. \qquad k_{2r+1}=\frac{p^2+p^4+p^6+\ldots.+p^{2r}}{n}.$$

Le numérateur de k_{2r} est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante dont la raison est p^2. et ce numérateur pourra s'écrire :

$$\frac{p-p^{2r-1}.p^2}{1-p^2}=\frac{p(1-p^{2r})}{1-p^2}.$$

De sorte que : $k_{2r} = \dfrac{p(1-p^{2r})}{(1-p^2)n}$.

D'ailleurs : $\dfrac{n-1}{n} = p$, d'où $n = \dfrac{1}{1-p}$.

Donc : $n(1-p^2) = \dfrac{1-p^2}{1-p} = 1+p$.

Donc en définitive : $k_{2r} = \dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.

On trouvera de même : $k_{2r+1} = \dfrac{p^2(1-p^{2r})}{1+p}$.

Ce qui est évident *à priori*, puisque $k_{2r+1} = pk_{2r}$.

Maintenant qu'on a la quantité de vin du premier vase, il n'est pas difficile, d'après ce qui précède, d'avoir les trois autres résultats demandés, et on arrive aux formules suivantes :

	1er vase.		2e vase.	
	vin.	*eau.*	*vin.*	*eau.*
$2r$ opérations.	$\dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{1+p^{2r+1}}{1+p}$.	$\dfrac{p(p+p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.
$2r+1$ *id.*	$\dfrac{p^2(1-p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1+p^{2r+1})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1+p^{2r+1})}{1+p}$.	$\dfrac{1-p^{2r+2}}{1+p}$.

Comme p est <1, les puissances de p vont en décroissant ; et si nous supposons : $2r=\infty$, et $2r+1=\infty$; alors $p^{2r}\ldots\ldots=0$, et nous aurons ainsi les limites vers lesquelles convergent les quantités de vin et d'eau de chaque vase, à mesure qu'on fait un plus grand nombre *pair* ou *impair* d'opérations ; ces limites sont respectivement dans l'ordre des formules précédentes

$$\frac{p}{1+p}\text{ vin.}\quad \frac{1}{1+p}\text{ eau.}\quad \frac{p^2}{1+p}\text{ vin.}\quad \frac{p}{1+p}\text{ eau.}\quad \text{pour l'infini } \textit{pair}.$$

$$\text{et}\quad \frac{p^2}{1+p}\text{ vin.}\quad \frac{p}{1+p}\text{ eau.}\quad \frac{p}{1+p}\text{ vin.}\quad \frac{1}{1+p}\text{ eau.}\quad \text{pour l'infini } \textit{impair}.$$

On peut se proposer de trouver au bout de combien d'opérations, en nombre pair ou impair, l'un des liquides de l'un des vases est réduit à $\frac{1}{q}$. Cherchons par exemple, au bout de quel nombre *pair* $2x$ d'opérations, la quantité de vin du premier vase sera $\frac{1}{q}$. On a : $k_{2x}=\frac{1}{q}$.

C'est-à-dire : $$\frac{p(1-p^{2x})}{1+p}=\frac{1}{q};$$

d'où $$pq-p^{2x+1}q=1+p,$$

ou $$p^{2x+1}=\frac{pq-p-1}{q}=\frac{p(q-1)-1}{q};$$

d'où $$(2x+1.)\log p=\log(p(q-1)-1)-\log q;$$

donc enfin : $$x=\frac{\log[p(q-1)-1]-\log q-\log p}{2\log p}.$$

L'expression $p^{2x+1}=\frac{p(q-1)-1}{q}$ nous montre que q ne peut égaler 2; car alors $p(q-1)-1$ serait négatif puisque $p<1$. Il n'y aura donc *jamais* autant d'eau que de vin dans le premier vase, après un nombre pair d'opérations. Plus généralement, on voit que la question n'est possible qu'autant que $p(q-1)>1$,

ou $$q>\frac{1+p}{p}, \text{ ou enfin } \frac{1}{q}<\frac{p}{1+p}.$$

Ce qui était évident *à priori*, puisque $\frac{p}{1+p}$ est la limite vers laquelle tend la quantité de vin du premier vase à mesure qu'on fait un plus grand nombre pair d'opérations.

On peut reprendre le même calcul, pour un nombre *impair* $2y+1$ d'opérations, et on trouvera :

$$y=\frac{\log[p(pq-1)-1]-\log q-2\log p}{2\log p}.$$

Et pour la possibilité il faut :

$$\frac{1}{q}<\frac{1+p}{p}.$$

$\frac{1}{q}$ ne sera donc encore ici jamais $=\frac{1}{2}$, comme dans le cas précédent.

Les calculs ne seraient pas plus difficiles pour l'eau de chaque vase ou pour le vin du deuxième vase.

Application numérique. $p=\frac{4}{5}$; $2r=1000$. On trouvera : $k_{1000}=\frac{4}{9}$, à moins d'une unité décimale du 97ème

$\frac{4}{9}$ est la limite donnée par la formule $\frac{p}{1+p}$, et $\frac{16}{45}$ est la limite pour un nombre impair d'opérations, donnée par la formule $\frac{p^2}{1+p}$.

Enfin, on trouvera qu'il faut faire environ 4 opérations pour que la quantité de vin du premier vase soit :

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{\left(\frac{11}{3}\right)}<\frac{4}{9},$$

et qu'il en faut faire 5 environ pour que cette quantité soit :

$$\frac{17}{81}=\frac{1}{\left(\frac{81}{17}\right)}<\frac{16}{45}.$$

THÉORÈME SUR LE PENTAGONE.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polygone de m *côtés, soit circonscrit à une conique.*

PAR M. PAUL SERRET,
élève en mathématiques.

—

I.

Théorème sur le Pentagone.

Cinq droites situées dans un même plan, forment généralement cinq quadrilatères; dans chacun d'eux l'on construit la droite qui passe par les milieux des diagonales; et les cinq droites que l'on obtient ainsi, concourent au même point.

1. Ce théorème se déduit immédiatement, comme le remarque M. Terquem (IV, p. 545), du théorème de Newton, sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère, et de la considération d'un pentagone circonscrit, dans lequel on retranche successivement chaque côté, en prolongeant les deux adjacents. M. Terquem recommandant aux élèves de démontrer directement cette proposition, en voici une démonstration qui n'exige que peu de calculs, et dans laquelle on fait abstraction de toute conique auxiliaire.

2. Lemme. Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.

3. Démontrons d'abord la proposition pour trois des quadrilatères formés par les cinq droites, ces trois quadrila-

tères ayant tous leurs sommets sur les côtés d'un même angle.

Fig. 1. Soient OY et OX deux des cinq droites que nous prenons pour axes des coordonnées ; et soient AB, A_1B_1, A_2B_2 les trois autres droites qui forment dans l'angle YOX et ayant leurs sommets sur les côtés de cet angle, les trois quadrilatères AB_1, AB_2, A_1B_2 (en désignant chaque quadrilatère par le système des lettres de deux sommets opposés) ; soient a, a_1, a_2; b, b_1, b_2, les distances à l'origine des sommets des quadrilatères. Désignons en général, par Dab, la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère AB_1, et prenons les équations des trois droites Dab_1, Dab_2, Da_1b_2.

$$Dab_1, \quad (1) \quad (a-a_1)y+(b-b_1)x+\frac{a_1b_1-ab}{2}=0.$$

$$Dab_2, \quad (2) \quad (a-a_2)y+(b-b_2)x+\frac{a_2b_2-ab}{2}=0.$$

$$Da_1b_2, \quad (3) \quad (a_1-a_2)y+(b_1-b_2)x+\frac{a_2b_2-a_1b_1}{2}=0.$$

Or, si l'on retranche l'équation (1) de l'équation (2), on retrouve l'équation (3), donc les trois droites Dab_1, Dab_2, Da_1b_2 concourent au même point.

Remarque. Cette démonstration s'applique évidemment à chacun des systèmes de trois quadrilatères, qui, formés dans les angles L et M, ont leurs sommets sur les côtés de ces angles.

4. Soient donc d'après le paragraphe précédent.

(a) N le point de concours des trois droites

Dab_1, Dab_2, Da_1b_2, dans l'angle YOX.

(b) N′ le point de concours des trois droites

Da_1b_2, Db_1m, Da_1m, dans l'angle KLM.

Pour ce qui est des quadrilatères de l'angle BML, nous y trouvons : 1° le système des deux droites KA_1L, AA_1A_2, dont les deux diagonales immédiates sont les droites KA_2, AL; mais la droite qui passe par les milieux des deux diagonales KA_2, AL, passe aussi par le milieu de la diagonale A_1M; donc, au lieu de considérer la droite qui passe par les milieux des diagonales du système des deux droites KA_1L, AA_1A_2, nous pouvons considérer la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère A_1M, ou Da_1m qui est la même droite. 2° De même, relativement au second système des deux droites KB_1L, BB_1B_2, au lieu de considérer la droite qui passe par les milieux de BL et KB_2, nous considérerons la droite qui passe par les milieux de B_1M et KB_2, ou Db_1m, qui est la même droite. 3° Enfin dans le troisième quadrilatère nous trouvons pour la droite qui passe par les milieux des diagonales, Dab_2, et soit :

(c) N'' le point de concours des trois droites

$$Da_1m,\ Db_1m,\ Dab_2.$$

Comparant maintenant les lignes (b) et (c), nous voyons que les deux points N' et N'' sont les mêmes, ou que N'' n'est autre que N', et que de plus :

(d) Les quatre droites Dab_2, Da_1b_2, Da_1m, Db_1m, concourent au point N'.

Mais déjà (a) les deux droites Dab_2, Da_1b_2, concourent avec Dab_1 en N, donc le point N' n'est autre que le point N; et les cinq droites

$$Dab_1,\ Dab_2,\ Da_1b_2,\ Da_1m,\ Db_1m,$$

concourent au même point N.

Conséquences.

5. 1° Pour l'hexagone circonscrit. En prenant les six côtés d'un hexagone circonscrit quatre à quatre, on forme quinze quadrilatères; dans chacun d'eux l'on construit la droite qui

passe par le milieu des diagonales; les quinze droites ainsi obtenues concourent en un même point. 2° Pour un polygone circonscrit quelconque de m côtés; dans chacun des $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.}$ quadrilatères que l'on peut former en prenant les m côtés quatre à quatre, l'on mène la droite qui passe par les milieux des diagonales; ces

$$\frac{m(m-1)m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

droites concourent en un même point, centre de la conique inscrite.

6. Les réciproques sont vraies. Il suffit évidemment de démontrer la vérité de la réciproque pour l'hexagone seulement.

Théorème. Si dans les quinze quadrilatères que forment les six côtés d'un hexagone, les quinze droites qui passent par les milieux des diagonales, concourent en un même point, l'hexagone sera circonscriptible à une conique.

Soit (*fig.* 2) O le centre de la conique inscrite à cinq des six côtés, le côté excepté étant AF. Par le point A menons à cette conique, une tangente Af, que nous supposerons différente de AF; et AB, BE, EF étant trois côtés quelconques du pentagone circonscrit, considérons les deux quadrilatères ABEF et ABEf.

Les deux droites qui passent par les milieux des diagonales de ces deux quadrilatères, doivent par hypothèse et par construction passer : 1° par le centre O de la conique inscrite; 2° par le milieu m de la diagonale AE commune aux deux quadrilatères. Donc, ces deux droites doivent se confondre; ou, ce qui revient au même, la droite mn qui passe par les milieux de AE et de FB devrait diviser la droite AF en deux parties égales; et pour cela il faudrait que mn fût parallèle à FE, ou ce qui revient au même que les deux côtés AB et FE fussent parallèles.

Donc déjà la proposition est démontrée pour le cas où l'hexagone proposé n'a pas deux côtés parallèles séparés par un seul.

En second lieu, s'il existe dans l'hexagone un côté non adjacent à deux côtés parallèles, agissant pour ce côté comme nous venons de le faire pour le côté AF, nous ferions voir que la conique tangente aux cinq autres côtés, est aussi tangente à ce sixième.

Enfin il est facile de voir qu'il n'y a que le parallélogramme circonscrit, dans lequel deux côtés parallèles ne soient séparés que par un seul côté.

Donc, si dans un hexagone, etc..., etc...., l'hexagone sera circonscriptible à une courbe du second degré.

7. Enfin il est clair que de l'hexagone, la proposition réciproque s'étend au polygone de m côtés.

Donc, pour qu'un polygone de m côtés, soit circonscriptible à une courbe du second degré, il faut et il suffit que les droites qui passent par les milieux des diagonales de tous les quadrilatères que l'on peut former avec les m côtés du polygone, concourent toutes au même point, et ce point sera en outre le centre de la conique.

PROBLÈME 137 (T. V, p. 671).

PAR M. CABUSSI DE BAJOR,

élève de l'institution Barbet.

L'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont un angle commun et même périmètre est un cercle.

Même propriété pour les triangles sphériques.

Soit ABC un triangle ayant le périmètre donné, et l'angle donné A. Dans cet angle menons la circonférence O exinscrite au triangle ABC.

Et soient D, G, F les points de contact sur les côtés AB, BC, AE, nous aurons :

$$BD = BG;\quad GC = CE;$$

si on désigne par $2p$ le périmètre constant du triangle, on aura :

$$AD + AE = 2p;\ \text{de plus comme}\ AD = AE;\quad AD = \frac{2p}{2} = p;$$

tant que le troisième côté du triangle sera tangent au cercle O, on aura : $AB + BC + AC = 2AD = 2p$, et dès que BC cessera d'être tangent au cercle O, cette relation cessera de subsister, car alors on pourra ex-inscrire un cercle différent de O, et par suite la tangente menée par le point A cessera d'être égale à p.

Les troisièmes côtés des triangles qui satisfont à la question étant tous tangentes au cercle O, il s'ensuit que le cercle O est leur enveloppe.

Considérons un triangle sphérique.

Nous pourrons appliquer la même démonstration, si nous parvenons à démontrer que les arcs de grands cercles menés d'un même point tangentiellement à un petit cercle sont égaux.

Or cette égalité se démontre comme celle des tangentes rectilignes à un cercle, issues d'un même point, donc, etc.

NOTE

Sur la méthode des isopérimètres.

PAR M. BELLION,
élève du collége de La Rochelle.

La méthode des isopérimètres apprend que si R et r représentent le rayon et l'apothème d'un polygone régulier de n côtés, $r'=\frac{R+r}{2}$ et $R'=\sqrt{Rr'}$, donnent les valeurs de l'apothème, et du rayon d'un polygone régulier isopérimètre de $2n$ côtés. Or, en faisant la différence $R'-r'$, on arrive à prouver après des calculs où entrent des radicaux que $R'-r'<\frac{R-r}{4}$. Le même théorème peut se faire voir directement par la géométrie.

En effet (*fig.* 5), soit AB le côté du polygone régulier de n côtés, et A'B' celui du polygone régulier et isopérimètre de $2n$ côtés, on aura : $Co=R$, $oH=r$, $A'o=R'$, $oF=r'$.

Du point o comme centre avec $A'o$ pour rayon, décrivons une circonférence et soit I son point d'intersection avec Co : par le point I, menons la tangente DI et tirons Do. Dans le triangle $A'Co$, la bissectrice Do donne la proportion

$$Co : A'o :: CD : A'D.$$

De même à cause de la parallèle DI à la base A'F du triangle A'CF, on a :

$$CD : A'D :: CI : IF.$$

D'où à cause du rapport commun CD : A'D il vient :

$$Co : A'o :: CI : IF, \quad \text{or} \quad Co > A'o, \quad \text{donc} \quad CI > IF,$$

donc $$IF < \frac{CF}{2} = \frac{CH}{4}.$$

Or $IF = Io - Fo = R' - r'$, et $oH = Co - oH = R - r$,

donc $$R' - r' < \frac{R-r}{4}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN. (Voir t. V, p. 702.)

Théorème sur les moyennes et extrêmes raisons dans les coniques et sur les cordes passant par un point fixe et divisées en raison donnée.

—

1. Théorème. Si par un point donné dans le plan d'une conique, on mène des cordes et qu'on divise ces cordes en moyenne et extrême raison, le lieu du point de division est le système de deux lignes du quatrième ordre.

Démontration. Je prends le point fixe pour origine et pour axes, des parallèles aux axes principaux; l'équation de la conique sera de la forme $Ay^2+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ et passant aux coordonnées polaires,

$$z^2(A\sin^2\varphi+C\cos^2\varphi)+z(D\sin\varphi+E\cos\varphi)+F=0;$$

soient z' et z'' les deux racines correspondant à une valeur donnée de φ; de sorte que $z'=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$; $z''=\frac{a-\sqrt{b}}{c}$; la longueur de la corde est $\frac{2\sqrt{b}}{c}$; soit ρ la coordonnée polaire du point qui divise la corde en moyenne et extrême raison; on aura $(\rho-z'')^2=\frac{2\sqrt{b}}{c}\left(z'-\rho\right)$; d'où

$$[c\rho-a+\sqrt{b}]^2=2\sqrt{b}\,[a-c\rho+\sqrt{b}];$$

$$[(c\rho-a)^2-b]^2=16b(c\rho-a)^2;$$

$$(c\rho-a)^4-18b(c\rho-a)^2+b^2=0;$$

$$[(c\rho-a)^2-9b]^2=80b^2;$$

$$(c\rho-a)^2-9b=\pm 4b\sqrt{5};$$

$$(c\rho-a)^2=b(9\pm 4\sqrt{5})=b(2\pm\sqrt{5})^2.$$

Mettant pour a, b, c leurs valeurs il vient :

$$[2\rho(\mathrm{A}\sin^2\varphi+\mathrm{C}\cos^2\varphi)+\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\cos\varphi]^2=[(\mathrm{D}^2-4\mathrm{AF})\sin^2\varphi+$$
$$+(\mathrm{E}^2-4\mathrm{CF})\cos^2\varphi+2\mathrm{DE}\sin\varphi\cos\varphi]\,[2\pm\sqrt{5}]^2.$$

Passant aux coordonnées rectangulaires, on obtient :

$$[2\mathrm{A}y^2+2\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}y+\mathrm{E}x]^2=[(\mathrm{D}^2-4\mathrm{AF})y^2+(\mathrm{E}^2-4\mathrm{CF})x^2+$$
$$+2\mathrm{DE}xy]\,[2\pm\sqrt{5}]^2.$$

Système de deux lignes du quatrième ordre; l'origine est un point conjugué à la courbe.

Cas particuliers.

1° Le point est un centre ; alors $\mathrm{D}=\mathrm{E}=0$; ôtant le facteur $\mathrm{A}y^2+\mathrm{C}x^2$ commun aux deux membres, il vient :

$$\mathrm{A}y^2+\mathrm{C}x^2=\sqrt{-\mathrm{F}}\,(2\pm\sqrt{5});$$

système de deux coniques concentriques et homothètes à la conique donnée; il faut d'ailleurs se rappeler que dans l'ellipse F est essentiellement négatif et qu'on peut le rendre tel dans l'hyperbole; ainsi $\sqrt{-\mathrm{F}}$ est toujours réelle.

Ce résultat peut être obtenu *à priori* pour l'ellipse. En effet le cercle donne intuitivement pour lieu deux cercles concentriques. Or la projection d'une ligne divisée en moyenne et extrême raison est divisée de la même manière;

et les projections des deux cercles concentriques donnent deux ellipses homothètes concentriques.

2° Le point est un foyer ; alors $D^2-4AF=E^2-4CF$; et $D=0$; l'équation se réduit à :

$$[2Ay^2-2Cx^2+Ex]^2=2(y^2+x^2)\sqrt{-AF}.(2\pm\sqrt{5}).$$

3° Le point est sur la conique ; alors $F=0$; l'équation devient :

$$2Ay^2+2Cx^2+Dy+Ex=(Dy+Ex)(2\pm\sqrt{5});$$

$$2Ay^2+2Cx^2=[Dy+Ex][1\pm\sqrt{5}];$$

système de deux coniques dont les axes principaux sont parallèles aux axes principaux de la conique donnée.

4° *Le point est à l'infini.* L'analyse précédente n'est plus applicable, les cordes sont parallèles et doivent être données de direction ; soit donc $Ay^2+Cx^2+Ex=0$ l'équation de la conique, l'axe des y étant parallèle à la direction de la corde ; soit t l'ordonnée du point de division de la corde correspondant à l'abscisse x ; on a donc :

$$(t+y)^2=2y(y-t);\quad y^2-t^2=-4ty;\quad (y^2-t^2)^2=16t^2y^2;$$

remplaçant y^2 par sa valeur en x :

$$[At^2+Cx^2+Ex]^2=-16t^2(Cx^2+Ex)A;$$

$$A^2t^4+18At^2(Cx^2+Ex)+(Cx^2+Ex)^2=0;$$

$$[At^2+9(Cx^2+Ex)]^2=80(Cx^2+Ex)^2;$$

$$At^2+(Cx^2+Ex)(2\pm\sqrt{5})=0;$$

système de deux coniques ; si, les axes étant rectangulaires, on a :
$$A=C(2\pm\sqrt{5});$$
les courbes deviennent des cercles.

Observation. L'équation générale est réductible lorsque le second membre a un facteur commun avec le premier, et cela n'a lieu que lorsque $D=E=0$, c'est-à-dire, lorsque le point fixe est au centre ; une réduction a aussi lieu lorsque le second membre est un carré parfait ; ce qui n'est possible : 1° que lorsque $F=0$, c'est-à-dire lorsque le point donné est sur la conique ; 2° que lorsque :

$$D^2E^2-(D^2-4AF)(E^2-4CF)=0;$$
$$AE^2+CD^2-4ACF=0;$$

et alors si A et C sont de même signe, la conique se réduit à un point ; s'ils sont de signes différents, la conique se réduit à deux droites ; on a donc ce théorème :

Si par un point fixe dans le plan de deux droites, on mène une droite ; et si l'on partage en moyenne et extrême raison la portion interceptée entre les deux droites données, le lieu du point de division est un système de deux coniques.

Il est utile de démontrer ce théorème directement pour les droites convergentes ou parallèles.

Il est à remarquer que *quatre points* divisent une longueur donnée en moyenne et extrême raison ; deux points sont situés sur la droite et à égale distance du point milieu et les deux autres points sur deux prolongements et aussi à égale distance du point milieu. Euclide n'indique qu'un point, parce qu'il a pour but non la détermination de ce point, mais la détermination des deux segments *additifs*. L'analyse algébrique, à laquelle la géométrie doit tous ses perfectionnements a montré qu'il fallait considérer aussi les segments *soustractifs*, de sorte que la solution est devenue *double* chez les modernes ; mais lorsqu'au lieu de la *grandeur absolue* de segments, on considère les *points de division*, on arrive au nombre quatre ; et c'est ce qui donne lieu à la ligne du quatrième degré dans le problème précédent : en général soient x et y deux segments d'une droite de longueur a ; qu'ils soient additifs ou soustractifs, on a toujours par la théorie géométrique des signes, l'équation $x+y=a$; supposons qu'on donne entre

x et y une relation $f(x, y)=0$ de degré n, on obtient, généralement parlant, n longueur pour les segments et $2n$ points de division ; prenons pour exemple le problème de la moyenne et extrême raison : on a $x+y=a$; ensuite la seconde relation peut s'écrire $x^2=ay$ ou bien $ax=y^2$; ce qui donne quatre points ; et les quatre valeurs de x sont les racines de l'équation du quatrième degré :

$$(x^2+ax-a^2)(x^2-ax+a^2)=0;$$

telle est l'analyse complète de ce problème qui est un cas particulier de celui qui est exprimé par les deux équations : $x+y=a$; $x^m=a^{m-1}y$; d'où l'on déduit $x^m+a^{m-1}x-a^m=0$; pour appliquer la théorie des équations, il faut rendre les coefficients numériques ; faisant $x=az$, z est un nombre ; et l'on a $z^m+z-1=0$; équation que M. Yvon a discutée dans les *Nouvelles Annales* (t. II, p. 321) ; il est évident qu'elle a a toujours une racine positive $>\frac{1}{2}$, et par conséquent $x>\frac{1}{2}a$, et qu'elle n'a de racine rationnelle que lorsque $m=1$.

Si on prend pour seconde relation $x^m=a^{m-1}y$, on parvient après avoir fait $x=az$ à l'équation numérique

$$z^m=(1-z)^{m-1},$$

qui n'a pas encore été discutée.

II. Théorème. Si une corde inscrite dans une conique passe par un point fixe et qu'on la partage en raison *donnée*, le lieu du point de division est une ligne du quatrième degré.

Démonstration. Conservons la même notation que dans le théorème précédent; $\frac{2\sqrt{b}}{c}$ est la longueur de la corde ;

$\dfrac{a+\sqrt{b}-c\rho}{c}$ un de ses segments : supposons que le rapport donné de ces deux quantités soit p ; on aura :

$\dfrac{2\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}-\rho}=p$; d'où $b(2-p)^2=a^2p^2$; remplaçons a et b par leurs valeurs et ensuite $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par $\dfrac{y}{\rho}$ et $\dfrac{x}{\rho}$, on obtient finalement :

$$[y^2(D^2-4AF)+x^2(E^2-4CF)-2DExy](2-p)^2=$$
$$=p^2[2Ay^2+2Cx^2+Dy+Ex]^2;$$

équation dont la discussion est analogue à celle du théorème précédent.

Observation. Si l'on fait $p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, on retombe sur l'équation obtenue ci-dessus. Ainsi le problème de la moyenne et extrême raison est un cas particulier de la division de la corde en raison donnée. Je dois à M. Gerono cette instructive observation.

QUESTION D'EXAMEN (t. V, p. 702).

THÉORÈME. Si dans l'équation d'une ligne du second degré, on a $n=DE-2BF=0$, menant par l'origine une droite quelconque; le coefficient angulaire de cette droite multipliée par le coefficient angulaire de la droite qui va de l'origine au pôle de la première droite, est un produit constant.

Démonstration. Soit $y+ex=0$ l'équation de la première droite; y', x' étant les coordonnées du pôle, on a :

$$y' = \frac{l'}{k' + ke}; \quad x' = \frac{le}{k' + ke} \text{ (t. II, p. 305)};$$

d'où $\frac{y'}{x'} = \frac{l'}{le}$; de là $\frac{y'e}{x'} = \frac{l'}{l}$ = quantité constante.

Corollaire. Lorsque les axes sont conjugués, on a $B=0$; si de plus un des axes est un diamètre, alors ou D ou E sont nuls; dans ce cas donc $n=0$ et le théorème subsiste; dans le cercle, le coefficient angulaire est dans ce cas égal à la tangente de l'angle qui forme la droite variable avec l'axe des x et l'on a le théorème énoncé (t. V, p. 702).

QUESTION D'EXAMEN (t. V, p. 703).

A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne opposés respectivement aux côtés a, b, c, de l'égalité

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

déduire la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Solution : l'on a, $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$;

d'où

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 \left\{ \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \sin B \sin C}{\sin^2 A} \right\} =$$

$$= a^2 \left\{ \frac{2 - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \sin B \sin C}{\sin^2 A} \right\};$$

or

$$\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\cos A;$$

d'où

$$2 \cos A \sin B \sin C = 2 \cos^2 A + 2 \cos A \cos B \cos C;$$

donc

$$b^2+c^2-2bc\cos A=$$

$$=a^2\left[\frac{2-2\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C}{\sin^2 A}\right];$$

or

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=0;$$

donc $$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2.$$

NOTE HISTORIQUE

Sur la notation cartésienne des exposants.

ESTIENNE DE LA ROCHE.

—

Tous les géomètres reconnaissent que cette notation a fait faire d'immenses progrès à l'analyse. Descartes est le premier qui ait mis cette notation en usage, et l'autorité de ce grand nom servit à la répandre. Toutefois, un célèbre géomètre (*), connu par d'importants travaux sur la science et sur son histoire, a fait l'observation curieuse qu'on trouvait cette notation dans un ouvrage publié dans le seizième siècle; nous allons consacrer quelques lignes à cet ouvrage, très-rare, et dont nous devons la communication à l'amitié de M. le professeur Vincent.

Voici le titre *in extenso* :

L'arismetique (note 1) et géometrie de maistre Estienne de la Roche (note 2) dict Ville Franche, nouvellement imprimée et des faultes corrigée, « à laquelle sont adjoutées les tables

---

(*) M. Chasles vient d'être nommé professeur de géométrie supérieure, à la Sorbonne, chaire nouvellement établie. Cette création et cette nomination font époque et peuvent exercer une grande influence sur l'enseignement si arriéré, si incomplet, de la géométrie de collége.

» de divers comptes, avec leurs canons, calculées par Gilles
» Huguetan natif de Lyon, par lesquelles on pourra facile-
» ment trouver les comptes tous faictz, tant des achatz que
» ventes de toutes marchandises. Et principalement des
» marchandises qui se vendent, ou achetent à la mesure,
» cōme a l'aulne, a la canne, a la toyse, a la palme, au
» pied, et autres semblables. Au poix, cōme a la livre, au
» quintal, au millier, a la charge, au marc, et a l'once, a
» la piece, a nōbre, a la douzaine, a la grosse, au cent et
» au millier. Avec deux tables servantz aux libraires ven-
» deurs et acheteurs de papier. Ensemble une table de des-
» pence, a scavoir a tant pour jour, combien on depēd lan et
» le moys, et a tant le moys, combien revient lan et le jour,
» et a tant par an, cōbien on despend tous les moys, et a
» combien revient pour chascun jour. Davantaige, les
» tables du fin dor et dargent, pour scavoir (scelon que le
» marc de billon tiendra de loy, ou de fin), combien il
» vauldra de poix de fin or, ou dargent fin. »

On les vend a Lyon a lenseigne de la Sphaere, cheulx Gilles, et Jacques Huguetan freres. 1538, in-fol.

On n'a numéroté que le recto, et l'arithmétique contient 151 de ces feuilles, ce qui fait 302 de nos pages. Les tables de Huguetan jointes à l'arithmétique de De la Roche, ne portent aucune pagination.

On voit que c'est une réimpression. La première édition est de 1520.

L'arithmétique est divisée en deux parties : la première est théorique, et la seconde est pratique ; la première est divisée en *six différences* (note 3), contenant chacune deux chapitres ; les quatre premières *différences* traitent des nombres parfaits, abondants, défaillants, des proportions et rapports, et enfin de quatre opérations pour entiers et pour les *routs*, expression qui équivaut à nombre *rompu* ou fractionnaire ;

le tout suivant la méthode de Boëce (note 3), qui a servi si longtemps de type ; car, tout ouvrage remarquable devient la source d'une foule d'imitations : c'est ainsi que nous voyons aujourd'hui toute géométrie être calquée sur celle de Legendre, toute statique sur celle de M. Poinsot, tout calcul infinitésimal sur celui de M. Cauchy, etc. Dans la *différence* des proportions (fol. 3), on trouve *cent vingt-quatre* noms donnés à autant de rapports géométriques pour les distinguer ; ainsi le rapport de 5 : 29 est inscrit sous cette rubrique : *submultiplex superpatiens-subquintuple-superquadriperciensquintes*, parce que $29 = 5.\ 5 + \frac{4}{5}.\ 5$.

C'est le système musical des Grecs qui a amené cette profusion de termes hétéroclites ; car les Grecs ne cultivaient l'arithmétique que pour les besoins de ce système, et nullement pour ceux du commerce, profession décriée, qui était regardée comme indigne d'un homme comme il faut (ingenuus). Ce préjugé antisocial a considérablement retardé la théorie des nombres, chez ce peuple d'un génie si inventif. C'est au commerce que nous devons la connaissance de l'arithmétique chiffrée des Indiens et des immenses progrès, conséquences immédiates de cette connaissance ; remarquons derechef, en passant, que les traités modernes renferment encore une grande superfétation en fait de proportions et de rapports, reste de l'ancien état de choses.

Nous avons déjà signalé cette singularité que les coefficients binominaux ont été connus en Europe pour les extractions de racines, avant d'être connus pour les puissances (*v.* t. V, p. 494) ; de même la notation exponentielle est donnée ici pour les racines d'abord, et très-complétement, et ensuite pour les puissances, d'une manière moins complète, moins explicite ; nous copions le commencement de la *quinte différence qui traicte des racines et nombres* (fol. 21).

« Racine de nombre est ung nombre qui multiplie en soy
» une foys ou plusieurs, selon l'exigence et nature de la
» racine produit précisement le nombre dōt il est racine.
» Ou aultrement racine de nombre si est qui escript et met
» deux ou plusieurs foys lung soubs lautre ou lung pres de
» lautre et puis multiplie le premier par le second et ce que
» en vient par le tiers (se tiers ya) et encores par le quart
» et encores par les aultres (se aultres ya) la derniere mul-
» tiplication soit egale au nombre ou produise le nombre
» duquel il est la racine, et doyt on sçavoir quil sont infinies
» especes de racines : car aulcunes sont racines quarrees qui
» sont appellees racines secondes : aulcunes sont racines
» cubiques qui sappellent racines tierces : aulcunes sont
» racines de racines qui sont dictes racines quartes : ne plus
» avant sont entre les anciens pour la souffisances dicelles
» aux raysons darismetique et de geometrie. Mais les mo-
» dernes sont encrez plus profond en la mer des nombres :
» et ont trouve racines quintes sextes septimes etc. jusques
» ad infinitum. Racines premieres ne se treuvent point
» pourceque tout nombre est racine premiere. Racine
» quarrée ou seconde est celle qui posee en deux places lune
» soubs lautre et puis multiplie lune par lautre produit le
» nombre duquel elle est racine quarree ou seconde. Et le
» nombre qui en est produit est nombre quarre. Comme 4
» et 4 quil multiplies lung par laultre font 16. Ainsi la ra-
» cine quarrée ou seconde de 16 si est 4 et 16 est nombre
» quarre. Et se peult noter qui veult ceste racine en met-
» tant et sus ℞, comme qui vouldrait escripre la racine se-
» conde de 16, on le peult ainsi mettre ℞^{2}16 etc. Neanmoins
» quand on trouve devant ung nombre une ℞ sans nulle
» note il sentend que ce soit la racine quarree. Racine cu-
» bique ou tierce est celle qui mise en troys lieux et puis
» multipliee la premiere par la seconde et ce qui en vient

» par la tierce la derniere multiplication est le nombre dont
» il est racine. Et le nombre qui en vient est nombre cubic.
» Comme 4 mys en troys places ainsi 4.4.4 (note 4) et puis
» multipliez lung par laultre montent 64 qui est nombre
» cubic : donc sa racine cubique est 4 que l'on peult es-
» cripre ainsi ℞ 64 ou ainsi ℞³64. Racine de racine ou racine
» quarte est celle que couchee en quatre places et puis mul-
» tiplices lung par laultre ainsi comme dessus est dict res-
» titue le nombre dont elle racine quarte comme 2.2.2.2
» qui multipliez lung par laultre jusques au quart font 16.
» Donc sa racine de sa racine ou sa racine quarte est 2 que
» l'on peut ainsi noter ʒ ʒ ʒ ou ainsi ℞⁴ il ya daultres ra-
» cines comme racines quintes sixiemes septiemes etc. qui
» se peuvent ainsi noter ℞⁵.℞⁶.℞⁷ et ainsi des aultres racines
» continuant sans fin convient entendre en les multipliant
» cinq foys ou six et sept foys ou tant de foys que la nature
» de la racine le requiert. Toutes telles racines comme les
» susdictes sont appellees racines simples. »

L'auteur passe aux racines *composées*, par exemple : $7+\sqrt{5}$ ou $7-\sqrt{5}$; il ne connaît pas encore nos signes plus et moins. Il se sert de la lettre *p* pour le *plus*, et de la lettre *m* gothique pour le *moins*. Il faut remarquer que de la Roche a écrit en 1520, et le premier ouvrage imprimé où l'on rencontre nos signes actuels est de Christophe Rudolf de Jawer, imprimé en 1524 (*); le célèbre Michel Stifel en a donné une seconde édition en 1571, sous ce titre : *Die Coss Christophs Rudolfs mit schönen Exemplen der Coss durch Michael Stifel gebbessert et seher gemehrt*, 1571, 491 p. in-4. « La Coss de Christophe Rudolf avec de beaux Exemples de la » Coss, par Michel Stifel, améliorée et très-augmentée » ; c'est le premier ouvrage qui ait introduit l'algèbre ou l'art

(*) Non en 1522. Voir Aperçu historique sur les méthodes, p. 540.

cossique en Allemagne ; il paraîtrait même que Rudolf n'a fait que copier un ouvrage de la bibliothèque de Vienne, car il énonce les propositions sans aucune démonstration ; c'est Stifel qui a ajouté les démonstrations, de sorte que les signes $+$ et $-$ sont peut-être plus anciens que 1524 ; du reste nous reviendrons sur cet ouvrage.

De la Roche distingue encore les racines *liées ;* ce sont celles de la forme $\sqrt{7+\sqrt{5}}$, il écrit ℞.7+℞.5. Dans les chapitres suivants, il apprend à réduire des radicaux dissemblables à la même dénomination, et donne des exemples très-détaillés pour faire les quatre opérations comme nous les faisons aujourd'hui, sur les expressions radicales, mais il ne donne l'extraction numérique que de la racine carrée et cubique. Il emploie la méthode des *moyennes* pour approcher des racines. Exemple : $\sqrt{6}$; comprise entre 2 et 3 ; il essaye $2\frac{1}{2}$, et trouve que la racine est entre 2 et $2\frac{1}{2}$; ensuite entre $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{3}$; puis il prend pour moyennes $2\frac{2}{5}$, car, dit-il, en ajoutant respectivement les numérateurs et les dénominateurs de deux fractions, on obtient une moyenne (fol. 23) ; et parvient à la valeur par *excès*, $2\frac{881}{3960}$; l'excès sur 6 est $\frac{1}{3841600}$. On voit ici le germe de la méthode d'approximation pour les racines des équations appliquée à l'équation $x^2-6=0$.

Chez les Indiens aussi le calcul des radicaux est donné d'une manière étendue et très-complète ; tandis que les élévations aux puissances ne sont indiquées que pour $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$; mais ils considèrent aussi les racines imaginaires, et particulièrement $\sqrt{-1}$, dont on ne rencontre, à ce que je sache, aucune trace de calcul en Europe avant le dix-septième siècle. Venons à la notation exponentielle : elle est au commencement de la sixième différence (fol. 29 *verso*).

La sixieme différence qui traicte de la regle de la chose et de la quantité: est divisee en 12 *chapitres dont le premier traicte des termes et charactères de ceste regle.*

« Ceste regle est de si merveilleuse excellence quelle ex-
» cede et surmonte toutes les aultres; car elle faict tout ce
» que les autres font : et si fait oultre et par dessus innu-
» merables comptes de inestimable profundite : et pour ce
» est appellee regle de la chose ou regle de 1 qui sont prin-
» cipes transcendants pource quelle transcende toutes les
» regles darismetique. Maistre Nicolas Chuquet en son tri-
» party rappelle la regle des premiers qui vault autant a
» dire comme la regle des unités ou de 1. Aulcunes nations
» lappellent algebra : et les aultres almucabala; et a brief
» parler ceste regle est la clef l'entree et la porte des abismes
» qui sont en la science des nombres.

» Nombre autant qu'il est expedient a notre propos est
» pris ici largement non pas tant seulement en tant quil est
» collection de plusieurs unites : mais soit 1 ou partie et
» parties de 1. Comme est tout nombre rout quelconque
» nombre que ce soit est entendu et considéré en moult de
» manieres. Lune et la premiere si est que lon peut con-
» siderer ung chacun nombre comme quantité discrete : ou
» comme nombre simplement prins sans aulcune denomi-
» nation comme 12 ou 13 ou aultre, etc. Secondement ung
» chascun nombre est considere comme quantité continue
» que aultrement on dit nombre linear qui peult etre ap-
» pelle chose ou premier : et telz nombres seront notez ap-
» position de une unite au dessus deulx en ceste maniere
» 12^{r} ou 13^{r}, ect., ou telz nombres seront signes dung tel
» characte apres eux comme $12.\rho.$ ou $13.\rho.$ Tiercement tout
» nombre est considere nombre superficiel quarre qui peult
» estre appele champ ou second qui se peult ainsi quoter

» 12^2 ou 13^2, etc., ou ainsi 12.&. ou 13.&., etc. Quartement » toutes manieres de nombres peuvent estre entendues nom- » bres tiers que lon dict nombres cubiez : autrement cubes » que lon peut ainsi marquer 12^3. ou 13^3. et ou ainsi 12[ ]. » ou 13[ ]. et on les peult aussi entendre estre nombres » quartz ou quarres de quarres que nous appellons champs » de champs qui se peuvent ainsi signer. 12^4 ou 13^4., etc., » ou ainsi 12.*c&*. ou 13.*&c*, etc., et semblablement on les » peult considerer estre quintz, sixiemes, septiemes, ou » huytiemes, et ainsi continuant et si avant que lon y veult » entrer en mettant a chascune difference de nombre sa de- » nomination au dessus de luy par la maniere devant dicte » et par ainsi les nombres qui sont nulle denomination sont » occupans le premier lieu ou lordre des differences. Les » choses ou les premiers cest a scavoir ceux dont leur de- » nomination est 1 sont au second ordre. Les champs (note 5) » ou les seconds sont au tiers lieu. Les cubes ou tiers sont » apres prochains ensuyvans : et puis les champs de champs » en quartz et en apres les quintz. Et ainsi des aultres selon » progression naturelle des nombres. »

Cette exposition donne lieu à plusieurs observations.

On voit l'enthousiasme extraordinaire qu'a excité parmi les géomètres l'apparition de l'algèbre, venue des Arabes par l'intermédiaire des Italiens et désignée aussi sous le nom de règle de la chose ou règle cossique. On connaît l'origine de cette dénomination (*Nouvelle Annales*, t. V, p. 320). Cet enthousiasme était naturel; c'était pour ainsi dire la découverte d'un monde nouveau dans la science des nombres. Tout ce qui était difficile dans l'*algorisme* ancien devenait extrêmement facile pour l'algorisme nouveau. L'idée qu'on s'est formé de l'algèbre était analogue à celle qui existait sur l'arithmétique. Ni les Grecs, ni les Romains, ne possédaient la première notion d'une arithmétique chiffrée. Ils avaient bien des instruments pour faciliter les opérations mentales du calcul ; mais ils ne connaissaient aucun instrument pour les écrire facilement. On a souvent confondu ces deux espèces de facilités. Le *zéro indien*, âme de toute arithmétique chiffrée, leur manquait complétement. L'existence des abaques prouvent même incontestablement l'absence du zéro ; aussi dès que ce caractère fut connu en Europe, les abaques disparurent. La difficulté d'écrire les nombres fit que dans toutes les démonstrations arithmétiques, on trouva plus simple de représenter les nombres par des lignes et de donner ainsi à l'arithmétique une apparence géométrique. C'est ce que nous voyons dans Euclide, Boëce et ses nombreux copistes. De là aussi les dénominations de nombres linéaires, superficiels, solides, supersolides, etc. Sous l'empire de ces idées, et par analogie, on conçut la chose inconnue, notre x, non pas comme un nombre *discret* mais comme une quantité *continue* comme une ligne. Et on figura la *chose* quand elle était linéaire par l'*unité* placée à droite et au-dessus du multiplicateur que nous nommons aujourd'hui coefficient ; ainsi $12x$ s'écrivait 12^1 ; de même pour la *chose* superficielle ; ainsi $12x^2$ s'écrivait 12^2 et ainsi de suite, comme il a été clairement expliqué ci-dessus, et l'on voit que pour les quatre premiers degrés, on avait adopté des signes particuliers et dans tout le cours de l'ouvrage, pour la partie algébrique, l'auteur emploie ces signes et non les exposants, dont il donne d'ailleurs la règle comme d'*addition* et de *soustraction* des exposants. Ainsi il écrit $12^1.12^2=144.12^3$ correspondant à notre équation $12x.12x^2=144x^3$, etc. Il résulte de tout ce qui précède que la notation exponentielle de De la Roche est uniquement affectée à la quantité *cossique*, et n'a pas la généralité philosophique de la notation cartésienne, quoiqu'elle ait pu y conduire. Il est peu probable que Descartes ait eu connaissance de l'Arismetique du maistre lyonnais ; car on sait que l'illustre philosophe pensait beaucoup et lisait très-peu, et même en ce point, grand nombre de professeurs français sont restés au moins à demi cartésiens. D'ailleurs Descartes emploie la notation et ne dit nulle part, à ce que je sache, qu'il en soit l'inventeur (*) ; il ne connaît même pas la notation *radicale* de De la Roche ; pour $\sqrt[3]{12}$ que De la Roche écrit ℞³12, Descartes met $\sqrt{C.12}$ se servant de C lettre initiale du mot cubique. Nul doute qu'il n'eût aussi adopté ce signe s'il l'avait eu sous les yeux. Du reste De la Roche a copié sa notation dans d'autres ouvrages peut-être dans ceux de Nicolas Cuchet qu'il cite en plusieurs endroits. Le reste de l'ouvrage est consacré à donner les règles cossiques (pour résoudre l'équation du premier degré à une inconnue) et une foule de questions d'arithmétique résolues à l'aide de ces équations ; de même l'équation du deuxième degré, sans discussion des racines ; et l'équation du troisième, quatrième degré de la forme $ax^3=b$; $ax^4=b$, etc., ou encore $ax^5=bx$, etc. ; viennent ensuite les applications mercantiles de l'arithmétique, qui forment la seconde partie de l'ouvrage, et le tout est terminé par l'application de la science des nombres aux *mesures de géométrie ;* triangles, rectangles, cercles, pyramides, sphères, etc. Sur le verso de la feuille 158 est gravé un canon monté sur son affût, selon la construction du temps, et portant cette inscription sur la volée : *terrebo si non percussero* ; le boulet et la fumée sortant de la pièce mettent en fuite des oiseaux de proie.

(*) Il est très-pénible de faire des recherches dans l'édition de M. Cousin, faute d'une table raisonnée et complète des matières, premier devoir que les éditeurs d'autrefois ne manquaient jamais de remplir.

NOTES.

Note (1). *L'arismetique*. Les Grecs prononcent le θ, comme les Anglais le *th*, et que les étrangers à cette prononciation rendent par la lettre sifflante *s*; le Pisan Fibonacci (filius Bonacci), le premier auteur chrétien qui ait fait connaître l'algèbre en Europe, au commencement du XIII[e] siècle, écrit aussi arismetica (Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 288).

Note (2). Il est singulier qu'aucun bibliographe, aucun historien des mathématiques n'ait cité cet auteur. Il est omis par Wallis, Heilbronn, Montucla, Kastner, Mürhard; M. Chasles est, je crois, le premier qui ait attiré l'attention sur cet ouvrage si important sous le rapport historique.

Note (3). *Boëce. Anicius Manlius Severinus Boethius*. Théologien, philosophe, orateur, poëte et mathématicien, exécuté par ordre du roi Théodoric en 524. Nous consacrerons un article spécial à l'arithmétique de cet homme si supérieur à son siècle. Il présente des passages obscurs. Bonne fortune, pour qu'avec de l'érudition et de l'esprit, on puisse faire entrer dans un auteur et en faire sortir tout ce qu'on veut.

Note (3). *Différences*. Fibonacci appelle *distinctiones* les divisions de son ouvrage; dénomination empruntée aux Arabes.

Note (4). Ce serait une erreur de croire que le point placé ici entre les nombres désigne une *multiplication*. C'est uniquement un point de séparation. Fibonacci emploie le point, comme les Indiens pour désigner le signe $+$; ainsi $a.3$ veut dire $a+3$; mais chez les Indiens le point placé sur la lettre désigne le signe —; ainsi $\dot{a}$ veut dire $-a$; c'est Leibnitz qui a adopté le point pour marquer la multiplication et nous avons proposé d'adopter la notation indienne pour désigner un multiple quelconque du nombre; ainsi $\dot{7}$ signifierait un multiple de 7 et selon Legendre M(7).

Note (5). *Champ ou carré*. La mesure des propriétés territoriales a donné naissance à la géométrie; de là les Arabes ont désigné le carré par màl (possession); les Grecs par δυναμισ, puissance, les Latins par *census*, revenus des biens, et de là le mot *champ*.

En sanscrit le carré est désigné par les mots Varga et Kriti ; le premier signifie *classe*, *caste*; peut-être par allusion aux quatre castes. Kriti désigne dans la prosodie une espèce de stance, composée de *quatre* vers de vingt syllabes. Je dois ce dernier renseignement à M. Munk, savant orientaliste de la bibliothèque royale.

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

De la question 53^me^ *proposée par M. Finck* (Nouvelles Annales, t. I, p. 520).

PAR M. PAUL SERRET,
élève en mathématiques. (*)

(*Fig.* 5). 1° Soit un faisceau de n droites convergentes au point o, et $n-1$ points X_1, X_2, ... X_{n-1} en ligne droite, le tout dans un même plan ; prenez sur oA la première du faisceau, arbitrairement les points A_1, B_1, C_1.... en nombre quelconque ; du premier point X_1, comme centre, projetez ces points sur la seconde droite du faisceau en A_2, B_2, C_2..., du point X_2 comme centre, projetez de même ces derniers sur la troisième droite du faisceau, et ainsi de suite. Soient A_n, B_n, C_n.... les dernières projections obtenues du point X_{n-1} comme centre sur la $n^{ème}$ du faisceau ; les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n.... concourront en un même point situé sur la droite X_1X_{n-1}.

2° Si $n=3$, et si X_1 restant fixe, on suppose que X_2 décrive une conique, quel sera le lieu décrit par le point des concours des droites A_1A_n, B_1B_n ?

(*) Voici enfin un élève qui étudie la géométrie du dix-neuvième siècle.

Solution. — Première partie.

1. D'abord, il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition pour trois points seulement pris sur la première droite du faisceau.

2. Lemme. Si le théorème est vrai pour le cas de n égal ou inférieur à a, il sera vrai aussi pour le cas de $n = a + 1$.

Soit le théorème démontré pour tous les nombres depuis 3 jusqu'à $n - 1$, il sera encore vrai pour le nombre n. Soient en effet oA, oB et oK la première, la deuxième et la $n^{ième}$ droite du faisceau; X_1 le premier point, X_2 le second; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; et A_n, B_n, C_n, les points déterminés par les données ou par les projections sur la première, la deuxième et la $n^{ième}$ droite du faisceau. Il faut prouver que les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n concourent en un même point. En effet, considérons le faisceau de $n - 1$ droites $oB \ldots oK$, et le système de $n - 2$ points X_2, $X_3 \ldots X_{n-1}$; les points donnés sur la première droite oB de ce nouveau faisceau, étant A_2, B_2, C_2, de l'hypothèse faite en tête du lemme, nous conclurons que les droites A_2A_n, B_2B_n, C_2C_n, concourent en un même point x_2 situé sur la droite X_1X_{n-1}. Cela posé, considérons le nouveau faisceau de trois droites oA, oB, oK, relativement aux deux points X_1 et X_2; on voit que les points A_1, B_1, C_1, de la première du faisceau, sont projetés en A_2, B_2, C_2 sur la seconde du faisceau suivant le point X_1; que les points A_2, B_2, C_2 sont projetés eux-mêmes par le point x_2 en A_n, B_n, C_n sur la troisième droite du faisceau; que par suite les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n, concourent en un même point, d'après l'hypothèse admise.

Corollaire. Il suffira donc de démontrer la proposition pour le cas plus simple d'un faisceau de trois droites, et d'un système de deux points.

3. Lemme. Au lieu de considérer un système de trois droites concourant au même point, il suffit de considérer un système de trois droites parallèles.

Car étant donnée une figure plane quelconque dans laquelle n droites concourent au même point, on peut toujours projeter centralement la figure, de manière que le système des n droites concourantes soit remplacé par un système de n droites parallèles. Pour cela, il suffit en effet de prendre pour plan de projection un plan parallèle à la droite qui joint le centre de projection au point de concours des n droites. D'ailleurs, deux figures dont l'une est la projection centrale de l'autre sont telles que si dans l'une n points sont en ligne droite, les points correspondants dans l'autre seront aussi en ligne droite; si n droites concourent au même point dans l'une, les n droites correspondantes concourront au même point dans l'autre (sauf le cas particulier où l'on aurait choisi le plan de projection de telle sorte que le faisceau des n droites concourantes se transformât en un système de n droites parallèles).

(*Fig.* 6). 4. Soient M, N, P les trois droites parallèles; X_1, X_2 les deux points, et A_1, B_1 deux points pris sur M; A_2, B_2, et A_3, B_3 les points correspondants sur N et P; il suffit de prouver que le point de concours Y des droites A_1A_3, B_1B_3 est sur la droite X_1X_2, par là il sera prouvé que si l'on avait pris sur M un troisième point C_1, la droite C_1C_3 aurait passé par le point Y. Or, remarquons que les trois points X_1, X_2, Y peuvent être considérés comme les trois centres de similitude externes de deux polygones semblables pris deux à deux, construits sur les lignes A_1B_1; A_2B_2, A_3B_3 comme côtés homologues, et ayant leurs côtés parallèles. Or, trois polygones étant pris dans ces conditions, les trois centres de similitude externe de ces polygones pris deux à deux, sont, d'après un théorème connu, trois points en ligne droite ; donc ici, les trois points X_1, X_2, Y, sont en ligne droite. Donc, le théorème est démontré pour un faisceau de trois droites parallèles. Par suite, d'après les lemmes précédents, il est vrai pour un faisceau de n droites concourantes au même point, et pour un système de $n-1$ points.

Remarque. Du théorème précédent on peut déduire une démonstration d'un théorème exposé dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*. Ce théorème est le suivant. (*Fig.* 7.) D'un point fixe A pris dans le plan d'un angle yox, on mène un nombre quelconque de transversales qui déterminent des points correspondants A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2.... la droite oy restant fixe, la seconde droite ox tourne autour de oy, et emporte avec elle les points A_2, B_2, etc. ; si dans une quelconque de ses positions on mène les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.... , ces droites se couperont toujours en un même point.

(*Fig.* 8). Soit en effet ox' une nouvelle position de ox, et A_3, B_3, C_3 les points correspondants aux points A_2, B_2, C_2, de sorte que l'on ait : $oA_2 = oA_3$, $oB_2 = oB_3$, $oC_2 = oC_3$. Les droites A_2A_3, B_2B_3 et C_2C_3 seront parallèles ; et il faut démontrer que les droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 concourent en un même point.

Or faisons une projection centrale de la figure, de manière que le système des parallèles soit remplacé par un système de droites concourant en un point X_2. Représentons les projections centrales des divers points X_1, A_1,.... B_2.... par les petites lettres correspondantes, et semblablement accentuées x_1, a_1, b_2,.... dans la projection, les points a_1, b_1, c_1 placés sur la première droite du faisceau sont projetés en a_2, b_2, c_2, suivant le centre x_1 ; les points a_2, b_2, c_2 sont eux-mêmes projetés en a_3, b_3, c_3, suivant le centre x_2 ; donc, d'après le théorème de M. Finck, les droites a_1a_3, b_1b_3, c_1c_3 concourent en un même point ; donc aussi dans la figure primitive les droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 concourent au même point. C. q. f. d.

Autre remarque. Si l'on remarque que la démonstration précédente suppose seulement le parallélisme des droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, et que ce parallélisme existe encore quand l'on suppose, non que les distances oA_3, oB_3..... sont respectivement égales aux distances oA_2, oB_2, mais seulement qu'elles leur sont proportionnelles, l'on verra que l'on peut généraliser l'énoncé du théorème précédent.

Seconde partie.

1. Lemme. Déterminer le rapport des longueurs X_1Y et X_1X_2 (*fig.* 6).

Le triangle $A_2X_2X_1$ coupé par la transversale A_3A_1Y donne la relation :

$$A_2A_3 \,.\, X_2Y \,.\, X_1A_1 = X_2A_3 \,.\, X_1Y \,.\, A_1A_2,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{X_2Y}{X_1Y} = \frac{A_1A_2}{A_1X_1} \cdot \frac{A_3X_2}{A_3A_2},$$

ou bien comme les points X_1, A_1, B_1 sont fixes, le rapport $\frac{A_1A_2}{A_1X_1} = m$, quantité constante, donc

$$\frac{X_2Y}{X_1Y} = m \,.\, \frac{A_3X_2}{A_3A_2}, \text{ ou bien } \frac{X_2Y}{X_1Y} = m \,.\, \frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2};$$

d'où enfin

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y} = 1 + m \,.\, \frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2}.$$

2. Prenons le point fixe X_1 pour origine des coordonnées, et l'axe des x parallèle à la direction commune des droites A_1B_2, A_2B_2; soient X_2 $[\alpha, 6]$ l'une des positions particulières

du point mobile, et sur la droite X_1X_2, le point de rencontre correspondant, Y $[x, y]$; soient A_2 $[y=c,\ x=a]$, B_2 $[y=c,\ x=b]$ les points fixes et $y=d$ l'équation de la droite A_3B_3.

Cherchons l'expression de

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y}=\frac{\beta}{y}=\frac{\alpha}{x}=1+m\,\frac{A_3B_3}{A_3B_3-A_2B_2},$$

en fonction de α, β, a, b, c et d.

On trouvera facilement (*fig.* 9) :

$$A_3B_3=\frac{d-\beta}{\beta-c}(a-b),\quad A_2B_2=b-a,$$

donc

$$A_3B_3-A_2B_2=\frac{d-c}{\beta-c}(a-b),\ \text{donc}\ \frac{A_3B_3}{A_3B_3-A_2B_2}=\frac{d-\beta}{d-c}.$$

On a donc :

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y}=1+m\frac{d-\beta}{d-c}=\frac{m(d-\beta)+d-c}{d-c}=\frac{A\beta+B}{C},$$

A, B, C étant des quantités connues ; donc

$$(1)\ \frac{\beta}{y}=\frac{A\beta+B}{C},\quad (2)\ \frac{\alpha}{x}=\frac{A\beta+B}{C},$$

d'où l'on tire :

$$(1')\ y=\frac{C\beta}{A\beta+B},\quad (2')\ x=\frac{C\alpha}{A\beta+B}.$$

D'après ces formules, l'on voit que :

1° Si le point de rencontre Y décrit une courbe du degré m, le point X_2 décrira de même une ligne du degré m. Par suite réciproquement, etc. On pourrait d'ailleurs le voir directement en tirant des relations (1′) et (2′), les valeurs de β et α en fonction de x et y.

2° Donc, si le point variable X_2 décrit une ligne droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira de même une ligne droite ou une conique.

Or, dans ce dernier cas, pour avoir le lieu décrit par le point de rencontre dans la figure primitive (car tout ce qui précède se fait dans la projection de cette figure primitive), il suffira de projeter centralement sur le plan de la figure primitive, la droite ou la conique lieu des points de rencontre; et l'on obtiendra pareillement dans la figure primitive, une droite ou une conique pour lieu des points de rencontre.

3° Donc, si le point X_2 décrit une droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira aussi une droite ou une conique.

Généralisation du théorème précédent.

En revenant une seconde fois sur ce théorème, j'ai trouvé qu'on pouvait le généraliser ainsi qu'il suit :

1° On a un faisceau de n droites concourant en un même point o de l'espace, mais d'ailleurs situées ou non dans le même plan ; on a aussi $n-1$ points dans l'espace, assujettis seulement aux conditions suivantes : le premier point X_1 est dans le plan de la première et de la deuxième droite du faisceau ; le $p^{ième}$ point est dans le plan de la $p^{ième}$ et de la $(p+1)^{ième}$ droite ; soient $X_1, \ldots X_p, \ldots X_{n-1}$ ces points. On projette suivant X_1 les points A_1, B_1, C_1,.... de la première du faisceau, en A_2, B_2, C_2,.... sur la deuxième du faisceau ; ces derniers sont projetés suivant X_2 en A_3, B_3, C_3 sur la troisième du faisceau, ainsi de suite. Soient A_n, B_n, C_n.... les points projetés suivant X_{n-1}, sur la $n^{ième}$ du faisceau, les lignes A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n.... concourront en un même point.

2° Si $n=3$, et si X_1 restant fixe, le point X_2 décrit dans le plan de la première et de la deuxième droite du faisceau, une droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira de même dans le plan de la première et de la troisième droite du faisceau, une droite ou une conique.

La démonstration se ramène facilement à la précédente, en projetant toutes les droites et tous les points de l'espace, sur le plan de la première et de la $n^{ième}$ droite.

Note. Cette généralisation donne immédiatement une démonstration *intuitive* de la première partie du théorème de M. Finck. En effet, soit une pyramide de n faces triangulaires coupée par m plans passant par la même droite, on obtient m polygones de n côtés; les m côtés qui se trouvent dans une même face se rencontrent évidemment en un même point, et les n points de rencontre sont situés sur la même droite, intersection des plans. Et réciproquement si $n-1$ de ces points de rencontre sont sur une même droite le $n^{ième}$ sera sur la même droite; en projetant la pyramide et les polygones, on obtient la propriété de *collinéation* énoncée ci-dessus. Appliquant à cette figure la méthode métamorphique (Voy. t. V, p. 497), on peut en déduire une foule d'autres propriétés; par exemple, en projetant la figure plane (fig. 5) sur une sphère, prenant le centre pour celui de projection, les droites deviennent des grands cercles de la sphère qui jouissent des mêmes propriétés de collinéation que les droites sur un plan. Quant à la seconde partie du théorème, elle est une conséquence du théorème généralisé de Braikenridge que M. Poncelet a traité avec une grande étendue, trop grande peut-être. En général, on remarque chez les écrivains qui s'occupent exclusivement de géométrie moderne, sans en excepter l'illustre Carnot, une tendance à une extrême prolixité. Ils se complaisent à accumuler propriétés sur propriétés, théorèmes sur théorèmes, tant et tant, qu'à la fin, comme dit un proverbe allemand, *les arbres empêchent de voir la forêt*.

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

La plupart des auteurs d'algèbre ont confondu l'élimination avec la résolution des équations simultanées. Il existe pourtant entre ces deux problèmes une différence essentielle : dans le premier, on se propose, plusieurs équations à pareil nombre d'inconnues étant données, en déduire l'équation finale, c'est-à-dire l'équation à une inconnue qui admet pour racines les valeurs de cette inconnue propres à vérifier les équations proposées, en même temps que des valeurs convenables des autres inconnues ; tandis que le second a pour objet la recherche des solutions des équations proposées. Il est vrai que pour résoudre ce dernier problème on commence ordinairement par faire une élimination ; mais d'une part cette élimination a un tout autre but que l'élimination proprement dite, attendu qu'on s'y propose de trouver non-seulement l'équation finale, mais encore les équations à deux, trois, quatre, etc., inconnues, qui servent à compléter la résolution ; et d'un autre, on conçoit aisément que la détermination des solutions puisse se faire sans passer par l'élimination ; il serait même plus logique, et peut-être plus simple, d'attaquer directement la résolution, ainsi que l'a proposé M. Sarrus dans le *Journal de mathématiques* de M. Liouville (t. VI, p. 171, 1841).

Je ne m'occuperai point ici de l'élimination proprement dite, ce premier problème peut être résolu maintenant d'une manière satisfaisante soit par la méthode de Bezout, soit par la méthode des fonctions symétriques généralisée par Poisson (*), soit même par la méthode du plus grand commun diviseur si remarquablement modifiée par M. Labatie dans le cas de deux équations à deux inconnues. (Voyez la seconde partie d'un mémoire de cet auteur, ou les éléments d'algèbre de M. Fink, p. 408 et suiv., seconde édition.) Du reste je me propose d'en faire l'objet d'un second travail ; je me bornerai à considérer la résolution des équations simultanées. La solution de ce second problème est beaucoup moins avancée que celle du premier ; comme je l'ai dit plus haut, elle consiste à remplacer d'abord le système des équations proposées par un ou plusieurs systèmes composés chacun d'une équation à une inconnue, d'une équation à deux inconnues, etc. Or cette substitution n'a encore été tentée que pour le cas de deux équations à deux inconnues ; et ce que l'on possède de plus satisfaisant pour ce cas simple, le théorème de MM. Labatie et Sarrus, laisse encore à désirer : on sait, en effet, qu'il n'est pas permis de conclure de la démonstration connue de ce théorème, que, si une solution se trouve plusieurs fois dans le système des équations proposées, elle se trouvera le même nombre de fois en somme dans les divers systèmes que l'on veut substituer au premier, ce qui est un véritable inconvénient dans certaines applications de l'élimination.

Le but principal de ce mémoire est de faire voir que le théorème de MM. Labatie et Sarrus s'étend aux solutions multiples ; je parviens en outre à lever les diverses difficultés qui se rapportent à ces solutions et qui jusqu'ici ont toujours

(*) *Journal de l'École polytechnique*, onzième cahier, 1802, p. 199.

embarrassé les auteurs. Avant d'énoncer les résultats auxquels j'ai été conduit, je crois nécessaire de rappeler rapidement l'origine de la méthode généralement suivie pour résoudre deux équations à deux inconnues, et de faire connaître les principaux efforts qui ont été tentés pour affranchir cette méthode des difficultés qu'elle présente.

Soient deux équations à deux inconnues x et y; pour qu'une valeur de y convienne à ces deux équations, il est nécessaire et il suffit qu'en la substituant dans leurs premiers membres, on fasse acquérir à ces premiers membres un diviseur commun, fonction de x, et ce commun diviseur égalé à zéro donne une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue. Donc, si regardant y comme connu, on cherche le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations proposées, on aura en égalant à zéro les deux derniers restes, d'une part l'équation finale en y et d'une autre l'équation à deux inconnues qui fournit les valeurs de x quand y est connu. Tel est le raisonnement qui a d'abord conduit à la méthode; mais il n'est pas besoin d'un grand effort d'attention pour reconnaître qu'il peut dans bien des cas être inexact. Supposons, en effet, qu'une des valeurs de y qui annulent le dernier reste, rende en même temps égal à zéro un des facteurs qui ont été introduits ou supprimés dans le courant du calcul, la valeur que prendra pour cette valeur de y l'avant-dernier reste, pourra très-bien ne pas être le plus grand commun diviseur des deux polynômes fonctions de x, obtenus en portant cette valeur de y dans les polynômes proposés; or c'est précisément sur cette hypothèse que repose la conclusion que l'on a tirée. Ainsi il n'est pas permis de dire que l'opération du plus grand commun diviseur appliquée aux premiers membres des équations proposées conduise immédiatement à la résolution de ces équations, comme on l'espérait d'abord; mais cette opération fait connaître une suite d'équations dont les degrés vont toujours en diminuant et dont les premiers membres sont liés aux premiers membres des équations proposées par des relations simples; et on doit naturellement se demander si on ne peut pas en tirer parti pour ramener la résolution du système des équations proposées à celle d'une suite d'autres systèmes de plus en plus simples, de manière à arriver ainsi de proche en proche à un système composé d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues. C'est ce que l'on a tenté de faire comme il suit.

Supposons d'abord que dans l'opération du plus grand commun diviseur on n'ait ni introduit ni supprimé de facteurs en y, on aura une suite d'égalités de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ B &= RQ_1 + R_1 \\ R &= R_1Q_2 + R_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n \end{aligned}$$

on verra alors aisément que les solutions du système $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système $B=0$, $R=0$; que les solutions de ce dernier système sont les mêmes que celles du système $R=0$, $R_1=0$, et ainsi de suite; enfin, que les solutions du système $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système $R_{n-1}=0$, $R_n=0$. C'est le résultat auquel nous étions parvenus par le premier raisonnement; ce qui, du reste, ne doit pas surprendre, puisque dans le cas que nous considérons on n'a ni introduit ni supprimé de facteur en y dans l'opération du plus grand commun diviseur.

Mais considérons le cas général, nous aurons alors les égalités :

$$
\begin{aligned}
cA &= Bq + Rr\\
c_1B &= Rq_1 + R_1r_1\\
c_2R &= R_1q_2 + R_2r_2\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
c_nR_{n-2} &= R_{n-1}q_n + r_n.
\end{aligned}
$$

Or on pourra bien dire, comme dans le cas précédent, que les solutions du système $cA = 0$, $B = 0$, sont les mêmes que celles du système $B = 0$, $Rr = 0$, que les solutions du système $c_1B = 0$, $R = 0$, sont les mêmes que celles du système $R = 0$, $R_1r_1 = 0$, etc. Mais comment, en général, les solutions du système $c_pR_{p-2} = 0$, $R_{p-1} = 0$, dépendent-elles des solutions des deux systèmes $c_p = 0$, $R_{p-1} = 0$, et $R_{p-2} = 0$, $R_{p-1} = 0$, et les solutions du système $R_{p-1} = 0$, $R_pr_p = 0$, des solutions des deux systèmes $R_{p-1} = 0$, $R_p = 0$, et $R_{p-1} = 0$, $r_p = 0$? Les opinions ont été partagées sur ce point; quelques auteurs, à la tête desquels il faut mettre M. Bret (*V.* le *Journ. de l'École polytechn.*, cah. 15, et les *Annales* de M. Gergonne, t. III), ont admis, *sans démonstration*, qu'un système de la forme $AB=0$, $C=0$, pouvait toujours être remplacé par les deux systèmes $A = 0$, $C = 0$, et $B=0$, $C=0$, que ces deux systèmes eussent ou non des solutions communes; d'autres auteurs, au contraire, ont prétendu que la substitution au système $AB = 0$, $C = 0$ des deux systèmes $A = 0$, $C = 0$, et $B = 0$, $C = 0$ n'était permise que lorsque ces deux derniers systèmes n'avaient pas de solutions communes, et que dans le cas contraire on ne devait prendre qu'une fois la solution commune. On doit remarquer, du reste, que cette dernière hypothèse, que l'on doit à M. Lefébure de Fourcy (*V.* la correspondance de l'*École polytechnique* (*)), et qui a été généralement adoptée

(*) T. II, p. 276.

dans l'enseignement, malgré la complication qu'elle apportait dans les calculs, devait, en effet, être préférée dans l'incertitude où l'on était de la justesse de la première ; car la seule erreur que pût produire son adoption consistait dans le degré de multiplicité des solutions, ce qui avait peu d'importance dans un grand nombre de cas. Néanmoins je décide la question en faveur de l'hypothèse de M. Bret ; après avoir donné une définition nette et précise des solutions multiples, je démontre rigoureusement que le système $AB = 0$, $C = 0$, peut, dans tous les cas, être remplacé par les deux systèmes $A = 0$, $C = 0$ et $B = 0$, $C = 0$; j'établis ensuite une seconde propriété, que l'on avait jusqu'ici regardée comme évidente, mais qui n'a pas moins besoin de démonstration que la première, quand on considère les solutions multiples ; elle consiste en ce que, si l'on a la relation $A = Bq + C$, les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sont les mêmes que celles du système $B = 0$, $C = 0$; ces deux lemmes admis, je complète la théorie de M. Bret, puis cherchant à simplifier les résultats qu'elle fournit, je suis conduit d'une manière naturelle, et pour ainsi dire inévitable, au théorème de MM. Labatie et Sarrus, qui se trouve ainsi établi pour les solutions multiples aussi bien que pour les solutions simples.

Je dois dire avant d'entrer en matière que je ne m'occuperai dans ce qui va suivre ni des solutions entièrement infinies, ni des solutions en partie finies et en partie infinies ; on sait, du reste, que ces solutions peuvent se déterminer directement. Je représenterai aussi, pour abréger, par $[A, B]$ l'ensemble des solutions finies du système $A = 0$, $B = 0$. Enfin je supposerai toujours les équations à coefficients numériques.

§ I^{er}. *Définition des solutions multiples. — Détermination du degré de multiplicité des solutions.*

Soient :

$$(1)\quad A = f(x, y) = 0, \qquad (2)\quad B = f(x, y) = 0,$$

deux équations à deux inconnues x et y, et dont les premiers membres ne contiennent ni facteurs fonction de x, ni facteurs fonction de y, ni facteurs fonction de x et y, ainsi qu'on peut toujours le supposer. Si l'équation (1) est du degré m en x, et l'équation (2) du degré $n \overline{\overset{=}{<}} m$, et que l'on résolve ces équations par rapport à x, on trouvera pour la première m racines :

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_m,$$

et pour la seconde n racines :

$$y'_1,\ y'_2,\ y'_3,\ \ldots\ y'_n,$$

toutes fonctions de y, et qui pourront être, selon la valeur attribuée à y, finies ou infinies, réelles ou imaginaires. Remarquons seulement que si une racine de l'une des équations de réelle devient imaginaire, le même fait se présentera pour une autre racine de la même équation, et que ces deux racines, en passant du réel à l'imaginaire, passeront nécessairement par l'égalité ; et que si, pour une certaine valeur de y, $y = b$, k racines de l'une des équations, de la première par exemple, deviennent infinies, ce qui arrivera lorsque les k premiers termes de cette équation, supposée ordonnée, s'annuleront pour $y = b$, les $m - k$ autres racines d'abord de la forme $\frac{0}{0}$, auront pour vraies valeurs les racines de l'équation obtenue en négligeant les k premiers termes de l'équation $A = 0$, et faisant dans les termes restants $y = b$. Ceci posé, supposons que $x = \alpha$,

$y=\beta$, forment une solution des équations proposées, c'est-à-dire représentent un système de valeurs de x et de y, vérifiant les équations proposées, si nous faisons $y=\beta$, dans les racines $y_1, y_2, \ldots y_m$ de l'équation (1), et dans les racines $y'_1, y'_2, \ldots y'_n$ de l'équation (2), un certain nombre de racines de l'une et de l'autre équation devront se réduire à α. Supposons que ces racines soient :

$$y_p, y_q, \ldots y_r,$$

et

$$y'_{p'}, y'_{q'} \ldots y'_{r'}.$$

Pour avoir le degré de multiplicité de la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, on formera avec $y_p, y_q, \ldots y_r$ et $y'_{p'}, y'_{q'}, \ldots y'_{r'}$, toutes les différences de la forme

$$y_p - y'_{p'},\ y_q - y'_{p'},\ \ldots;\ y_p - y'_{q'},\ y_q - y'_{q'},\ \ldots;\ \ldots$$

et la somme des degrés d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ (*) de ces différences, ou, ce qui revient au même, le degré d'infiniment petit de leur produit,

$$(y_p - y'_{p'})(y_q - y'_{p'}) \ldots (y_p - y'_{q'})(y_q - y'_{q'}) \ldots,$$

sera le degré de multiplicité cherché.

On peut encore obtenir ce degré de multiplicité d'une autre manière, comme il suit. Supposons d'abord que l'hypothèse $y=\beta$ n'annule pas le coefficient a_0 du terme de l'équation (1), qui contient x à la plus haute puissance, auquel cas les m racines $y_1, y_2, \ldots y_m$ seront finies pour $y=\beta$. Comme l'on a généralement

$$A=f(x,y)=a_0\,(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_m),$$

(*) On appelle degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ d'une fonction de y, $\varphi(y)$ qui s'annule avec $y-\beta$, l'exposant m de la puissance de $y-\beta$ pour laquelle la vraie valeur de $\frac{\varphi(y)}{(y-\beta)^m}$ correspondante à $y=\beta$, est différente de zéro et de l'infini.

on aura aussi, en substituant successivement $y'_{p'}, y'_{q'} \ldots y'_{r'} \ldots$ à la place de x,

$$f(y'_{p'}, y) = a_0 (y'_{p'} - y_1)(y'_{p'} - y_2) \ldots (y'_{p'} - y_m)$$
$$f(y'_{q'}, y) = a_0 (y'_{q'} - y_1)(y'_{q'} - y_2) \ldots (y'_{q'} - y_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(y'_{r'}, y) = a_0 (y'_{r'} - y_1)(y'_{r'} - y_2) \ldots (y'_{r'} - y_m),$$

et en multipliant

$$(a) f(y'_{p'}, y)\, f(y'_{q'}, y) \ldots f(y'_{r'}, y) =$$
$$= a_0^{\nu} (y'_{p'} - y_1)(y'_{p'} - y_2) \ldots (y'_{q'} - y_1)(y'_{q'} - y_2) \ldots$$
$$\ldots (y'_{r'} - y_1)(y'_{r'} - y_2) \ldots$$

ν étant le nombre des racines $y'_1, y'_2 \ldots y'_n$, qui se réduisent à α quand on fait $y = \beta$. Or les seuls facteurs du second membre infiniment petits avec $y - \beta$, sont $y_p - y'_{p'}$, $y_q - y'_{p'}, \ldots y_p - y_{q'}, y_q - y_{q'}; \ldots$ nous conclurons de là que le degré d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ du premier membre, aussi bien que celui du produit

$$(b) \quad (y_p - y'_{p'})(y_p - y'_{q'}) \ldots (y_q - y'_{p'})(y_q - y'_{q'}) \ldots$$

représente le degré de multiplicité de la solution $x = \alpha$, $y = \beta$.

Supposons maintenant que le coefficient a_0 du premier terme de l'équation (1) s'annule pour $y = \beta$, et que par conséquent quelques-unes des racines $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ deviennent infinies pour la même hypothèse, nous ne pourrons plus dire alors que les seuls facteurs infiniment petits avec $y - \beta$ du second membre de l'équation (a) soient $y_p - y'_{p'}$, $y_p - y'_{q'}, \ldots y_q - y'_{p'}, y_q - y'_{q'}, \ldots$, puisque a_0^{ν} sera infiniment petit ; néanmoins, comme il y aura en même temps dans le second membre des facteurs infiniment grands, le degré d'infiniment petit de ce second membre sera toujours le même que celui du produit (b). Pour le faire voir, je remarque que si dans une équation à une inconnue x

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + V = 0,$$

dont les coefficients A, B, ... V dépendent d'un paramètre y, le coefficient du premier terme avec ou sans quelques coefficients suivants, se réduit à zéro pour une certaine valeur β du paramètre y, ce qui entraîne pour cette valeur de y l'existence d'un certain nombre de racines infinies dans cette équation ; le produit par A du produit de l'expression algébrique des racines qui deviennent infinies sera une quantité déterminée différente de zéro et de l'infini pour $y = \beta$. Soient, en effet, $x_1, x_2, \dots x_m$ l'expression algébrique des racines de l'équation proposée, et supposons que x, x_1, x_2 soient les racines qui deviennent infinies pour $y = \beta$. On a, quel que soit y,

$$Ax\,x_1x_2 \dots x_m = (Ax\,x_1x_2)\,(x_3 \dots x_m) = V\,;$$

faisons converger y vers β, $(x_3 \dots x_m)$ et V convergeront vers des quantités déterminées; il en sera donc de même de (Axx_1x_2). Ce raisonnement est en défaut, il est vrai, lorsque parmi les racines $x_3, \dots x_m$ il s'en trouve qui deviennent nulles pour $y = \beta$, ou, ce qui revient au même, lorsque V est infiniment petit avec $y - \beta$, mais on peut toujours écarter ce cas, s'il se présentait, en augmentant toutes les racines d'un nombre fini convenable. Ceci posé, nous voyons facilement que le degré d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ de a_0^{ν}, sera toujours détruit par le degré d'infiniment grand des facteurs infinis qui se trouvent dans le second membre de l'égalité (a), et par conséquent que le degré d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ de ce second membre est toujours le même que celui du produit (b).

(*La suite prochainement.*)

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1846.

Mathématiques spéciales.

PAR M. PAUL SERRET,
Élève.

Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Soit MNPQ le quadrilatère formé par la jonction des points de contact, on propose de démontrer (*fig.* 9) :

1° Que les deux côtés consécutifs MN et NQ sont également inclinés sur la tangente AB qui passe par le point N, qui leur est commun.

2° Que leur somme MN + MQ est constante, quel que soit le rectangle.

3° Que toutes ces droites telles que QM, NM, sont toujours tangentes à une même ellipse décrite des mêmes foyers que la proposée.

Lemme. Dans la *fig.* 9, MN et NQ sont respectivement parallèles aux diagonales BD et AC (*fig.* 10).

Cette proposition, vraie pour un parallélogramme quelconque, se démontre facilement par la considération, que tout parallélogramme $abcd$ circonscrit au cercle est un losange (*fig.* 10); que par suite, comme l'on a : $ad = ab$, $am = an$, mn est parallèle à bd; de même nq est parallèle à ac.

Donc, si l'on projette la figure (b) de manière à obtenir la figure (10), les lignes parallèles mn et bd, nq et ac se projetteront suivant les parallèles MN et BD, NQ et AC de la figure (9). Ce qui démontre le lemme énoncé, qui va nous servir dans la démonstration des deux premières parties de la question. Ce lemme pourrait aussi se démontrer par le calcul.

Première partie. Les droites MN, NQ sont également inclinées sur la tangente AB en N.

En effet, la figure ABCD étant un rectangle, les diagonales AC et BD sont également inclinées sur le côté AB; donc il en est de même de leurs parallèles respectives.

N. B. — Si la figure ABCD était un losange au lieu d'être un rectangle, l'on verrait d'une manière analogue que les droites MN, NQ feraient avec la tangente en N des angles complémentaires.

Deuxième partie. La somme MN + NQ est constante.

En effet, toujours d'après le lemme démontré, l'on a :

1° Dans le triangle DAB,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DB} :: \mathrm{AN} : \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}}.\mathrm{AN};$$

2° Dans le triangle CAB,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DB} :: \mathrm{NB} : \mathrm{NQ} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}}.\ \mathrm{NB},\ \text{car } \mathrm{DB} = \mathrm{AC}.$$

Donc, comme AN + NB = AB, on a :

$$\mathrm{MN} + \mathrm{NQ} = \mathrm{DB} = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

N. B. — La valeur de la somme constante est $2\sqrt{a^2+b^2}$, a et b désignant les demi-axes de la courbe.

Troisième partie. Toutes les droites telles que mn sont tangentes à une ellipse de mêmes foyers que la proposée.

α et β étant les coordonnées de A, on a $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$. L'équation de mn avec la relation $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$.

Soient p et p' les perpendiculaires abaissées des deux foyers sur mn, on aura :

$$p = \frac{b^2(c\alpha - a^2)}{\sqrt{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}}, \quad p' = -\frac{b^2(c\alpha + a^2)}{\sqrt{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}},$$

d'où

$$pp' = b^4 . \frac{a^4 - c^2\alpha^2}{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2};$$

remplaçant β^2 par $a^2 + b^2 - \alpha^2$, il viendra en supprimant $a^4 - c^2\alpha^2$, facteur commun aux deux termes :

$$pp' = \frac{b^4}{a^2 + b^2},$$

valeur indépendante de α, ou de la position particulière du point A, auquel correspond la droite MN ; donc, etc.

NOTE

sur les deux expressions $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{a}{a+b}$.

PAR M. ARISTIDE MARRE.

—

Soit proposé de trouver la somme de toutes les puissances à l'infini d'une fraction proprement dite.

Un moyen rapide à employer est celui qui est donné par l'illustre et infortuné Saunderson. En effet, un seul trait de plume suffit, comme il le dit, pour obtenir la somme demandée.

Exemples. « Quelle est la somme de toutes les puissances à l'infini de la fraction $\frac{3}{5}$, puis de la fraction $\frac{4}{7}$, enfin de la fraction $\frac{1}{2}$? Au lieu de $\frac{3}{5}$, j'écris $\frac{3}{3+2}$, et la réponse est

$\frac{3}{2}$. Au lieu de $\frac{4}{7}$, j'écris $\frac{4}{4+3}$, et la réponse est $\frac{4}{3}$. Au lieu de $\frac{1}{2}$, j'écris $\frac{1}{1+1}$, et la réponse est 1. En général, toute fraction moindre que l'unité pouvant être représentée par $\frac{a}{a+b}$, la somme de toutes les puissances à l'infini de cette fraction sera égale à $\frac{a}{b}$. »

Démonstration. Soit $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dans laquelle la raison est égale au premier terme, particularité qui se présente dans notre question où les différents termes de la progression sont les puissances successives de la fraction $\frac{a}{a+b}$.

Au lieu de α, substituons donc sa valeur $\frac{a}{a+b}$, et il vient pour la somme de toutes les puissances à l'infini de cette fraction :

$$\frac{\frac{a}{a+b}}{1-\frac{a}{a+b}} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous ferons remarquer aussi en passant que ces deux expressions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{a+b}$ jouissent de la propriété suivante :

Elles sont les formes générales respectives des valeurs des inconnues x et y dans l'équation $xy = x - y$, c'est-à-dire les formules qui fournissent les quantités telles que leur produit égale leur différence.

THÉORIE

des rapports projectifs, sinussiques, segmentaires, triangulaires, pyramidaux ; involutions projectives.

—

1. Soit un faisceau de $2n$ droites, situées dans un même plan, partant d'un même point, et coupé par une transversale. Prenant ces droites 2 à 2, on obtient $n(2n-1)$ angles, autant de triangles et autant de segments sur la transversale, servant de bases.

2. Prenons n de ces triangles, mais tellement que les côtés renferment les $2n$ droites du faisceau. Il est évident que le même côté ne doit pas être répété. Le nombre total de ce genre d'arrangements est égal au produit continuel des nombres impairs depuis 1 jusqu'à $2n-1$. En effet, représentons ces côtés par a_1, $a_2 \ldots a_{2n}$; *combinons*-les 2 à 2; nous aurons un premier groupe commençant par a_1, de $2n-1$ termes; un second groupe, commençant par a_2, de $2n-2$ termes, et enfin le dernier groupe, composé du terme unique $a_{n-1}a_n$. Pour former un arrangement triangulaire, prenons la première combinaison a_1a_2 du premier groupe; on ne peut la joindre avec aucune du second groupe, mais à une combinaison quelconque du troisième groupe; celle-ci exclut le quatrième groupe, et ainsi de suite; donc a_1a_2 fournit $1.3.5\ldots 2n-3$ arrangements, autant a_1a_3, etc.; donc le nombre total est $1.3.5\ldots 2n-1 = p$.

Autrement. Soit P_{2n} le nombre de ces arrangements pour $2n$ triangles; a_1a_2 se combinant avec les $2n-2$ côtés restants, donne P_{2n-2} arrangements, de même a_1a_3 etc. ; donc $P_{2n}=(2n-1)\,P_{2n-2}$, d'où l'on déduit le nombre indiqué.

3. *Rapport projectif triangulaire.* Concevons que dans chaque arrangement on fasse le produit des aires des n triangles qui y entrent, on aura p de ces produits, qui fournissent $p\,(p-1)$ rapports par quotient, qu'on peut partager en $\frac{p(p-1)}{2}$, indépendants les uns des autres, et $\frac{p(p-1)}{2}$, respectivement inverses des premiers. Ce sont ces rapports que nous désignons sous le nom de *projectifs triangulaires*. L'épithète *projectif* sera expliquée plus bas.

Observation. Plusieurs de ces rapports ayant des facteurs communs aux deux termes, se réduisent et sont relatifs à des faisceaux ayant moins que $2n$ côtés ; ces rapports doivent être rejetés, ce qui en réduit considérablement le nombre, comme nous verrons plus bas.

Rapport projectif sinussique. Remplaçant dans le *rapport triangulaire* chaque aire par le demi-produit des deux côtés et le sinus de l'angle compris, ces côtés se trouvant en même nombre comme facteurs, dans les deux termes du rapport, s'en iront, et il ne reste qu'un rapport entre des *sinus*.

Rapport projectif segmentaire. Remplaçant dans le *rapport triangulaire* chaque aire par le demi-produit de la hauteur, commune à tous, par les segments qui servent de bases, la hauteur s'en va, et il ne reste qu'un rapport entre des *segments*.

4. Ces trois sortes de rapports ne sont au fond qu'un seul et même rapport auquel nous avons donné des noms différents, selon des points de vue différents. Deux quelconques d'entre eux sont des conséquences immédiates du troisième.

5. Supposons qu'on coupe le faisceau par deux transversales ; un rapport segmentaire de la première transversale

entraîne le même rapport entre les sinus, et celui-ci établit le même rapport entre les segments de la seconde transversale ; donc le même rapport segmentaire existe pour les deux transversales, mais l'une de ces transversales est la projection *perspective* de l'autre ; de là ce théorème :

Le rapport segmentaire d'une droite se projette perspectivement sur un plan quelconque, sans changer de valeur.

De là l'origine de l'épithète *rapport projectif.*

Observation. Il est évident que le théorème snbsiste lorsque le point de concours s'éloigne à l'infini et que les droites projetantes deviennent parallèles.

Corollaire 1. Les rapports sinussiques se projettent perspectivement sur un plan sans changer de valeur.

Corollaire 2. Lorsqu'une transversale devient parallèle à une droite du faisceau, parmi les $n(2n-1)$ segments, $2n-1$ deviennent infinis ; un de ces derniers segments se trouvant au numérateur et l'autre au dénominateur d'un rapport projectif, il se simplifie et ne contient plus dans chaque terme que $n-1$ facteurs ; mais ce dernier rapport simplifié, généralement parlant, n'est plus projectif.

6. *Application.* Soit $n=2$; désignons le sommet commun par la lettre O, et par A_1, A_2, A_3, A_4 les points où la transversale coupe successivement les quatre droites du faisceau ; on a $p=1.3$; $p(p-1)=6$; ainsi on a six triangles, autant de sinus, autant de segments. Le nombre d'arrangements dont il est question au § 2 est ici $1.3=3$. Ces arrangements sont, en substituant les segments aux triangles, $A_1A_2.A_3A_4$; $A_1A_3.A_2A_4$; $A_1A_4.A_2A_3$, qui donnent six rapports projectifs, savoir :

$$\frac{A_1A_2.A_3A_4}{A_1A_3.A_2A_4};\quad \frac{A_1A_2.A_3A_4}{A_1A_4.A_2A_3};\quad \frac{A_1A_3.A_2A_4}{A_1A_4.A_2A_3}.$$

et les trois rapports inverses.

Le second de ces rapports, lorsqu'il est égal à l'unité, a été beaucoup étudié par les anciens sous le nom de rapport *harmonique*, et M. Chasles a donné à ce même rapport projectif, lorsqu'il n'est pas égal à l'unité, le nom très-convenable de rapport *anharmonique*, et a fondé dessus d'importants et féconds théorèmes. Mais la nature projective de ce rapport est déjà énoncée dans Pappus (liv. 7, prop. CXXIX).

7. *Théorèmes de Fontaine et d'Euler*. Il existe entre ces trois rapports une relation remarquable, signalée par Euler, mais qui avait déjà été énoncée sous une forme plus générale par Fontaine. Voici la relation :

$$\frac{A_1A_2 . A_3A_4}{A_1A_3 . A_2A_4} + \frac{A_1A_4 . A_2A_3}{A_1A_3 . A_2A_4} = 1.$$

Nous laissons aux élèves le soin d'en trouver la démonstration. Cette relation est un corollaire du théorème *triangulaire* de Fontaine (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 154), et qui peut s'énoncer ainsi :

Un point situé dans le plan d'un quadrilatère étant considéré comme le sommet commun de six triangles ayant pour bases les côtés et les diagonales du quadrilatère, le produit des aires des triangles qui ont pour bases les diagonales est égal au produit des triangles qui ont pour bases deux côtés opposés plus ou moins le produit des triangles qui ont pour bases les deux autres côtés, selon que le point est hors du quadrilatère ou dans le quadrilatère.

Raisonnant comme ci-dessus, on voit que la relation subsiste aussi entre les sinus des angles du faisceau des quatre droites qui vont aux angles du quadrilatère; donc elle s'applique aux segments de la transversale qui coupe le faisceau; et c'est précisément le théorème d'Euler, lequel étant admis peut faire retrouver celui de Fontaine, qui n'est, comme nous avons dit à l'endroit ci-dessus cité, qu'une interprétation géométrique d'une propriété des *déterminantes*. Remarquons derechef à cette occasion qu'une *déterminante* dont chaque terme a deux facteurs peut représenter le double de *l'aire d'un triangle*, et une déterminante à *trois facteurs*, le sextuple du volume d'une pyramide; à toutes les relations nombreuses que l'on connaît maintenant sur ces *déterminantes*, correspondent donc autant de théorèmes de géométrie, et *vice versâ*. Aussi le premier analyste de notre époque recommande sans cesse la culture de la géométrie, et nous avons entendu le célèbre professeur de géométrie supérieure recommander, dans une leçon inaugurale, la culture de l'analyse algébrique; nombre et ligne, deux instruments également nécessaires, également admirables.

8. *Théorème de Ptolémée.* Si on prend un quadrilatère inscriptible, et un point fixe sur la circonférence, le diamètre étant pris pour unité, chaque corde est le sinus de la moitié de l'arc qu'elle sous-tend; et par conséquent le théorème sinussique de Fontaine se traduit en celui-ci: *dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés;* théorème de Ptolémée que Legendre a fait revivre dans la géométrie.

9. *Théorème général sur les polygones.* Soient $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{2n}$ un polygone inscriptible de $2n$ sommets. Si l'on mène d'un point de la circonférence des droites à tous les sommets, et qu'on coupe le faisceau par une transversale; si l'on forme un rapport projectif segmentaire, il subsistera aussi entre les côtés et diagonales correspondants du polygone, et réciproquement, si un tel rapport existe entre les côtés et les diagonales du polygone, il existe aussi entre les segments de la transversale.

Démonstration. Les côtés du polygone peuvent être considérés comme les sinus des angles correspondants du faisceau.

10. *Théorème sur les coniques de M. Chasles.* Si d'un point quelconque d'une conique on mène à quatre autres points *fixes* de ce périmètre quatre droites, le rapport anharmonique des sinus est constant, quelle que soit la position du point fixe.

Démonstration. Toute conique peut être considérée comme la projection perspective d'un cercle ; or, la proposition est d'une évidence intuitive dans le cercle ; et le rapport anharmonique étant projectif, la proposition est donc vraie pour une conique quelconque.

Observation. C'est sur ce théorème que M. Chasles a fondé toute la théorie des coniques ; théorème qui est applicable à un polygone inscrit quelconque (*voir* § 9).

11. *Application.* $n=3$; $p=1.3.5=15$; $\frac{p(p-1)}{2}=105$; ces rapports projectifs comprennent aussi ceux qui sont relatifs aux faisceaux de quatre droites ; ces six droites donnent quinze faisceaux quaternaires, et chacun de ces faisceaux fournit trois rapports projectifs ; il faut donc retrancher quarante-cinq rapports projectifs pour avoir ceux qui n'appartiennent qu'à six ; il reste donc soixante rapports projectifs : ainsi en désignant les points où la traversale coupe le faisceau successivement par les nombres 1,2,3,4,5,6, on aura ces quatre rapports segmentaires projectifs, ayant tous pour dénominateur le produit ternaire 12.34.56, et pour dénominateurs 13.25.46 ; 14.26.35 ; 15.23 46 ; 16.23.45 ; ils sont uniquement relatifs aux faisceaux de six, et il y en a encore cinquante-six de ce genre.

12. *Théorème sur les droites dans l'espace.* Soient A, B, C trois droites situées dans l'espace d'une manière quelconque. Sur la première droite A prenons $2n$ points désignés successivement par A_1, A_2, $A_3 \ldots A_{2n}$; par chacun de ces points menons une droite rencontrant les deux autres B et C ; dési-

gnons les points de rencontre respectivement par B_1, $B_2 \ldots B_{2n}$; C_1, $C_2 \ldots C_{2n}$; un rapport segmentaire projectif pris sur l'une de ces droites aura même valeur sur les deux autres.

Démonstration. Projetons toute la figure orthogonalement sur un plan perpendiculaire à la droite A; le système des transversales $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2 \ldots A_{2n}B_{2n}C_{2n}$, se projettera suivant un faisceau de $2n$ droites ; et le rapport segmentaire pris sur $B_1 \ldots B_{2n}$ conserve la même valeur sur la projection ; et de même pour $C_1 \ldots C_{2n}$. Or dans la projection les rapports sont égaux ; ils le sont donc aussi dans l'espace ; donc, etc.

13. *Rapports projectifs pyramidaux*. Prenons deux points A_p, A_q de la première droite, et les deux points correspondants B_p, B_q sur la seconde droite. Ces quatre points sont les sommets d'une pyramide triangulaire dont le volume est égal au $\frac{1}{6}$ du produit des deux segments A_pA_q et B_pB_q par leur plus courte distance et par le sinus de l'angle d'inclinaison. Or ces deux derniers facteurs restent les mêmes, quels que soient les indices p et q ; en multipliant donc le rapport segmentaire relatif à A avec le rapport segmentaire relatif à B, on peut remplacer le produit des deux segments correspondants par le volume de la pyramide correspondante, et on obtient un rapport pyramidal égal à celui qu'on obtient en combinant la droite A avec la droite C, ou B avec C ; en ce sens les rapports sont projectifs, et pour les droites dans l'espace, les volumes des pyramides sont analogues aux aires des triangles dans le plan.

(*La suite prochainement.*)

SECONDE NOTE SUR CETTE QUESTION :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation admette un nombre donné de racines égales entre elles.

—

Si je reviens sur une question déjà traitée (tome I^{er}, page 90), ce n'est pas que sa difficulté mérite qu'on s'en occupe deux fois ; certes, après avoir lu ce second article, on sera bien autorisé à croire qu'elle tient une trop grande place, même, dans un recueil destiné à des commençants : ce serait aussi mon avis, si tous ceux qui se sont proposé de la résoudre étaient demeurés d'accord sur sa solution ; mais il n'en est pas ainsi.

Une des méthodes suivies pour parvenir aux conditions cherchées conduit à un résultat qui a semblé paradoxal ; déjà on en avait donné une explication lorsque j'en ai cherché une autre (tome I^{er}, page 92) : pour rejeter la première, j'avais alors des raisons que je trouve encore bonnes aujourd'hui, quoique cette même explication ait été, depuis, reproduite dans plusieurs ouvrages justement estimés, et enseignée dans quelques colléges par des professeurs dont le mérite est incontestable.

On comprend sans doute que le motif, fondé ou non, qui m'a déterminé à remplacer ainsi une démonstration par une autre, ne consiste pas entièrement dans une préférence accordée à telle ou telle forme de raisonnements, à tel ou tel ordre d'idées, à un mode particulier d'exposition dont le choix n'admettrait pour arbitre que le bon goût. Ces deux démonstrations présentent une différence plus facilement saisissable : fondées toutes deux sur le même principe, elles s'écartent assez l'une de l'autre dans l'interprétation de ses conséquences pour aboutir finalement à des conclusions contradictoires. Des dissidences de cette nature, dans une science qui ne se prête guère à des controverses, révèlent la présence d'un paralogisme. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'examiner de quel côté il se trouve, en reprenant une question dont les proportions se sont momentanément agrandies de tous les égards que l'on doit à la logique.

J'énoncerai d'abord les principes adoptés d'un commun accord, de manière à éviter toute espèce d'équivoque ; puis, je parlerai des conséquences qu'ils ont dans l'opinion que je réfute ; j'ajouterai ensuite quelques développements à ma première note sur les différentes manières de traiter la question proposée.

1. Lorsqu'une équation, $f(x)=0$, a un certain nombre, n, de racines égales entre elles, le premier membre $f(x)$ de cette équation et sa dérivée $f'(x)$ ont un commun diviseur d, du degré $(n-1)$, qui est une puissance exacte de ce degré.

Si l'équation n'admet pas d'autres racines égales, le diviseur commun d est le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$.

Réciproquement, lorsque le premier membre, $f(x)$, d'une équation $f(x)=0$, et sa dérivée $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, qui est une puissance exacte de ce degré, l'équation a n racines égales.

Si le diviseur commun d, du degré $(n-1)$, est le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$, l'équation ne peut admettre plus de n racines égales.

De là on peut, sans aucun doute, conclure que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation $f(x)=0$ admette un nombre donné n de racines égales, et pas davantage, s'obtiendront en exprimant rigoureusement que le premier nombre $f(x)$ de cette équation, et sa dérivée $f'(x)$, ont un commun diviseur d du degré $(n-1)$, qui est : 1° leur plus grand commun diviseur ; 2° une puissance exacte du degré $(n-1)$.

Alors, pour obtenir les conditions cherchées, on divise $f(x)$ par $f'(x)$, puis $f'(x)$ par le reste de la première division, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, au moyen de ces divisions successives, on soit parvenu à un reste r du degré $(n-2)$; le diviseur correspondant d sera du degré $(n-1)$. On égale à zéro les coefficients des différentes puissances de x dans le reste r, ce qui donne $(n-1)$ équations de conditions entre les coefficients de la proposée.

Ces $(n-1)$ équations expriment évidemment des conditions nécessaires pour que le plus grand commun diviseur de $f(x)$, $f'(x)$ soit le polynôme d du degré $(n-1)$; mais elles ne donnent l'expression exacte des conditions suffisantes qu'autant que l'on satisfasse à ces $(n-1)$ équations de manière à ne pas annuler à la fois tous les coefficients du polynôme d qui précède r dans les divisions qu'on a faites ; car il est évident que si tous les coefficients du polynôme d se réduisent à zéro, le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f'(x)$ sera d'un degré supérieur à $(n-1)$.

Il reste encore à exprimer que le diviseur d est une puissance exacte du degré $(n-1)$. A cet égard, voici ce que j'admets. Lorsque les coefficients d'un polynôme du degré $(n-1)$ en x sont entièrement indépendants les uns des autres ; lorsqu'ils ne sont liés ensemble par aucune relation : pour exprimer que ce polynôme devient une puissance exacte du degré $(n-1)$, il faut établir entre ses coefficients $(n-2)$ relations distinctes.

II. J'arrive maintenant aux conséquences qu'on a voulu déduire de ces principes.

Après avoir supposé que le nombre n est plus grand que *deux*, et moindre que le degré de l'équation proposée, $f(x)=0$, on a dit :

Les $(n-1)$ équations de conditions obtenues en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$, exprimant uniquement que $f(x)$ et $f'(x)$ ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, conviennent également aux cas où l'équation proposée devrait avoir $(n-1)$ racines doubles; ou $(n-3)$ racines doubles et une racine triple; ou $(n-4)$ racines doubles et une racine quadruple; ou, etc. : elles sont donc insuffisantes; il faut encore exprimer que le diviseur d du degré $(n-1)$ est une puissance exacte de ce degré. On obtiendra *ainsi* $(n-2)$ *nouvelles* équations de conditions, de sorte qu'on en trouvera en tout $(n-1)+(n-2)$, ou $2n-3$.

Afin d'expliquer pourquoi on trouve ainsi $(2n-3)$ différentes équations de conditions, tandis que d'autres méthodes en donnent seulement $(n-1)$, on ajoute :

Puisque les $(n-1)$ équations de conditions obtenues, en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$, expriment uniquement que le reste précédent d du degré $(n-1)$ est commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$, rien n'indique que l'équation $d=0$, formée en égalant à zéro le commun diviseur, ait des racines égales entre elles. Chacune des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ de cette équation, $d=0$, entrera donc deux fois dans la proposée $f(x)=0$. On voit alors que cette dernière équation revient à

$$(x-\alpha_1)^2\,(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_{n-1})^2.X=0.$$

Or, si l'on pose $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}$ (au moyen des $(n-2)$ équations qui expriment que d devient une puissance exacte), $f(x)$ deviendra $(x-\alpha_1)^{2n-2}X$, et on a ainsi exprimé que la proposée a, non pas n, mais $(2n-2)$ racines égales : ce qui exige effectivement $(2n-3)$ équations de conditions, comme on le sait d'ailleurs.

C'est là une explication que je ne puis admettre : on verra bientôt pourquoi

Je suppose, par exemple, que l'équation proposée soit du vingtième degré, et qu'on veuille trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle ait 19 racines égales entre elles. Dans ce cas, $n=19$; le reste r est du 17^{ième} degré, le diviseur d du 18^{ième}, et $2n-3=35$.

Suivant l'explication dont il s'agit, on trouvera 35 conditions différentes entre les coefficients de l'équation (qui sont seulement au nombre de 20) ; puisque, en exprimant que d est une puissance exacte du 18^{ième} degré, on obtient 17 conditions *nouvelles*, après en avoir déjà obtenu 18 pour exprimer que $r=0$. Et, afin de rendre compte de ce résultat, on devra dire : les 18 relations qui donnent $r=0$, n'indiquant *en rien* que l'équation $d=0$ ait des racines égales, chacune des 18 racines α_1, α_2, etc., de $d=0$, entre deux fois dans l'équation proposée (dont le degré est 20), qui, alors, devient, etc., etc.

Mais je ne veux pas, en insistant sur des résultats semblables, faire perdre à la question son côté sérieux. Il est trop évident qu'on ne peut établir, *comme règle générale*, que la méthode suivie pour parvenir aux conditions cherchées donnera $(2n-3)$ conditions différentes, et $(2n-2)$ racines égales, puisque le nombre $(2n-2)$ peut être supérieur au degré de l'équation proposée. J'admettrai donc qu'on ait seulement voulu parler du cas particulier où $(2n-2)$ ne surpasse pas le degré de l'équation ; je supposerai que cette restriction soit implicitement comprise dans le raisonnement qui a conduit aux valeurs $(2n-3)$, $(2n-2)$; mais au moins, cette fois, les conclusions du raisonnement seront-elles confirmées par l'exemple? Il n'en est encore rien. En effet, prenons pour exemple l'équation du quatrième degré :

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

et supposons $n=3$, il en résultera $2n-2=4$.

Pour parvenir aux conditions cherchées, on divisera d'abord le premier membre de l'équation par sa dérivée, puis la dérivée par le reste obtenu.

La première de ces divisions conduit au reste

$$(8B-3A^2)x^2+(12C-2AB)x+16D-AC,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$px^2+qx+r,$$

en posant :

$$8B-3A^2=p,\quad 12C-2AB=q,\quad 16D-AC=r.$$

Le reste de la seconde est :

$$(2Bp^2-4pr-3Apq+4q^2)x+Cp^2-3Apr+4qr.$$

Ce dernier doit être nul, indépendamment de toute valeur attribuée à x; il faut d'ailleurs que le reste précédent soit un carré exact; on a donc :

$$2Bp^2-4pr-3Apq+4q^2=0\ldots\ldots (1)$$
$$Cp^2-3Apr+4qr=0\ldots\ldots (2)$$
$$q^2-4pr=0\ldots\ldots (3)$$

Les équations (1)....(3) sont bien ces $(2n-3)$ équations dont on a dit : « Elles expriment que la proposée a non pas n, mais $(2n-2)$ racines égales. » Si on a eu raison de le dire, les équations (1)....(3) doivent exprimer que la proposée $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ a non pas *trois*, mais *quatre* racines égales entre elles. Alors il faut que les valeurs qui satisfont aux conditions (1)....(3) réduisent à zéro les coefficients p, q, r, du diviseur px^2+qx+r, car autrement la proposée ne pourrait avoir quatre racines égales. Or il existe au contraire une infinité de manières différentes de satisfaire aux trois conditions, sans annuler les coefficients p, q, r, comme il est facile de s'en assurer. Par exemple, posons :

$$p=-27, q=-54, r=-27, A=1, B=-3, C=-5, D=-2,$$

les premiers membres des relations (1)....(3) se réduisent identiquement à zéro, et la proposée, en prenant la forme $(x+1)^3(x-2)=0$, devient une équation qui a non pas *quatre* mais *trois* racines égales.

Voilà déjà un résultat directement contraire aux conclusions du raisonnement : ce ne sera pas le seul qui viendra contredire une argumentation formée d'idées mises à la suite les unes des autres sans liaison réelle. Nous en donnerons la preuve, après avoir préalablement établi un fait que le calcul rend incontestable.

Les équations (1), (2) obtenues en égalant à zéro les deux coefficients du reste du premier degré, conduisent à celles-ci :

$$\left.\begin{array}{c} p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0 \\ (q^2-4pr)(2q-Ap)=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha)\ (^*)$$

(*) En effet, les relations $8B-3A^2=p$, $12C-2AB=q$ (page 80), donnent :

$$B=\frac{p+3A^2}{8},\quad C=\frac{pA+3A^3+4q}{48}.$$

Reportez ces valeurs de B et C dans les équations (1), (2); elles deviendront d'abord :

$$p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0\ldots\ldots (4),$$
$$Ap^3+3A^3p^2+4qp^2-144Apr+192.qr=0\ldots\ldots (5).$$

Multipliez l'équation (4) par $Ap+4q$, l'équation (5) par p; puis, retranchez le second produit du premier, et il viendra, toute réduction faite :

$$(q^2-4pr)(2q-Ap)=0.$$

Or ces dernières se partagent évidemment en deux systèmes qui sont :

$$\left.\begin{array}{c} p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0 \\ q^2-4pr=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(\delta)$$

$$\left.\begin{array}{c} p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0 \\ 2q-Ap=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(\gamma)$$

Les deux équations du premier, (δ), sont les équations de conditions cherchées. Car toute solution du système (δ), satisfaisant aux conditions (1) et (2), annule le reste du premier degré ; et par suite, donne au premier membre de la proposée et à sa dérivée, un commun diviseur px^2+qx+r, qui est du second degré (*). De plus, ce diviseur commun est un carré.

Réciproquement, pour que la proposée et sa dérivée aient un commun diviseur qui soit un carré, il faut satisfaire aux deux équations (δ). En effet, il est d'abord évident qu'on ne peut obtenir un diviseur commun du second degré, qu'en satisfaisant à l'un ou à l'autre des systèmes (δ), (γ). Or aucune solution du second (γ) ne donne un carré pour diviseur commun, car en ajoutant aux deux équations de ce dernier système, la condition $q^2-4pr=0$, on a trois équations qui donnent $p=0$, $q=0$, $r=0$. Dans ce cas, le diviseur commun est la dérivée elle-même, et l'équation proposée a ses quatre racines égales.

D'où il faut conclure que les deux équations (δ) expriment les conditions suffisantes et nécessaires pour que l'équation proposée ait trois racines égales. Toute solution de ce premier système qui n'annule pas le coefficient p, donne à l'équation proposée la forme $(x-\alpha_1)^3\,(x-\alpha_2)=0$.

(*) Il est sous-entendu qu'il faut satisfaire aux équations (δ), sans annuler le coefficient p; sans quoi le diviseur commun ne serait pas du second degré. Quand nous parlerons d'un commun diviseur, il s'agira du plus grand de tous.

Les solutions du second système, (γ), conviennent au cas particulier où l'équation doit avoir deux racines doubles; elles font prendre à cette équation la forme

$$(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2=0.$$

Si aux deux équations (γ) on ajoute la condition $q^2-4pr=0$, on a trois équations qui se réduisent à $p=0$, $q=0$, $r=0$; et alors, la proposée devient $(x-\alpha_1)^4=0$.

On le voit, la méthode du plus grand commun diviseur conduit aux mêmes résultats que toutes les autres : elle donne deux conditions quand l'équation du quatrième degré doit avoir trois racines égales; et trois conditions, si l'on veut que l'équation ait ses quatre racines égales entre elles.

Actuellement examinons comment on a été amené à conclure que cette méthode donne : pour exprimer qu'une équation du quatrième degré a trois racines égales, des conditions qui expriment qu'elle en a quatre.

Le raisonnement qu'on a fait se subdivise en deux parties. L'objet de la première est d'établir que, dans le cas particulier dont il s'agit, le nombre des conditions trouvées est réellement *trois*. La seconde a pour but de prouver qu'en vertu de ces trois conditions différentes, l'équation a nécessairement ses quatre racines égales entre elles.

Je suivrai le même ordre dans ma réfutation, et afin de la rendre plus précise je rappellerai les termes mêmes du raisonnement, en les appliquant à l'équation considérée.

« *Les équations de condition* (1) *et* (2), *obtenues en égalant* » *à zéro le reste du premier degré, exprimant uniquement que* » f(x), f'(x) *ont un commun diviseur du second degré, con-* » *viennent également au cas où l'équation proposée devrait* » *avoir deux racines doubles : elles sont donc insuffisantes.* » *Il faut encore exprimer que le diviseur du second degré* » px^2+qx+r *est un carré. On obtient ainsi une nouvelle*

» *équation, de sorte qu'on en trouvera* $2+1$, *ou* trois, *ce*
» *qui, etc.* »

Les équations (1) et (2) conviennent également, comme on vient de le dire, aux cas où la proposée doit avoir trois racines égales, ou deux racines doubles : si elles renferment toutes les solutions de ces deux questions différentes, c'est un motif pour supposer qu'elles se partagent en deux systèmes correspondants aux deux cas mentionnés. Il convenait au moins d'examiner si ce partage est théoriquement impossible, avant d'affirmer qu'on trouvera trois conditions différentes : à cet égard, on n'a rien démontré.

C'est surtout lorsqu'il s'agit, ensuite, d'expliquer pourquoi on a ainsi trouvé trois équations, tandis que d'autres méthodes en donnent seulement deux, que le raisonnement me semble s'égarer.

« *Puisque les équations* (1), (2), *obtenues en égalant à zéro*
» *le reste du premier degré, expriment uniquement que le reste*
» *précédent est commun diviseur de* $f(x)$ *et* $f'(x)$, *rien n'indique*
» *que l'équation* $px^2+qx+r=0$, *formée en égalant à zéro*
» *le commun diviseur, ait des racines égales. Chacune des*
» *racines* α_1, α_2 *de cette équation, entrera donc deux fois dans*
» *la proposée. On voit alors que cette dernière équation revient*
» *à* $(x-\alpha_1)^2\,(x-\alpha_2)^2=0$. *Si l'on pose ensuite* $\alpha_1=\alpha_2$ (*ou*
» $q^2-4pr=0$), *elle devient* $(x-\alpha_1)^4=0$, *etc.* »

Mais si les relations (1), (2) n'indiquent en rien que les racines de l'équation $px^2+qx+r=0$, sont égales, elles n'indiquent pas davantage que ces racines sont différentes l'une de l'autre, puisque les relations conviennent également aux deux cas. Cette seconde partie du raisonnement est en contradiction avec la première. Les conditions (1), (2) paraissent d'abord insuffisantes, parce qu'elles expriment que l'équation proposée prend l'une ou l'autre de ces deux formes : $(x-\alpha_1)^3\,(x-\alpha_2)=0$, $(x-\alpha_1)^2\,(x-\alpha_2)^2=0$; et peu après, on les trouve suffisantes pour que l'équation devienne $(x-\alpha_1)^2\ (x-\alpha_2)^2=0$; et par suite $(x-\alpha_1)^4=0$, lorsqu'on aura posé $\alpha_1=\alpha_2$, ou $q^2-4pr=0$.

S'il est vrai que les relations (1)......(3) expriment que l'équation proposée a ses quatre racines égales entre elles, il en faut conclure qu'il est absolument impossible qu'une équation du quatrième degré ait trois racines égales. Quelle autre conclusion, en effet, pourrait-on tirer des deux affirmations suivantes : 1° Pour que l'équation ait trois racines égales, il faut que ses coefficients satisfassent aux conditions (1).....(3) ; 2° Les relations (1).....(3) expriment que l'équation a, non pas trois, mais quatre racines égales.

En affirmant que l'équation proposée devient $(x-\alpha_1)^4=0$, on a confondu les équations (1).....(3), avec un des deux systèmes en lesquels elles se partagent : c'est prendre le tout pour la partie. G.

(*La fin prochainement*).

NOTE HISTORIQUE

sur le binôme de Newton, les exposants négatifs et fractionnaires.

—

OLDEMBURG (Henri) (*), l'un des premiers secrétaires de la Société royale de Londres lors de sa fondation, correspondant de Newton et de Leibnitz, servait d'intermédiaire aux deux plus puissants génies contemporains ; car Descartes avait succombé aux rigueurs du climat de Stockholm, juste au milieu du siècle, en 1650, huit ans après la mort de Galilée, et aussi après la naissance de Newton, en 1642.

(*) Né à Bremen, mort à Carlton, près Greenwich, en août 1678.

Leibnitz, étant à Paris, écrivit, le 12 mai 1676, à Oldemburg qu'un géomètre danois, Mohr (Georges), y avait apporté deux séries, qui lui avaient été communiquées par Collins (*) à Londres, contenant l'expression d'une relation entre l'arc et son sinus. Ces séries sont, x étant le sinus de l'arc z et $R = 1$,

$$z = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \text{etc.};$$

$$x = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^4.$$

La seconde série surtout lui parut d'une singulière élégance, *et posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat.* Il prie Oldemburg de lui en envoyer la démonstration et de s'adresser pour cela à Collins. Dans une lettre du 14 juin suivant, Collins écrit en réponse à Oldemburg que les coefficients de la première série étaient aussi réguliers que ceux de la seconde, et que telle était leur loi de formation :

$$\frac{1.1}{2.3} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{6}.\frac{3.3}{4.5} = \frac{3}{40}; \quad \frac{3}{40}.\frac{5.5}{6.7} = \frac{5}{112}, \text{ etc.},$$

mais sans démonstration. Oldemburg avait aussi écrit à ce sujet à Newton, alors professeur à l'université de Cambridge, et auteur de ces séries. L'illustre géomètre envoya une réponse le 13 juin 1676, avec prière d'en faire part à Leibnitz, ce qui eut lieu le 26 juin. Nous donnons le commencement de cette lettre si remarquable où l'on rencontre la première formule du célèbre binôme. « Quanquam » D. Leibnitii modestia, in Excerptis, quæ ex epistola ejus ad » me nuper misisti, nostratibus multùm tribuat circa spe- » culationem quandam *infinitarum serierum*, de quâ jam

(*) Surnommé le Mersenne anglais; mort en 1683.

» cepit esse rumor; nullus dubito tamen, quin ille, non
» tantum (quod asserit) methodum reducendi quantitates
» quascunque in ejusmodi series, sed et varia compendia,
» fortè nostris similia, si non et meliora, adinvenerit. »

Newton, Leibnitz, Euler, bien loin de chercher à atténuer le mérite d'autrui, se sont toujours efforcés à en rehausser l'importance ; malheureusement on n'en peut dire autant de tous les grands géomètres, pas même de notre immortel philosophe. « Quoniam tamen ea scire pervelit, quæ ab
» Anglis hac in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in
» hanc speculationem inciderim ; ut votis ejus aliqua saltem
» ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quæ mihi occur-
» rerunt, ad te transmisi. »

Newton avait trente-quatre ans en écrivant cette lettre, et il y avait déjà plusieurs années (antè annos aliquot) qu'il était parvenu à ses principales formules.

« Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem,
» et quantitates radicales per extractionem radicum : perinde
» instituendo operationes istas in speciebus, ac institui solent
» in decimalibus numeris. Hæc sunt fundamenta harum re-
» ductionum. »

On voit donc que ce sont les opérations sur les fractions décimales introduites par Stevin qui ont suggéré à Newton l'idée d'appliquer ce genre d'opérer aux expressions algébriques, et, opérant ainsi dans les extractions des racines, il a été amené, par induction, au théorème dont il va être question.

« Sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc
» *theorema*

$$\text{« } (P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \\ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

» Ubi P+PQ significat quantitatem, cujus radix, vel etiam » dimensio quævis, vel radix dimensionis, investiganda est, » P primum terminum quantitatis ejus; et reliquos terminos » divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensio- » nis ipsius P+PQ; sive dimensio illa sit integra; sive (ut » ita loquar) fracta; sive affirmativa, sive negativa. Nam, » sicut analystæ pro aa, aaa, etc., scribere solent a^2, a^3, etc., » sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{Ca^5}$, etc., scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; » et pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, scribo $\overline{a}^{1}$, $\overline{a}^{2}$, $\overline{a}^{3}$. et sic pro

$$\frac{a^3a}{\sqrt{C:a^3+bbx}}, \text{ scribo } a^3(a^3+b^2x)^{-\frac{1}{3}}; \text{ et pro}$$

$$\frac{a^2b}{\sqrt{C:a^3+b^2xa^3+b^3x}} = a^2b(a^3+b^2x)^{-\frac{2}{3}}.$$

» In quo ultimo casu, si $(a^3+b^2x)^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse » $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ in regula : erit $P=a^3$; $Q=\frac{b^2x}{a^3}$; $m=-2$; $n=3$. » Denique, præ terminis inter operandum inventis in quoto, » usurpo A, B, C, D, etc. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; » B pro secundo $\frac{m}{n}$ AQ, et sic deinceps. Ceterum usus re- » gulæ patebit. »

Newton fait donc usage de la méthode récurrente, dédui- sant chaque terme des précédents, et le binôme est toujours préparé à rendre la série convergente; car, comme il le dit, A est le premier terme, B le second, etc.; quant aux indices exponentiels négatifs et fractionnaires, ils avaient déjà été employés par Wallis dans son *Arithmetica infinitorum* (Prop. LXIV, p. 52); et Wallis en fait lui-même l'observation dans son algèbre. « Eosdem indices seu exponentes retinet

» vix Clarissimus Isaacus Newton (Matheseos Professor » eruditissimus in celeberrima Academia Cantabrigiensi) » in notatione sua. (De Algebra tractatus, p. 315, 1693, » Oxoniæ; l'édition anglaise est de 1685). » Les exemples donnés par Newton sont $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; $(c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}$; $(y^3-a^2y)^{\frac{1}{3}}$, $(d+e)^{\frac{4}{3}}$; $(d+e)^5$; $(d+e)^{-1}$; $(d+e)^{-3}$; $(d+e)^{-\frac{1}{3}}$; $(d+e)^{-\frac{3}{5}}$; après ces neuf exemples, il dit qu'on peut se servir de son théorème pour extraire commodément les racines d'indices élevés des nombres. Mais voulant appliquer sa méthode aux racines des équations, il éprouva des difficultés en se servant des moyens proposés par Viète et Oughtred (qua propter aliam excogitare adactus sum). Il fut forcé à en chercher une autre méthode, et il trouva la résolution approchée des équations numériques adoptée dans les éléments; méthode qu'il avait déjà communiquée en 1669 à Barow; dans son *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Il en donne deux exemples, savoir :

$$y^3-2y-5=0, \quad \text{et il trouve} \quad y=2,09455148,$$

et

$$y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0;$$

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a^2}+\frac{131x^3}{512a}+\frac{509x^4}{16384a^3}+\text{etc.}$$

Ensuite il passe aux séries du sinus par l'arc et *vice versâ*, et encore à d'autres, mais le tout sans aucune démonstration; aussi dans une lettre subséquente du 27 août, Leibnitz écrit à Oldemburg qu'il aurait désiré plus d'explications, par exemple sur le théorème du binôme; *Desideraverim ut clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet; ut, originem theorematis, quod initio ponit.*

Dans une lettre du 24 octobre même année, adressée à Oldembourg pour être communiquée à Leibnitz, Newton explique comment il est parvenu aux théorèmes consignés dans la lettre du 13 juin. Ce sont les quadratures de Wallis qui lui ont fait découvrir son binôme. Wallis trouve les aires des courbes données par les équations

$$y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}};\ (1-x^2)^{\frac{2}{2}};\ (1-x^2)^{\frac{4}{2}};\ (1-x^2)^{\frac{6}{2}},$$

et puis par interpolation les aires des courbes dont les ordonnées sont $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$; $(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$.... En réfléchissant sur la loi des coefficients, Newton a été amené à la loi des coefficients binominaux fractionnaires, et a vérifié que le développement en série de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, élevé au carré, donne $1-x^2$; et il l'a encore vérifié en extrayant la racine carrée de $1-x^2$ par la voie ordinaire, et ainsi des autres. Newton ne paraît pas avoir eu une démonstration rigoureuse du binôme; la première, à ce que je sache, est due à Euler. Dans cette même lettre, Newton donne la résolution des équations littérales en séries, explique son *parallélogramme* qui sert de base à la méthode pour le retour des séries; *parallélogramme* qui est encore tacitement employé dans tout ce qu'on a publié récemment sur l'équation finale de l'élimination.

Nous devons ajouter que Stifel (1544) connaît les exposants entiers négatifs; dans le chapitre V de son Arithmétique, p. 246, il donne cette échelle des puissances de 2.

Exposants : -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; et il s'arrête là en disant : « *Posset hic fere novus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducam et clausis oculis abeam*; et plus loin : *Qualiacumque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, talia facit progressio arithmetica addendo et subtrahendo; sicut* $\frac{1}{8}$ *multiplicatus in*

64 *facit* 8, *sic* — 3 *additus* 6 *facit* 3; *est autem* — 3 *exponens ipsius* $\frac{1}{8}$; *sicut* 6 *est exponens numeri* 64 *et* 3 *exponens numeri* 8 (p. 250). On voit qu'il considère 3 comme exposant de 8, et non pas de 2, ce qui manque de clarté; du reste, on voit ici explicitement énoncée toute la théorie logarithmique.

On trouve la lettre de Newton dans le *Commercium Epistolicum*, seconde édit., p. 131, n° XLVIII, et dans les opuscules recueillis par Castillion, t. I, opus. X, p. 307.

De ce qui précède, il ressort que ce qu'on appelle dans les traités élémentaires binôme de Newton, pour l'exposant entier n'appartient pas à Newton; on connaissait déjà depuis Stifel les coefficients binominaux (*v.* t. V, p. 495). Mais le binôme pour les exposants négatifs et fractionnaires, est une des plus fécondes découvertes du créateur de la mécanique céleste.

Tm.

QUESTION 130 (t. V, p. 512)

SUR LES POLYGONES RÉGULIERS PLANS ET SPHÉRIQUES.

Étant donné un polygone régulier, trouver le lieu d'un point situé dans son plan, tel que le produit des distances de ce point aux sommets du polygone soit égal à une quantité donnée k (*).

PAR M. VANNSON (FOURNIER),
Professeur à Versailles.

Soit *m* (*fig.* 11) un des points du lieu demandé, et *o* le centre du polygone, je mène les rayons *ma*, *mb*, etc.; je dé-

(*) Voir les belles études de M. Serret sur ce genre de courbes (Journal de Mathématiques, t. VIII, p. 49., 1843. Tm.

signe la distance mo par ρ, et par ω l'angle moa; par n le nombre des côtés du polygone : nous aurons

$$ma^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega;$$

en prenant le rayon pour unité :

$$mb^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right);$$

$$mc^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right) \dots \text{etc.};$$

multipliant ces égalités, membre à membre, on trouve :

$$k^2 = (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega)\left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right)\right]\left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right)\right] \dots \left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Mais, par la théorie des équations trinômes, on sait que le second membre de cette équation est égal à $\rho^{2n} - 2\rho^n \cos n\omega + 1$; nous avons donc

$$\rho^{2n} - 2\rho^n \cos n\omega + 1 = k^2, \text{ d'où } \rho^2 = \sqrt[n]{\cos n\omega \pm \sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}};$$

telle est l'équation polaire de la courbe demandée. Si on suppose $n=1$, on trouve l'équation polaire du cercle ; si on suppose $n=2$, il faut distinguer les cas suivants : $k^2=1$; $k^2<1$; $k^2>1$. Dans le premier cas, on trouve une lemniscate (*fig.* 12) ; dans le deuxième cas, une courbe composée de deux parties fermées et distinctes (*fig.* 13) ; enfin pour $k>1$ une courbe continue et fermée. Proposons-nous maintenant de discuter la courbe en laissant n quelconque, et supposons d'abord : 1° n pair et $k>1$. Il est évident que $\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}$ est toujours plus grand que $\cos n\omega$ pris en valeur absolue ; donc on ne doit prendre ce radical qu'avec le signe $+$. Si on désigne par h un accroissement quelconque donné à ω, et par k l'accroissement correspondant au rayon vecteur, on aura

$$\text{limite}\left(\frac{k}{h}\right) = -\frac{n \sin. n\omega}{\rho^{n-1}}\left[1 + \frac{\cos n\omega}{\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}}\right].$$

Le facteur entre les parenthèses est toujours positif; on aura donc les valeurs de ω qui donnent les maxima et minima du rayon vecteur en posant $\sin n\omega = 0$; donc

$$\omega = 0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ldots\ \frac{2(n-1)}{n}.$$

Il est aisé de voir aussi que la première de ces valeurs, et toutes les suivantes de rang impair, donnent un maximum, et toutes les autres un minimum. En effet, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{n}$, limite $\left(\frac{k}{h}\right)$ sera négative; donc ρ diminuera; il augmentera depuis $\omega = \frac{\pi}{n}$ jusqu'à $\omega = \frac{2\pi}{n}$, et ainsi de suite. Il est donc facile de représenter la marche de la courbe (*fig.* 14). Cette figure est faite en prenant pour exemple $n = 6$; 2° supposons maintenant $k < 1$; dans ce cas, $\cos n\omega$ est plus grand en valeur absolue que $\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}$; si donc $\cos n\omega$ est négatif, les deux expressions du rayon vecteur seront imaginaires, et réelles toutes deux dans les cas contraires. Pour avoir les valeurs de ω qui rendent égales les deux valeurs correspondantes de ρ, il faut poser $\sin^2 n\omega = k^2$, ou $\sin n\omega = \pm k$. Soit α la plus petite valeur positive correspondante de ω, nous aurons

$$\omega = \pm\alpha;\quad \pm\alpha + \frac{2\pi}{n};\quad \pm\alpha + \frac{4\pi}{n}\ \ldots\ \pm\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n};$$

et les valeurs correspondantes de ρ seront toutes réelles; si au contraire on prenait $\omega = \pi \pm \alpha$, $3\pi \pm \alpha$, etc., ρ serait imaginaire; ω variant depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$, ρ sera réel; depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \frac{2\pi}{n} - \alpha$, ρ sera imaginaire; depuis $\omega = \frac{2\pi}{n} - \alpha$ jusqu'à $\frac{2\pi}{n} + \alpha$, ρ sera réel, et ainsi de suite.

Si à ces remarques, on ajoute, comme dans le cas précédent, la détermination des maxima et minima du rayon vecteur, on pourra facilement construire la courbe (*Voyez fig.* 15).

Nous ne parlerons pas du cas où n est impair; on le discute de la même manière.

II.

Nous nous proposerons, relativement aux polygones sphériques, une question analogue à la précédente : étant donné un polygone sphérique régulier, trouver sur la sphère le lieu des points tel que le produit des cosinus de leurs distances aux sommets du polygone soit égal à une quantité donnée k.

Soit o le pôle du polygone ABCD.....; n le nombre de ses côtés; m un point du lieu; r la distance du pôle à un des sommets; ρ la distance du point m au pôle; ω l'angle moA; x', x'', x''', etc., les distances du point m aux sommets A, B, etc., nous aurons :

$$\cos x' = \cos r \cos \rho + \sin r \sin \rho \cos \omega\,; \quad \cos x'' = \cos r \cos \rho + \\ + \sin \rho \sin r \cos \left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right) \cos x''' = \cos r \cos \rho + \\ + \sin r \sin \rho \cos \left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots \cos x^{n-1} = \cos r \cos \rho + \\ + \sin r \sin \rho \cos \left(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right);$$

multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$k = (\sin r \sin \rho)^n [\cot r \cot \rho + \cos \omega] \left[\cot r \cot \rho + \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right)\right] :: :$$

Or, le second membre de cette équation, abstraction faite du premier facteur, n'est autre chose que le premier membre de l'équation, qui donnerait $\cos . \frac{n\omega}{n}$, ramenée à la forme

$x^n + px^{n-1} \ldots = 0$; en y changeant le signe des racines et en remplaçant l'inconnue par $\cot r \cot \rho$. L'équation qui donne $\cos. \dfrac{n\omega}{n}$ est la suivante (*) :

$$\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}} = x^n - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\cdot\frac{x^{n-4}}{2^4} -$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{x^{n-6}}{2^6} - \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^{n-8}}{2^8}\ldots$$

$$\ldots \pm \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{x^{n-2p}}{2^{2p}},$$

Il faut, dans l'emploi de cette formule, continuer le calcul des termes jusqu'à ce qu'on arrive à un terme indépendant de x, si n est pair, ou à un terme du premier degré, si n est impair. Changeons dans cette équation le signe des racines, ce qui se fera en remplaçant le premier membre par $-\dfrac{\cos n\omega}{2^{n-1}}$, si n est impair ; remplaçons aussi x par $\cot r \cot \rho$, et nous obtiendrons :

$$k = (\sin r \sin \rho)^n \left[(\cot r \cot \rho)^n - \frac{n}{2^2}(\cot r \cot \rho)^{n-2} + \right.$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1.2}\frac{(\cos r \cos \rho)^{n-4}}{2^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{(\cot r \cot \rho)^{n-6}}{2^6}\ldots \pm$$

$$\left. \pm \frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}\right],$$

en prenant le signe $+$ quand n est impair, et le signe $-$ quand n est pair : telle est l'équation de la courbe demandée. On peut, quel que soit n, la résoudre par rapport à $\cos n\omega$; par suite, trouver la valeur de ω correspondante à une valeur arbitraire de ρ, et construire ainsi la courbe par pointes.

Remarque. On peut mettre l'équation précédente sous une forme qui permettra de calculer plus simplement la valeur de ω correspondante à une valeur donnée de ρ. Pour cela,

(*) Nous laisserons aux élèves le soin de démontrer cette formule. (V. t. V, p. 223, formule 43.)

j'ajoute et je retranche au facteur entre parenthèses, la quantité $\frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui donne :

$$k=(\sin r\sin\rho)^n\left[\overline{\cot r\cot\rho}^{\,n}-\frac{n}{2^2}\,\overline{\cot r\cot\rho}^{\,n-2}\ldots\pm\frac{1}{2^{n-1}}\right]\mp$$

$$\mp(\sin r\sin\rho)^n.\frac{\sin^2\frac{n\omega}{2}}{2^{n-3}}.$$

Dans le facteur entre parenthèses, $\cos n\omega$ a été remplacé par 1, qui est le cosin. de 0 ; donc ce facteur peut se décomposer de la manière suivante :

$$(\cot r\cot\rho+1)\left(\cot r\cot\rho+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cot r\cot\rho+\cos\frac{4\pi}{n}\right),\text{ etc.};$$

donc l'équation de la courbe devient :

$$k=\cos(r-\rho)\left(\cos r\cos\rho+\sin r\sin\rho\cos\frac{2\pi}{n}\right),\text{ etc. }\ldots\mp$$

$$\mp(\sin r\sin\rho)^n.\frac{\sin\frac{2n\omega}{2}}{2^{n-3}}.$$

Si donc on porte l'arc ρ sur le grand arc qui joint le pôle à un quelconque des sommets, et qu'on désigne par P le produit des cosinus des distances du point obtenu à tous les sommets, on aura :

$$\sin\left(\frac{n\omega}{2}\right)=\sqrt[2]{\frac{\mp(k-P).2^{n-3}}{(\sin r\sin\rho)^n}},$$

équation qui donnera l'angle ω par un calcul simple. Il faudra prendre le signe supérieur dans le cas de n impair.

Si dans l'équation de la courbe nous faisons $n=2$, nous trouverons $k=\cos^2r\cos^2\rho-\sin^2\rho\sin^2r\cos^2\omega$; on tire de là $\sin^2\rho=\frac{\cos^2r-k}{\cos^2r+\sin^2r\cos^2\omega}$; je pose, pour simplifier, la formule $k=\lambda\cos r$, d'où $\sin\rho=\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\tang r\cos^2\omega}}$; on peut supposer λ positif, négatif ou nul. Quand λ est positif, il faut le prendre moindre que l'unité ; alors $\sin\rho$ est toujours moindre que 1, quel que soit ω. En faisant $\omega=0$, $\sin\rho$ atteint la valeur minimum ; il augmente quand ω augmente, et atteint son maximum quand $\omega=\frac{\pi}{2}$. Il faut remarquer de plus qu'à un même sinus correspondent deux arcs supplémentaires l'un de l'autre. La courbe est donc composée de deux parties fermées (comme on le voit *fig.* 16) ; et si du point C, milieu de l'arc donné AB, comme pôle, on décrit un grand cercle, il divisera en parties égales tout arc de grand cercle compris entre les deux branches de la courbe et partant du point C.

Supposons maintenant λ négatif, et posons $\lambda=-\lambda'$, nous aurons pour équation de la courbe :

$$\sin\rho=\sqrt{\frac{1+\lambda'}{1+\tang^2 r\cos^2\omega}};$$

pour qu'on trouve $\sin\rho<1$, il faut avoir $\cos^2\omega \geqq \lambda'\cot^2 r$, et par suite $\lambda'\cot^2 r<1$; supposons cette condition remplie, et posons $\cos\omega'=\pm\cot r.\sqrt{\lambda'}$. Si nous faisons au point C (*fig.* 16), milieu de l'arc passant par les deux points donnés, deux angles, BCD, BCD', égaux à ω'; puis, que sur les arcs ainsi tracés et les prolongeant, nous prenions

$$CD=CD'=CD''=CD'''=\frac{\pi}{2},$$

la courbe sera tout entière comprise dans les deux angles DCD'', D'CD''; on aura le maximum et le minimum de ρ en posant $\omega=0$; et tous les arcs partant du point C compris dans la courbe seront divisés en parties égales par un grand cercle ayant C pour pôle. Il est aisé, d'après ces remarques, de construire la courbe (*fig.* 16).

Si $\lambda=0$, l'équation se décompose en deux facteurs ; et les égalant séparément à o, on trouve $\cos \rho = \pm \operatorname{tang} r \cos \omega$. On reconnaît là les équations polaires de deux cercles ayant pour distances polaires $\frac{\pi}{2}$, et pour pôles chacun des deux points donnés (*).

SOLUTION

d'un problème sur le cône de révolution, pour faire suite à un problème de M. Breton (de Champ), sur le cylindre droit.

(Tome V, p. 651.)

PAR M. B...,
de Liége.

Problème. Un point étant donné sur un cône de révolution, trouver le rayon de la section circulaire passant par ce point.

Solution. Soit A le point donné, S le sommet. Tracez AS et sur cette génératrice prenez AB=AC. De chacun des points B et C, et avec un rayon r pris arbitrairement, décrivez un arc. L'intersection A_1 de ces deux arcs sera un point du plan perpendiculaire à AS, et mené par A. Cherchez de la même manière trois autres points A_2, A_3, A_4 du même plan; transportez les cinq points A, A_1, A_2, A_3, A_4 sur un plan; ils détermineront une conique qui sera :

Une ellipse si l'angle de deux génératrices opposées est aigu ;

Une parabole s'il est droit ;

Une hyperbole s'il est obtus.

1er *Cas.* Faites un triangle rectangle SAD, rectangle en A, ayant pour côtés de l'angle droit la distance connue AS et

---

(*) *Voir* Michael Roberts (Journal de Mathématiques, t. X, p. 251). Tm.

le grand axe AD de l'ellipse ; puis du point A menez une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle S. Ce sera le rayon demandé.

2ᵉ *Cas.* Construisez un triangle rectangle isocèle, ayant pour hypoténuse AS. Le côté de l'angle droit donne la solution du problème.

3ᵉ *Cas.* Faites un triangle rectangle SAD, rectangle en A, ayant pour côtés de l'angle droit AS, et l'axe réel de l'hyperbole. Prolongez l'hypoténuse DS au delà du point S, et de A. Menez une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle extérieur. Cette perpendiculaire est le rayon cherché.

SOLUTION DE LA QUESTION 137 (t. V, p. 672).

PAR M. J. MURENT,
de Clermont-Ferrand.

Théorème. L'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont un angle commun, et même périmètre, est un cercle.

Solution. Prenons pour axes des coordonnées, les côtés de l'angle fixe θ; l'équation de la base dans l'une de ses positions sera :

$$ay + bx = ab \qquad (1)$$

a et b étant les deux autres côtés du triangle, ou les deux segments interceptés par la base sur les deux côtés de l'angle fixe, à partir du sommet.

Exprimant que le périmètre est constant et égal à $2p$, on aura la relation

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} = 2p,$$

ou, en chassant le radical et réduisant

$$(1 + \cos\theta)\, ab - 2p(a + b) + 2p^2 = 0,$$

ou bien encore, en remplaçant ab par sa valeur tirée de l'équation (1)

$$[2p-(1+\cos\theta)x]\,b+[2p-(1+\cos\theta)y]\,a=2p^2\,; \quad (2)$$

pour avoir la troisième équation du problème, il faut, d'après la méthode connue (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 282), égaler les deux valeurs du rapport $\frac{f'_b}{f'_a}$ des dérivées des équations (1) et (2), prises par rapport à b et a. On a ainsi :

$$\frac{x-a}{y-b}=\frac{2p-(1+\cos\theta)x}{2p-(1+\cos\theta)y},$$

ou en réduisant

$$[2p-(1+\cos\theta)x]\,b-[2p-(1+\cos\theta)y]\,a=2p\,(y-x)\,; \quad (3)$$

il reste maintenant à éliminer a et b entre les équations (1), (2) et (3), et l'équation finale sera celle du lieu demandé. Or, en observant que les équations (2) et (3) donnent, l'une la somme, l'autre la différence de deux quantités, on a immédiatement

$$b=\frac{p\,(p+y-x)}{2p-(1+\cos\theta)x} \quad a=\frac{p(p-y+x)}{2p-(1+\cos\theta)y},$$

mettant ces deux valeurs dans l'équation (1), on a, toutes réductions faites,

$$y^2+2xy\cos\theta+x^2-2py-2px+p^2=0\,;$$

équation qui représente un cercle. En y faisant successivement $x=0$, $y=0$, on obtient deux équations qui ont leurs racines égales à p : donc ce cercle est tangent aux deux côtés de l'angle fixe, en deux points distants du sommet de la quantité p moitié du périmètre. Le centre et le rayon s'obtiendront facilement, soit graphiquement, soit par le calcul.

2. En suivant la même méthode, il est aisé de démontrer cet autre théorème, analogue au précédent. *L'enveloppe des*

bases des triangles qui ont un angle commun et même surface, est une hyperbole ayant pour asymptotes les côtés de l'angle fixe.

SOLUTION D'UNE QUESTION D'EXAMEN (t. V, p. 703).

PAR M. MOUTIER,
élève au Collége de Versailles.

—

D'un point fixe, D (*fig.* 18) d'un diamètre FDE d'un cercle, on mène une sécante quelconque, BDA au cercle ; en A et B on lui mène les tangentes AC, BC ; et on joint les points D et C ; démontrer que le produit

$$\text{tang ADE. tang EDC} = \text{constante}.$$

Joignons OC ; et du point C abaissons la perpendiculaire CC' sur le prolongement du diamètre FDE ; la droite CC' est la polaire du point D ; et le point C' est son conjugué ; de sorte que si par le point D on mène des cordes quelconques ; et si par les points de contact avec le cercle régulateur, l'on mène des couples de tangentes, tous les points C seront situés sur la droite CC'.

Évaluons maintenant CC' dans les deux triangles rectangles CDC', COC'.

$$CC' = C'D \text{ tang EDC}.$$
$$CC' = C'O \text{ tang COC}'.$$

Divisant membre à membre :

$$\text{tang EDC} = \frac{C'O}{C'D} \text{ tang COC}'.$$

Remarquons que dans le triangle rectangle ODM, l'angle

ODM ou ADE est le complément de l'angle COC', et alors :

$$\text{tang}\,ADE = \text{cotang}\,COC'.$$

Multiplions membre à membre ces deux dernières galités : il vient :

$$\text{tang}\,EDC.\ \text{tang}\,ADE = \frac{C'O}{C'D}.$$

Les lignes CO et C'D étant constantes, le produit des tangentes est constant, et ce produit est égal au rapport des distances du conjugué du point fixé D, au centre du cercle régulateur, et à ce point fixe.

Le théorème subsiste encore, lorsque le point D (*fig.* 19) est pris sur le prolongement du diamètre ; son conjugué C' est alors à l'intérieur du cercle qui est coupé par la polaire CC'O.

Nous avons toujours :

$$CC' = C'O\,\text{tang}\,COC'$$
$$CC' = C'D\,\text{tang}\,EDC\,;$$

Pour :

$$\text{tang}\,EDC = \frac{C'O}{C'D}\,\text{tang}\,COC'.$$

Or, dans le triangle rectangle MOD, les angles COC' et ADE étant complémentaires :

$$\text{tang}\,ADE = \text{cotang}\,COC'\,;$$

et :

$$\text{tang}\,EDC\,\text{tang}\,ADE = \frac{C'O}{C'D}.\ \text{C. Q. F. D.}$$

QUESTION 134.

La surface d'un cylindre oblique à base circulaire, est égale à celle d'un rectangle dont un des côtés serait le diamètre du *cercle, et l'autre côté la circonférence d'une ellipse, ayant pour axes principaux la hauteur et l'arête du cylindre.*

BRINKLEY.

PAR M. CABUSSI DE BAJOR,
élève de l'institution Barbet.

—

Soit ABDE (*fig.* 17), le cylindre oblique à base circulaire, par les points A et D faisons passer des plans perpendiculaires à AD, ils couperont le cylindre suivant des ellipses, et la surface du cylindre oblique sera égale à celle du cylindre droit, donc :

$$\text{S cyl.} = \text{Ell. DF} \times \text{AD};$$

menons au point D la droite DG tangente au cercle DE, et DK perpendiculaire à la base; par les droites KD,DG faisons passer un plan et un second par les droites AD,DG, KDA sera l'angle de ces deux plans, soit α cet angle; sur AD comme diamètre, décrivons un cercle dans le plan ADE, et projetons-le sur le plan KDG, la projection sera une ellipse ayant pour axes principaux AD et KD, ou bien AD et

$$\text{AD} \cos \text{ADK} = \text{AD} \cos \alpha;$$

remarquons que l'angle $\text{EDF} = \text{ADK} = \alpha$.

Par suite les axes principaux de l'ellipse DF sont :

$$2\text{R} \quad \text{et} \quad 2\text{R} \cos \alpha.$$

De la proportion $\text{AD} : \text{AD} \cos \alpha :: 2\text{R} : 2\text{R} \cos \alpha$, il résulte que les deux ellipses considérées sont semblables, donc leurs circonférences sont entre elles comme leurs grands axes, donc :

$$\text{Ell. (DF)} : \text{Ell. (AD,DK)} :: 2\text{R} : \text{AD},$$

d'où : $$\text{Ell. DF} = \text{Ell. (AD,DK)} \frac{2\text{R}}{\text{AD}};$$

donc enfin : $$\text{S cyl.} = \text{Ell. (AD,DK)} \times 2\text{R}.$$

NOTE

sur le théorème démontré, t. IV, p. 648, et t. V, p. 65.

PAR M. PAUL SERRET,
Élève.

—

Ce théorème est le suivant : F et F′ étant les deux foyers d'une ellipse, et MFP, MF′P′ deux cordes passant par les deux foyers et par un même point de la courbe, la somme $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'}$ est constante.

On peut généraliser ce théorème ainsi qu'il suit :

Dans l'ellipse, A et A′ étant deux points à égale distance du centre, et situés sur le même diamètre, MAP et MA′P′ étant deux cordes passant par les deux points et par un même point de la courbe, la somme $\frac{MA}{AP} + \frac{MA'}{A'P'}$ est constante quel que soit le point M.

La démonstration est exactement la même que celle qu'on a donnée pour le cas particulier des foyers. Année 1845, page 648.

NOTE

Sur la symétrie des angles trièdres.

PAR M. BARBET,
Chef d'institution.

—

On a coutume de dire dans les éléments de géométrie que deux angles trièdres composés d'angles plans égaux chacun à chacun, et disposés d'une manière différente, ayant leurs angles trièdres égaux, mais ne pouvant point coïncider, présentent un cas d'égalité par *symétrie* ou sont *symétriques* l'un de l'autre. C'est ordinairement la première fois que l'on emploie le mot *symétrie*, dont le sens ne paraît pas suffisamment justifié.

Si l'on convient que deux figures sont *symétriques*, lorsqu'un point quelconque de l'une et un point de l'autre se trouvent sur une perpendiculaire commune à un plan intermédiaire, et à égales distances de ce plan, *on démontre* que deux angles trièdres sont symétriques quand ils sont composés d'angles plans égaux chacun à chacun, et disposés d'une manière différente.

On remarque d'abord que les angles dièdres formés par les plans qui contiennent les angles égaux sont égaux chacun à chacun.

Ayant appliqué l'une contre l'autre deux des faces égales suivant ASB (*fig.* 20), on aura l'angle ASC′ égal à l'angle ASC, et le dièdre BASC′ égal à l'angle dièdre BASC. Si du point D pris sur la face ASC on mène DP perpendiculaire sur la face commune ASB, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre de la face ASC′ en D′, que du point P on mène PG perpendiculaire à SA, et qu'on joigne le point G aux points D′ et D, les droites D′G et DG seront perpendiculaires à SA (par le théorème des trois perpendiculaires); les angles D′GP et DGP mesureront donc, dans l'un et l'autre angle trièdre, les dièdres égaux qui ont pour arête commune SA; les deux triangles D′PG et DPG sont donc égaux, et l'on aura D′P = DP, donc les deux angles trièdres sont symétriques par rapport au plan ASB.

1^re^ *Remarque.* Deux lignes SD′ et SD symétriques par rapport au plan ASB, sont également inclinées sur le plan de symétrie à cause de l'égalité des triangles D′SP, DSP.

2ᵉ *Remarque.* Un point quelconque de l'arête SC, appartenant à la fois aux deux faces ASC et BSC a son symétrique sur les deux faces ASC′ et BSC′, c'est-à-dire sur l'arête SC′ de ces deux faces, de telle sorte que l'arête SC′ est symétrique de l'arête SC. Ces deux arêtes sont également inclinées sur le plan de symétrie ASB.

3ᵉ *Remarque.* Le plan de symétrie pourrait être placé entre les deux angles trièdres, dont les faces représentées par ASB resteraient parallèles, et à égales distances de ces faces.

Si on prend sur ces arêtes les distances SC et SC′ égales entre elles, les points C et C′ sont symétriques.

On peut déduire facilement de ce qui précède que les deux prismes triangulaires $abcb'c'd'$, $bcda'b'c'$ (*fig.* 21), dans lesquels est décomposé le parallélépipède oblique aa', sont symétriques l'un de l'autre. Dans ces prismes, on a les angles trièdres en a et en a', en b et en b', en c et en c' symétriques deux à deux, de telle sorte qu'en plaçant le prisme triangulaire $bcda'b'c'$ sous le prisme triangulaire $abcb'c'd'$, en $abcb''c''d''$, $a'b'$ sur ab, $a'c'$ sur ac, $b'c'$ sur bc, on a deux angles trièdres symétriques en a, deux en b, deux en c, ayant pour faces communes les angles en a, en b et en c, du triangle abc, et pour plan de symétrie celui de ce triangle. Les deux arêtes symétriques ad' et ad'' étant égales, les sommets d' et d'' sont symétriques. Il en est de même des sommets b' et b'', c' et c''.

QUESTION D'EXAMEN.

Théorie des exposants de nature quelconque (v. t. V, p. 704).

—

A. Quantités réelles, ni nulles, ni infinies; exposants réels rationnels, ni nuls, ni infinis.

1. *Définition. Exposant entier positif.* L'exposant entier

positif est un nombre entier positif écrit à droite et au-dessus de la quantité et désignant qu'il faut multiplier la quantité autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant; le produit, résultat de ces opérations, se nomme *puissance*, dont le quantième est indiqué par l'exposant.

2. *Identités fondamentales.* m et n étant des nombres entiers positifs, l'on a : 1° $a^m a^n = a^{m+n}$; 2° $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$; et $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ si $m < n$; 3° $(a^m)^n = a^{mn}$; 4° $\sqrt[n]{a^{np+q}} = a^p \sqrt[n]{a^q}$; $q < n$. Ces identités sont des conséquences immédiates de la définition.

3. *Définition. Exposant entier négatif.* Cet exposant indique qu'il faut élever la *réciproque* de la quantité à une puissance marquée par l'exposant pris positivement.

4. *Identités fondamentales.* Elles sont les mêmes que pour les exposants entiers et sont aussi des conséquences de la définition; ainsi $a^{-m}.\, a^{-n} = \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$, et ainsi des autres.

5. Les quatre identités fondamentales subsistent donc pour les exposants entiers, positifs ou négatifs; on peut écrire $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ lors même que n est plus grand que m; et c'est ce qui a donné naissance aux exposants négatifs.

6. *Définition. Exposant fractionnaire positif.* Cet exposant indique qu'il faut élever la quantité à une puissance marquée par le numérateur et extraire de cette puissance une racine d'un indice marqué par le dénominateur de l'exposant fractionnaire; ou bien encore, à l'inverse, il faut commencer par extraire de la quantité la racine désignée par le dénominateur et élever le résultat à la puissance indiquée par le numérateur; on démontre facilement que ces deux modes d'opérer donnent le même résultat.

7. On a l'identité $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$; c'est une conséquence de la définition ; il faut remarquer que le premier membre a n valeurs diverses, et le second membre pn valeurs; mais parmi ces pn valeurs se trouvent les n valeurs du premier membre; et ce n'est que pour celle-ci que l'identité subsiste.

8. Les quatre identités fondamentales subsistent pour les exposants fractionnaires positifs; ainsi $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$. En effet, $\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$; donc, etc.

9. *Définition. Exposant fractionnaire négatif.* Comme pour l'exposant positif; mais la quantité est remplacée par sa réciproque $a^{\frac{-m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Résumé. Les identités fondamentales ont lieu pour des exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

B. Quantités nulles ou infinies; exposants réels, rationnels, ni nuls, ni infinis.

11. On a évidemment : $0^m = 0$; $0^{-m} = \infty$; $\infty^m = \infty$; $\infty^{-m} = 0$.

C. Quantités réelles rationnelles, ni nulles, ni infinies ; exposants nuls ou infinis.

12. $a^0 = 1$; car a^0 provient de $\frac{a^m}{a^m}$; $a^{-0} = \frac{1}{a^0} = 1$; $a^{\infty} = \infty$ si $a > 1$; et $a^{\infty} = 0$ si $a < 1$; et inversement $a^{-\infty} = 0$ si $a > 1$; et $a^{-\infty} = \infty$ si $a < 1$.

13. Les identités fondamentales subsistent encore pour les exposants nuls ou infinis.

D. Quantités nulles ou infinies ; exposants nuls ou infinis.

14. $0^{\infty}=0$; $0^{-\infty}=\infty$; $\infty^{\infty}=\infty$; $\infty^{0}=\frac{\infty^{m}}{\infty^{m}}=\frac{\infty}{\infty}=$ indéterminé ; $0^{0}=\frac{0^{m}}{0^{m}}=\frac{0}{0}=$ indéterminé.

Observation. Presque tous les géomètres admettent avec Euler que $0^{0}=1$; car, dit ce dernier (Alg., t. I, § 175), $\frac{a}{a}=a^{0}=1$; cette équation subsiste, quelque petite valeur qu'on attribue à a ; donc aussi lorsque $a=0$, ainsi $0^{0}=1$; mais cette conclusion manque de justesse ; il s'ensuivrait aussi que $\frac{0}{0}=1$; l'identité $0=0$ n'est pas du même genre que l'identité $2=2$; la première peut s'écrire $6.0=7.0$; on ne peut pas écrire $6.2=7.2$; et $\frac{0}{0}$ n'est pas identique à $\frac{2}{2}$. Aussi M. Cauchy range-t-il les expressions $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^{0}, $\frac{0}{0}$ parmi les symboles d'indétermination (Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal, p. 25). Un anonyme, qui signe S, enseigne la même doctrine dans le Journal de Crelle (t. XI, p. 272, 1834, en français). Nous avons montré que si l'on admet que 0^{0} soit constamment égal à l'unité, on serait conduit à cette conclusion absurde que ; dans la surface transcendante représentée par $z=x^{y}$, tout l'axe des y appartient à la surface, excepté le point servant d'origine. La vérité est que l'axe des z appartient aussi à la surface, ainsi que la droite $z=1$ située dans le plan xz (*v.* t. V, p. 648).

C. Quantités réelles, ni nulles, ni infinies ; exposants réels irrationnels.

15. *Définition.* Le symbole m étant un nombre entier, p

un nombre qui n'est pas une puissance d'indice m; le symbole $\sqrt[m]{p}$ désigne qu'il existe une série infinie de nombres *finis*, telle qu'en les élevant tous à la puissance m, on obtient une seconde série qui a p pour limites ; c'est-à-dire une seconde série dont aucun terme n'est égal à p, mais où la différence, en excès ou en défaut, entre les termes et p peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée. Dans la première série, la différence entre deux termes consécutifs peut aussi descendre au-dessous de toute quantité donnée ; mais elle n'a pas de limite assignable par un nombre *fini* de chiffres, dans aucun système de numération; tandis que la seconde série a une limite assignable. Prenons pour exemple $\sqrt{2}$; on a pour première série : $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{19}, \ldots$ les différences entre les termes vont en diminuant; elle n'a pas de limite exprimable en chiffres d'une numération. On désigne symboliquement cette limite par $\sqrt{2}$, c'est-à-dire qu'en formant la seconde série $1, \frac{9}{4}, \frac{49}{25}, \frac{289}{144}$, etc., la limite est 2.

16. *Observation générale.* Toutes les fois qu'on fait une quelconque des six opérations arithmétiques sur des expressions irrationnelles, il faut toujours sous-entendre, à moins de ne savoir ce qu'on dit, qu'on fait ces opérations sur les quantités rationnelles de la première série dont ces expressions rationnelles représentent la limite symbolique. Ainsi les identités fondamentales du § 2 ont donc encore lieu pour des exposants irrationnels, puisqu'on n'opère jamais que sur des quantités rationnelles.

D. Quantités imaginaires, monômes ou binômes ; exposant réel.

17. Représentons $\sqrt{-1}$ par i ; m étant un nombre en-

tier; $i^{4m}=1$; $i^{4m+1}=i$; $i^{4m+2}=-1$; $i^{4m+3}=-i$ (*Voir* t. V, p. 141).

18. Les identités fondamentales s'appliquent encore ici. Par exemple, on a : $i^p \times i^q = i^{p+q}$; il suffit de le démontrer pour p et q, chacun plus petit que 4.

19. On a encore $i^{\frac{m}{n}} . i^{\frac{p}{q}} = i^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; $i^{\frac{m}{n}}$ est racine d'une équation binôme de la forme $x^n \pm 1 = 0$ ou $x^{2n} \pm 1 = 0$; de même, $i^{\frac{p}{q}}$ est racine d'une des équations de cette forme $x^q \pm 1 = 0$; $x^{2q} \pm 1 = 0$; $i^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ est racine de l'une de ces équations $x^{nq} \pm 1 = 0$ ou $x^{2nq} \pm 1 = 0$. Ces troisièmes formes renferment les produits des racines des premières par les racines des secondes.

20. $(a+bi)^m (a+bi)^n = (a+bi)^{m+n}$. En effet, soit $a^2+b^2=r^2$; $\frac{a}{r}=\cos x$; $\frac{b}{r}=\sin x$. Ainsi :

$$a+bi=r(\cos x+i\sin x);\ (a+bi)^m=r^m(\cos mx+i\sin mx);$$
$$(a+bi)^n = r^n(\cos nx+i\sin nx);\ (a+bi)^m(a+bi)^n=$$
$$=r^{m+n}[\cos(m+n)x+i\sin(m+n)x]=r^{m+n}(\cos x+i\sin x)^{m+n}=$$
$$=(a+bi)^{m+n}.$$

On peut trouver une démonstration purement algébrique, mais très-longue.

21. E. Exposants imaginaires.

Définition. L'exposant imaginaire a^{pi} désigne symboliquement la série qu'on obtient en développant a^p en une série ordonnée suivant les puissances de p, et remplaçant ensuite p par pi.

22. On a : $a^{pi}.a^{qi}=a^{(p+q)i}$. En effet, $a^{pi}=e^{pila}$; ou la désigne le logarithme népérien de a. Donc :

$$a^{pi}=\cos pl.a+i\sin pl.a;\ a^{qi}=\cos qla+i\sin qla;$$

donc

$$a^{pi}.a^{qi} = \cos(p+q)la + i\sin(p+q)la = e^{(p+q)ila} = a^{(p+q)i}.$$

C. Q. F. D.

23. Conclusion générale. Les identités fondamentales subsistent pour des exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, rationnels ou irrationnels, réels ou imaginaires.

24. L'indice exponentiel est employé d'une manière générale pour indiquer une suite consécutive d'opérations similaires. Ainsi f^mP désigne qu'il faut faire sur P une certaine opération indiquée par f; sur ce premier résultat, la même opération qu'on a faite sur P; sur ce second résultat, encore la même opération, et ainsi de suite jusqu'à la $m^{ème}$ opération, et f^{-m}P désigne une expression sur laquelle il faut faire m de ces opérations pour parvenir à l'expression P, et $f^{\frac{m}{n}}$P indique des opérations *interpolatoires*. Ainsi x^m indique donc réellement m opérations. La première est le produit de 1 par x; la seconde le produit de ce premier résultat encore par x, et ainsi de suite; x^{-m} est la quantité sur laquelle il faut opérer ainsi m fois pour parvenir à 1; c'est donc $\frac{1}{x^m}$; $x^{\frac{m}{n}}$ désigne l'interpolation de n opérations semblables entre 1 et x^m.

On voit donc que la notation $\sin^m x$ pour $(\sin x)^m$ est vicieuse; car elle désigne qu'il faut prendre le sinus de x, puis le sinus de sinus x, etc. Comme cette notation usitée est commode, il est avantageux de la conserver.

25. Les identités fondamentales n'ont pas lieu pour les indices exponentiels, dans le sens général. Aussi on n'a pas, en général, f^m P . f^nP $= f^{m+n}$P. On démontre, au contraire, que lorsque cette identité subsiste, l'indice exponentiel devient *potentiel*. Il est donc le seul pour lequel cette

identité subsiste. Les considérations sont fondées sur le calcul fonctionnel ou autrement le calcul aux différences partielles.

26. Dans les opérations de dérivations on a cette identité remarquable qui les caractérise :

$$D^m . D^n = D^n . D^m.$$

C'est le sujet d'un très-beau Mémoire de M. Servois, qui s'est malheureusement retiré trop tôt de la science où il a rendu et pouvait rendre encore d'utiles services. Il est du petit nombre de géomètres français qui lisent. (Annales de Gergonne, t. V, p. 93, 1814.)

SECONDE NOTE SUR CETTE QUESTION :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation admette un nombre donné de racines égales entre elles.

(Fin, v. p. 75.)

---

3. Je terminerai ce second article par une analyse de ma première note (tome I, page 92) sur le même sujet.

Dans cette note, j'ai d'abord examiné la question suivante :

Les $(n—2)$ conditions nécessaires pour que le polynôme d du degré $(n—1)$ devienne une puissance exacte de ce degré, sont-elles, *toutes*, différentes des $(n—1)$ conditions qui doivent être remplies pour que ce polynôme soit le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de sa dérivée?

Quand le nombre n est précisément égal au degré m de l'équation proposée $f(x)=0$, les $(n—2)$ relations qui donnent au diviseur commun la forme $(x—\alpha)^{n-1}$ rentrent, *toutes*, dans celles qu'on obtient en égalant à zéro le reste du degré $(n—2)$. C'est ce que l'on démontre dans tous les éléments d'algèbre.

Et cela ne conduit pas à conclure, sans examen, que si n devenant inférieur au degré de l'équation proposée, est, par exemple, égal à $m-1$, alors on trouvera $(n-2)$ équations de conditions *nouvelles*, pour exprimer que le diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ est une puissance exacte du degré $(n-1)$.

Il résulte de la démonstration donnée (tome I, page 93) que dans le cas particulier où $n=m-1$, les $(n-2)$ équations dont il s'agit peuvent être remplacées par une seule équation (*); que si $n=m-2$, on trouve au plus deux conditions nouvelles, et ainsi de suite.

Il sera utile de rappeler ici cette démonstration.

Nommons p et q les quotients qu'on obtient en divisant $f'(x)$ et $f(x)$ par d; les restes de ces deux divisions doivent être considérés comme étant identiquement nuls, d'après les $(n-1)$ relations qui donnent $r=0$. Donc, en n'admettant pour les coefficients A, B, C, etc., des termes de $f(x)$, que des valeurs satisfaisant aux conditions $(r=0)$, on peut écrire les égalités $f(x)=dq$, $f'(x)=dp$.

Soient d', q' les dérivées de d et q : la dérivée du produit dq sera $(dq'+qd')$, et par conséquent l'égalité $f(x)=dq$, donne $f'(x)=dq'+qd'$.

Remplaçant $f'(x)$ par sa valeur dp, il vient :

$$dp=dq'+qd', \text{ ou } d(p-q')=qd'.$$

(*) Le principal objet de la démonstration donnée (tome I, page 93) est d'indiquer par quel calcul on parvient à des équations dont le nombre peut être inférieur à $(n-2)$, et qui, cependant, expriment que le diviseur d est une puissance exacte du degré $(n-1)$. Il n'est besoin d'aucune démonstration particulière pour établir que le nombre total des conditions *différentes* ne surpasse jamais $(m-1)$; si ce nombre était seulement égal à m, les conditions trouvées suffiraient pour déterminer les m coefficients de l'équation proposée : ce qui est impossible puisque la valeur des racines égales n'est pas donnée.

D'ailleurs, dans le cas particulier où $n=m-1$, l'équation $d=0$, obtenue en égalant à zéro le commun diviseur du degré $m-2$, ayant au plus deux racines de valeurs différentes, on ne voit guère pourquoi il faudrait plus d'une condition nouvelle pour exprimer que ces deux racines deviennent égales entre elles.

Cette dernière égalité montre que d est divisible par d', lorsque le polynôme q est lui-même divisible par $(p-q')$, et réciproquement. Ainsi, on exprimera que d devient une puissance exacte du degré $(n-1)$, en égalant à zéro les coefficients des différents termes du reste obtenu en divisant le polynôme q par $(p-q')$. Le nombre des termes de ce reste est, au plus, $(m-n)$, puisque $(m-n)$ est le degré du diviseur $(p-q')$. D'ailleurs $(m-n)$ est moindre que $(n-2)$ quand $m<2n-2$; donc on ne trouve pas $(n-2)$ conditions nouvelles en exprimant que d est une puissance exacte du degré $(n-1)$, lorsque le nombre $(2n-2)$ surpasse le degré de l'équation proposée, comme il était facile de le prévoir.

Mais, dans l'hypothèse même où le nombre $(2n-2)$ n'excède pas le degré de l'équation proposée $f(x)=0$, il faut encore, pour trouver $(n-2)$ conditions *nouvelles*, en exprimant que d devient exactement divisible par d', que d et d' n'aient primitivement aucun facteur commun (*). Or, les valeurs des coefficients de ces deux polynômes d et d' ne sont pas entièrement arbitraires, puisqu'elles doivent satisfaire aux $(n-1)$ équations de conditions obtenues en égalant à zéro le reste r du degré $(n-2)$. Et, comme il y a différentes manières de remplir ces conditions, le diviseur commun, d, prend plusieurs formes essentiellement différentes les unes des autres. Admettre que d et d' n'ont aucun facteur commun, c'est considérer seulement une des formes que le diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$, peut prendre, en vertu des $(n-1)$ relations qui donnent $r=0$. Afin d'indiquer plus nettement la restriction dont nous voulons parler ici, reprenons l'exemple déjà considéré (page 80).

Le premier reste obtenu est px^2+qx+r.

(*) C'est ce que j'ai, plusieurs fois, fait observer dans ma première note (voir tome 1, page 94).

En égalant à zéro les deux coefficients du reste suivant, on a les deux relations :

$$(1)\ldots\ldots\quad p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0,$$

$$(2)\ldots\ldots Ap^3+3A^3p^2+4qp^2-144.Apr+192.qr=0$$

Pour que le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ soit le polynôme du second degré px^2+qx+r, il faut satisfaire aux équations (1) et (2), *sans annuler le coefficient* p *de la plus haute puissance de* x *dans le polynôme* px^2+qx+r.

Cela posé, représentons les équations (1) et (2) par $M=0$, $N=0$; on pourra les remplacer par les deux suivantes :

$$M=0, \quad M(Ap+4q)-Np=0.$$

Car, toute solution de ces deux dernières qui n'annule pas le coefficient p, convient aux équations $M=0$, $N=0$, et réciproquement. Or, l'équation $M(Ap+4q)-Np=0$ revient à celle-ci :

$$(q^2-4pr)(2q-Ap)=0.$$

On en déduit :

$$q=\pm 2\sqrt{pr}, \text{ ou } q=\frac{Ap}{2}.$$

Le diviseur du second degré a donc l'une ou l'autre de ces deux formes :

$$px^2\pm 2x\sqrt{pr}+r, \quad px^2+\frac{Ap}{2}x+r;$$

et les coefficients p, r, doivent encore satisfaire à la condition $M=0$.

Le trinôme $px^2\pm 2x\sqrt{pr}+r$ est évidemment un carré ; par conséquent, si l'on trouve une condition nouvelle pour que le diviseur commun devienne une puissance exacte du second degré, c'est parce que l'on prend pour diviseur $px^2+\frac{Ap}{2}x+r$.

En exprimant que $px^2+\frac{Ap}{2}x+r$ est exactement divisible par sa dérivée $2px+\frac{Ap}{2}$, on obtient la condition : $A^2p-16r=0$.

Les $(2n-3)$ équations trouvées de cette manière sont donc :

$$(1)\ldots\ldots p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0,$$
$$2q-Ap=0,$$
$$A^2p-16r=0.$$

Elles expriment que la proposée a $(2n-2)$ racines égales ; car elles reviennent à $p=0$, $q=0$, $r=0$ (*).

Le polynôme d ou px^2+qx+r se réduit alors à zéro, et le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ est d'un degré supérieur à $(n-1)$ ou 2. Il est facile d'expliquer pourquoi on a trouvé $p=0$, $q=0$, $r=0$.

En effet, remarquons d'abord que si l'on remplace dans l'équation (1) Ap par $2q$, cette équation devient :

$$p^3+12q^2-16pr-24q^2+16q^2=0,$$

d'où
$$p^3+4(q^2-4pr)=0.$$

Si l'on veut que le plus grand commun diviseur px^2+qx+r de $f(x)$ et $f'(x)$ soit du second degré, il faut donner au coefficient p une valeur différente de zéro; par conséquent, q^2-4pr ne doit pas être nul. Ainsi, les relations

$$p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0,\quad 2q-Ap=0$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x)$ et $f'(x)$ aient un plus grand commun diviseur du second de-

---

(*) En remplaçant q et r par les valeurs $\frac{Ap}{2}$, $\frac{A^2p}{16}$, que donnent les relations $2q-Ap=0$, $A^2p-16r=0$, l'équation (1) se réduit immédiatement à $p^3=0$; il en résulte $p=0$, et par suite $q=0$, $r=0$.

gré, qui soit premier avec sa dérivée; en admettant toujours que l'on satisfasse aux deux équations par des valeurs qui n'annulent pas le coefficient p. Si à ces deux relations on joint une nouvelle équation $A^2p-16r=0$, indiquant que le diviseur commun du second degré est une puissance exacte, il en résulte une contradiction qui ne peut disparaître qu'en supposant $p=0$, $q=0$, $r=0$.

En général, si parmi les différentes manières de satisfaire aux $(n-1)$ équations de conditions, obtenues en égalant à zéro le reste r du degré $(n-2)$, on choisit celle qui ne donne aucun facteur commun au diviseur d et à sa dérivée d', il est évident que les $(n-2)$ conditions nécessaires pour que d soit une puissance exacte du degré $(n-1)$ seront des conditions nouvelles; on obtiendra ainsi $(2n-3)$ relations, différentes assurément. Il n'est pas moins évident qu'on ne pourra, sans annuler tous les coefficients du polynôme d, satisfaire à ces $(2n-3)$ équations exprimant, d'une part, que d et d' n'ont aucun facteur commun; et d'autre part, que d est exactement divisible par d'. Les $(2n-3)$ relations ainsi obtenues sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée admette $(2n-2)$ racines égales entre elles, on le démontre facilement.

Mais il s'agit seulement ici d'une solution particulière des $(2n-3)$ équations trouvées en posant $r=0$, et $d=(x-\alpha)^{n-1}$. Considérées d'une manière générale, ces équations de conditions répondent à plusieurs questions différentes; leurs solutions donnent à l'équation proposée $f(x)=0$ des racines égales dont le nombre aura une des valeurs suivantes :

$$n,\ (n+1),\ (n+2)\ \ldots\ (2n-3),\ (2n-2);$$

le nombre de ces racines égales sera précisément n, si la solution adoptée ne réduit pas à zéro le coefficient de la plus haute puissance de x dans le polynôme d; car, dans ce cas particulier, $f(x)$ et $f'(x)$ auront un commun diviseur d du degré $(n-1)$, qui sera : 1° leur plus grand commun diviseur ; 2° une puissance exacte du degré $(n-1)$. Donc, si l'on ajoute aux $(2n-3)$ relations générales $[r=0,\ d=(x-\alpha)^{n-1}]$ une inégalité exprimant que le coefficient du premier terme de d doit être différent de zéro, on aura les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que l'équation $f(x)=0$ ait n racines égales entre elles.

On sait qu'au moyen d'autres méthodes les mêmes conditions s'expriment par $(n-1)$ équations seulement ; par conséquent, il est possible de réduire à $(n-1)$ les $(2n-3)$ équations $[r=0,\ d=(x-\alpha)^{n-1}]$, en ayant toutefois égard à ce que le coefficient du premier terme du polynôme d ne doit pas être annulé. D'ailleurs, toutes les solutions des $(n-1)$ équations données par ces autres méthodes conviennent aux équations $(r=0)$; mais ces dernières contiennent, de plus, des solutions étrangères et correspondantes aux différents cas particuliers où le diviseur d n'est pas une puissance exacte du degré $(n-1)$. On est donc conduit à conclure que

Les équations de conditions, obtenues en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$ se partagent en plusieurs systèmes correspondants aux différentes formes que le diviseur commun du degré $(n-1)$ peut avoir. Les $(n-1)$ équations de l'un de ces systèmes expriment les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que l'équation proposée ait précisément n racines égales entre elles.

Cette conclusion a été confirmée par un exemple (p. 82) ; elle est amenée par un raisonnement facile à suivre. Si l'on ne peut lui opposer que l'explication dont il s'est agi dans la première partie de ce second article, il n'existe contre elle aucune objection sérieuse.

G.

NOTES

sur deux points du Cours de mathématiques spéciales (relatifs aux tangentes des coniques et aux sommes des nombres figurés).

PAR M. BRASSINE,

Professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

1° Dans les traités de Géométrie analytique, on vérifie, après avoir trouvé l'équation de la tangente, que cette droite ne rencontre pas la section conique en un point différent du point de contact. Cela peut se déduire, sans aucun calcul, de la forme de l'équation de la tangente. Prenons, par exemple, la tangente $a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2$ (1) à l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$. x', y' étant les coordonnées du point de contact. Si la droite (1) avait un second point, y'', x'', commun avec l'hyperbole, on aurait l'équation de condition $a^2y''y'-b^2x''x'=-a^2b^2$. Donc l'équation de la tangente serait aussi $a^2y''y-b^2x''x=-a^2b^2$ (2), puisque cette dernière, satisfaite par les coordonnées y'', x'' d'un point de la courbe, est aussi vérifiée par les coordonnées y', x'. Par suite, l'équation (2) doit être identique avec l'équation (1), lorsqu'on dégage y ; ce qui exige que $y''=y'$ et $x''=x'$.

2° On donne très-simplement, dans les traités élémentaires d'algèbre, les formules qui expriment les nombres de combinaisons, deux à deux, trois à trois, etc. de n lettres. On pourrait former les combinaisons deux à deux de n lettres $a, b, c \ldots k$, l en forment toutes celles qui contiennent a, et qui sont au nombre de $n-1$, toutes celles qui ne contenant pas a contiennent b et qui sont au nombre de $n-2$, etc... ; mais comme on sait déjà que le nombre total de combinaisons deux à deux est $\frac{n(n-1)}{2}$, on aura :

$$n-1+n-2+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Les combinaisons trois à trois seront formées de celles qui contiennent a et qui sont au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; de celles qui ne contenant pas a, contiennent b, et qui sont au nombre de $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$, etc. Donc on aura la sommation :

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}+\ldots+1=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Par le même procédé, on trouverait les sommations correspondantes aux combinaisons quatre à quatre, etc. La somme précédente peut servir pour le calcul de la pile de boulets triangulaire.

3° On peut mener une tangente en un point m d'une ellipse, en joignant une extrémité du grand axe avec ce point et prolongeant cette ligne jusqu'à la perpendiculaire élevée à l'autre extrémité de cet axe. Le milieu de la partie de la perpendiculaire comprise entre l'extrémité du grand axe et ce point de rencontre est un second point de la tangente. (Au lieu d'employer les axes, on peut se servir des diamètres conjugués, et appliquer le procédé à l'hyperbole et à la parabole.)

4° Aux théorèmes sur les diamètres conjugués, que j'ai donnés dans le journal de M. Liouville et dans les Annales, et qui se déduisent d'une méthode indiquée t. VII, p. 120 du Journal de Mathématiques, pour en trouver toutes les propriétés des diamètres conjugués, on peut ajouter le suivant :

« Soient deux points m', m'' conjugués pris sur une ellipse. On mène en ces points les rayons de courbure de cette ellipse.

Ces rayons conjugués, projetés respectivement sur un des rayons vecteurs passant en m' ou m'', donnent deux projections dont la somme est constante.

5° PROBLÈME. Par un foyer d'une ellipse, mener deux cordes c et c' faisant entre elles un angle donné, telles que la somme inverse $\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}$ soit un minimum. Si l'angle compris par les cordes est droit, cette somme sera constante.

QUESTION 138 (Voir t. V, p. 672).

Une parabole ayant un foyer fixe touche constamment une conique de même foyer; si on mène par ce foyer une ligne qui fasse un angle constant avec l'axe de la parabole, le lieu du point d'intersection de cette ligne avec la parabole variable est une conchoïde du cercle (limaçon de Pascal).

PAR M. VANNSON (FOURNIER),
Professeur.

Supposons, pour fixer les idées, que la courbe donnée soit une ellipse. Soit f le foyer commun à cette ellipse et à la parabole (*fig.* 22) variable; g le deuxième foyer. Soit A le point de contact de la parabole et de l'ellipse dans une position particulière de la parabole mobile. Si nous joignons gA, cette droite sera parallèle à l'axe de la parabole; abaissons fo perpendiculaire sur la tangente Ao, et oi perpendiculaire sur Ag; cette ligne oi sera la tangente au sommet de parabole que l'on considère. Donc, la distance ft du foyer f à cette droite sera le $\frac{1}{4}$ du paramètre de la parabole. Pour calculer ft, je joins oC par une ligne qui est parallèle à l'axe ft de la parabole. Si donc j'abaisse fx perpendiculaire sur Co, j'aurai $ft = Cx = Co - xC = a - c \cos AgC$. Ainsi le $\frac{1}{2}$ paramètre de notre parabole $= 2(a - c \cos AgC)$. Soit maintenant $Sfg =$ à l'angle constant que doit faire la sécante avec l'axe variable de la parabole ; appelons cet angle α ; prenons fS pour axe polaire, et soit fR la position particulière de la sécante, l'angle Rmg sera égal à α ; et l'angle Agc sera égal à $\alpha - gfR = \omega$. Ainsi le paramètre de notre parabole sera représenté par $2(a - c \cos \omega)$. Si donc on appelle ρ la distance du point f au point où la sécante fR rencontre la parabole, on aura, d'après l'équation de la parabole en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{2(a - c \cos \omega)}{1 - \cos \alpha} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{c \cos \omega}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Il est facile de reconnaître dans cette équation la courbe indiquée par l'énoncé.

Si on considère le cas particulier où $\alpha = \pi$, on trouvera :

$$\rho = a - c \cos \omega.$$

équation qui donne le lieu des sommets des paraboles tangents à une ellipse de même foyer. On peut, pour cette dernière question, démontrer sans aucun calcul que la courbe demandée est une conchoïde du cercle. En effet, le point t (*fig.* 22) est un point du lieu. Si nous prolongeons tf jusqu'à ce qu'on ait $tp = Co = a$; puis que nous joignions Cp, l'angle p sera droit, et le lieu du point p sera un cercle décrit sur fC comme diamètre. Or, $tp = a$; on voit donc que, pour construire la courbe demandée, il suffit de mener du point f des droites aux divers points du cercle ayant Cf pour diamètre, et de prolonger chacune de ces droites jusqu'à ce que la distance tp soit égale à a, construction qui donne bien la conchoïde du cercle.

Note. Le même problème a été résolu par M. Rispal.

NOTE

sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\;\ldots\ldots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_ny=0,$$

A_1, A_2, ... A_n étant supposés constants.

PAR M. J. DIENGER,

Docteur ès sciences, à Sinsheim, près Heidelberg, en Bade.

—

Supposons qu'on ait

$$\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+A_2\alpha^{n-2}+\ldots+A_{n-1}\alpha+A_n=$$
$$=(\alpha-\alpha_1)^{n_1}\,(\alpha-\alpha_2)^{n_2}\ldots(\alpha-\alpha^s)^{n_s}=\varphi(\alpha),$$

où $n_1+n_2+\ldots+n^s=n$, on aura, d'après un théorème bien connu :

$$\varphi(\alpha_1)=0,\ \varphi'(\alpha_1)=0,\ \varphi''(\alpha_1)=0,\ldots\ldots\varphi^{(n_1-1)}(\alpha_1)=0,$$
$$\varphi(\alpha_2)=0,\ \varphi'(\alpha_2)=0,\ \varphi''(\alpha_2)=0,\ldots\ldots\varphi^{(n_2-1)}(\alpha_2)=0,\ \text{etc.},$$

en désignant par $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$..... les fonctions dérivées de $\varphi(\alpha)$.

En mettant $y=e^{\alpha_1x}x^r$, on aura en général :

$$\frac{d^vy}{dx^v}=e^{\alpha_1x}[r.(r-1)\ldots(r-v+1)\,x^{r-v}+v.\alpha_1r(r-1)\ldots$$
$$\ldots(r-v+2)x^{r-v+1}+\frac{v.(v-1)}{1.2}\alpha_1^2r.(r-1)\ldots(r-v+3)x^{r-v+2}+$$
$$+\ldots\ldots+\alpha_1^vx^r]$$

pour $v \overset{=}{<} r$, et

$$\frac{d^vy}{dx^v}=e^{\alpha_1x}[v.(v-1)\ldots(v-r+1)\,\alpha_1^{v-r}+v.(v-1)\ldots$$
$$\ldots(v-r+2)\,\alpha_1^{\ldots}\,x+\ldots\ldots+\alpha_1^vx^r]$$

pour $\nu > r$. (*V.* pour exemples les leçons sur le calcul des fonctions, page 57.)

Donc on aura, r étant supposé $< n$, ou tout au plus $= n$:

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n y\right).\frac{1}{e^{\alpha_1 x}}=$$

$$=x^r[A_n+A_{n-1}\alpha_1+A_{n-2}\alpha_1^2+\ldots..+A_{n-r}\alpha_1^r+A_{n-r-1}\alpha_1^{r+1}+$$
$$+\ldots..+A_1\alpha_1^{n-1}+\alpha_1^n]+$$
$$+r.x^{r-1}[A_{n-1}+2A_{n-2}\alpha_1+\ldots..+rA_{n-r}\alpha_1^{r-1}+(r+1)A_{n-r-1}\alpha_1^r+$$
$$+(n-1)A_1\alpha_1^{n-2}+n\alpha_1^{n-1}]+$$
$$+\frac{r.(r-1)}{1.2}x^{r-2}[2.1A_{n-2}+\ldots..+r.(r-1)A_{n-r}\alpha_1^{r-2}+$$
$$+(r+1)rA_{n-r-1}\alpha_1^{r-1}+\ldots..+$$
$$+(n-1)(n-2)A_1\alpha_1^{n-3}+n.(n-1)\alpha_1^{n-2}]+$$
$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}x^{r-3}[3.2.1A_{n-3}+\ldots..+$$
$$+r(r-1)(r-2)A_{n-r}\alpha_1^{n-r}+\ldots..+n.(n-1)(n-2)\alpha_1^{n-3}]$$
$$\vdots$$
$$+rx[(r-1)\ldots1A_{n-r+1}+r.(r-1)\ldots..2A_{n-r}\alpha_1+\ldots..+$$
$$+n.(n-1)\ldots..(n-r+2)\alpha_1^{n-r+1}]+$$
$$+r.(r-1)\ldots1A_{n-r}+(r+1)r\ldots..2A_{n-r-1}\alpha_1+\ldots..+$$
$$+n.(n-1)\ldots..(n-r+1)\alpha_1^{n-r}=$$
$$=x^r\varphi(\alpha_1)+rx^{r-1}\varphi'(\alpha_1)+\frac{r.(r-1)}{1.2}x^{r-2}\varphi''(\alpha_1)+\ldots.+rx\varphi^{(r-1)}(\alpha_1)+$$
$$+\varphi^{(r)}(\alpha_1).$$

Maintenant si l'on a $r \leqq n_1-1$, on aura :

$\varphi(\alpha_1)=0$, $\varphi'(\alpha_1)=0$, ... $\varphi^{(r)}(\alpha_1)=0$, donc, pour $y=e^{\alpha_1 x}x^r$:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots..+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n y=0,$$

c'est-à-dire $y=e^{\alpha_1 x}x^r$ sera une solution de l'équation différentielle proposée. De même $Ce^{\alpha_1 x}x^r$ en sera une solution, si C est une constante arbitraire.

Donc, les solutions de l'équation proposée seront :

$$C_0 e^{\alpha_1 x},\ C_1 e^{\alpha_1 x} x,\ C_2 e^{\alpha_1 x} x^2 \ldots\ldots C_{n_1-1} e^{\alpha_1 x} x^{n_1-1},$$

$$C_0' e^{\alpha_2 x},\ C_1' e^{\alpha_2 x} x,\ C_2' e^{\alpha_2 x} x^2 \ldots\ldots C'_{n_2-1} e^{\alpha_2 x} x^{n_2-1},$$

$$\vdots$$

$$C_0^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x,\ C_1^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x,\ C^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x^2, \ldots C^{(s-1)}_{n^s-1} e^{\alpha_s x} x^{n_s-1}$$

où les quantités C sont des constantes absolument arbitraires. Or, comme l'équation proposée est linéaire, la somme de toutes ces solutions en sera aussi une solution, et cette somme sera l'intégrale complète, vu qu'elle renferme $n_1+n_2+\ldots+n^s=n$ constantes arbitraires. Donc l'intégrale complète de notre équation différentielle est :

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x}[C_0+C_1 x+C_2 x^2+\ldots\ldots+C^{n_1-1} x^{n_1-1}]+ \\ +\, & e^{\alpha_2 x}[C'_0+C'_1 x+C'_2 x^2+\ldots\ldots+C'^{n_2-1} x^{n_2-1}]+ \\ +\, & \ldots \\ & \vdots \\ +\, & e^{\alpha_s x}[C_0^{(s-1)}+C_1^{(s-1)} x+C_2^{(s-1)} x^2+\ldots\ldots+ \\ & \qquad + C^{(s-1)}_{n^s-1} x^{n^s-1}]=y. \end{aligned}$$

Cette équation a lieu, même pour des valeurs imaginaires de α_1, α_2, ... Or, si l'on suppose $\alpha_1=\gamma_1+\beta_1(i=\sqrt{-1})$, il faudra nécessairement qu'une des autres quantités $\alpha_2, \ldots \alpha_s$ soit égale à $\gamma_1-\beta_1 i$; soit donc $\alpha_2=\gamma_1-\beta_1 i$, on aura :

$$e^{\alpha_1 x}=e^{\gamma_1 x}[\cos(\beta_1 x)+i\sin(\beta_1 x)]\ ;$$

$$e^{\alpha_2 x}=e^{\gamma_1 x}[\cos(\beta_1 x)-i\sin(\beta_1 x)].$$

De là on tirera en supposant

$$C_r+C'_r=B_r$$

$$(C_r-C'_r)i=D_r.$$

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x}(C_0+C_1 x+\ldots\ldots+C_{n-1} x^{n_1-1})+ \\ +\, & e^{\alpha_2 x}(C'_0+C'_1 x+\ldots\ldots+C'_{n_2-1} x^{n_2-1})= \\ =\, & e^{\gamma_1 x}[B_0+B_1 x+\ldots\ldots+B_{n_1-1} x^{n_1-1}]\cos(\beta_1 x)+ \\ +\, & e^{\gamma_1 x}[D_0+D_1 x+\ldots\ldots+D_{n_1-1} x^{n_1-1}]\sin(\beta_1 x). \end{aligned}$$

On fera les mêmes substitutions pour d'autres racines imaginaires, et ainsi l'intégrale complète se trouvera dans la plus grande généralité possible. En traitant la question de la manière précédente, on n'aura pas besoin de considérations étrangères, quelquefois embarrassantes surtout pour les commençants. (Voyez par exemple *Leçons sur le calcul intégral*, par Moigno, leçon 37, § 242.)

SUR LA DÉCOMPOSITION

des fractions rationnelles, d'après M. Liouville (Journal de Mathématiques, t. XI, p. 462; 1846).

—

I. Soient :

$F(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots A_n$; $fx=Bx^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots B_n$.

Formons l'équation $F(x)+\alpha fx=0$, où α est un paramètre quelconque, mais ne se trouvant ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$; cette équation étant du degré n, désignons ses racines par $x_1, x_2 \ldots x_p \ldots x_n$; le théorème newtonien sur les coefficients des équations donne :

$$x_1+x_2+\ldots x_n=-\frac{A'}{A}-\alpha B.$$

Or, les racines sont évidemment chacune fonction de α; prenant donc la dérivée de cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots\frac{dx_n}{d\alpha}=-B.$$

Le premier membre peut s'écrire symboliquement :

$$\Sigma_1^n\frac{dx_p}{d\alpha}=-B;$$

c'est-à-dire qu'il faut donner à l'indice p successivement les valeurs 1, 2, 3 ... n, et prendre la somme de ces valeurs.

On a $F(x_1)+\alpha f(x_1)=0$; et prenant la dérivée par rapport à α, il vient :

$$F'(x_1)\frac{dx_1}{d\alpha}+f(x_1)+\alpha f'(x_1)\frac{dx_1}{d\alpha}=0\,;$$

où $F'x$, $f'x$ désignent les dérivées de Fx_1 et fx_1 par rapport à x_1, d'où l'on tire :

$$\frac{dx_1}{d\alpha}=-\frac{f(x_1)}{F'(x_1)+\alpha f'(x_1)}.$$

On a une semblable équation pour $\frac{dx_2}{d\alpha}$, et ainsi de suite; ajoutant toutes ces équations membre à membre, et comparant avec l'équation trouvée ci-dessus, on obtient :

$$B=\Sigma_1^n\frac{f(x_p)}{F'(x_p)+\alpha f'(x_p)},$$

symbole déjà expliqué.

II. Faisant $\alpha=0$, on a $B=\Sigma_1^n\frac{f(x_p)}{F'(x_p)}$; et alors les racines x_1, x_2 ... x_u sont celles de l'équation $F(x)=0$; mais il ne faut pas qu'une racine de $F(x)=0$ annule $F'(x)$. Ainsi Fx ne doit pas avoir de facteurs égaux.

III. *Théorème d'Euler*. Si l'on a $\alpha=0$ et $B=0$, fx n'est plus que du degré $n-2$; alors $\Sigma_1^n\frac{f(x_p)}{F'(x_p)}=0$; ainsi si l'on divise un polynôme du degré $n-2$ par la dérivée d'un polynôme du degré n, et qu'on substitue dans le quotient, à la place de x, les n racines du polynôme de degré n, la somme de tous les résultats est nulle ; théorème dû à Euler et qui renferme toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, comme on va voir.

IV. Faisons $Fx=(x-x_1)\varphi x$, alors φx est du degré $n-1$ et a pour racines x_2, x_3 ... x_n ; prenant la dérivée de Fx, il vient $F'x=\varphi x+(x-x_1)\varphi' x$; et fx étant du degré

$n-2$, on peut appliquer le théorème d'Euler à la fraction $\frac{fx}{Fx}$; substituant, à cet effet, dans $\frac{fx}{F'x}$ les racines de $Fx=0$, la somme des résultats est nulle. Donc

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\varphi'(x_2)}+\ldots\frac{f(x_n)}{(x_n-x_1)\varphi'(x_n)}=0;$$

d'où l'on a l'identité

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\frac{f(x_2)}{(x_1-x_2)\varphi'(x_2)}+\ldots\frac{f(x_n)}{x_1-x_n}.$$

La fraction $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ est donc décomposée en ses fractions simples $\frac{1}{x_1-x_2}$, $\frac{1}{x_1-x_3}$ ... etc.; on peut encore écrire ce résultat de cette manière :

$$\frac{fx}{\varphi x}=\Sigma_1^n\frac{f(x_p)}{(x-x_p)\varphi'(x_p)};$$

x_p désigne une des n racines de $\varphi x=0$, et fx est du degré $n-1$ au plus.

Observation. Cette méthode ne s'étend pas au cas des facteurs multiples. Celle qu'on a donnée t. IV, p. 295, est plus générale et plus élémentaire.

SUR UNE

CLASSE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ,

d'après M. Chelini.

—

I. Nous avons consigné dans les Nouvelles Annales (t. V, p. 162) la solution élégante que M. J. Binet a donnée de cette classe si importante d'équations dans le Journal de Mathématiques (t. II, p. 248); elle est fondée sur la décomposition des fractions rationnelles. Le procédé de M. Chelini, indépendant de cette opération, est plus rapide et plus élémentaire. M. Liouville était aussi parvenu au même procédé (Journal de Mathématiques, t. XI, p. 466).

II. Soit le système de n équations du premier degré entre les inconnues $x_1, x_2 \ldots x_n$:

$$\frac{x_1}{a_1 - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_1 - \alpha_2} + \ldots \frac{x_n}{a_1 - \alpha_n} = 1\,;$$

$$\frac{x_1}{a_2 - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_2 - \alpha_2} + \ldots \frac{x_n}{a - \alpha_n} = 1\,;$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_1}{a_n - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_n - \alpha_2} + \ldots \frac{x_n}{a_n - \alpha_n} = 1.$$

$a_1, a_2 \ldots a_n$ sont des quantités connues quelconques; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sont connues et *inégales*.

Considérons les n inconnues $x_1 \ldots x_n$ comme étant connues, et écrivons l'équation

$$\frac{x_1}{x - \alpha_1} + \frac{x_2}{x - \alpha_2} + \ldots \frac{x_n}{x - \alpha_n} = 1\,;$$

chassant les dénominateurs, elle sera une équation du degré n, ayant évidemment pour racines les n quantités $a_1, a_2 \ldots a_n$. Faisons $\alpha_1 - x = y$, l'équation devient :

$$1 + \frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{y + \alpha_2 - \alpha_1} + \ldots \frac{x_n}{y + \alpha_n - \alpha_1} = 0$$

équation en y degré n, ayant pour racines :

$$\alpha_1 - a_1\,;\ \alpha_1 - a_2 \ldots \alpha_1 - a_n.$$

Chassant le dénominateur, et prenant le dernier terme de l'équation, on a la relation connue :

$$(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)\ldots(\alpha_1 - a_n) = (-1)^n x_1(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1),$$

d'où l'on tire la valeur de x_1, qui revient à celle de M. Binet

(t. V, p. 165) ; changeant α_1 en α_2, et *vice versâ* ; on a la valeur de x_2, et ainsi des autres.

III. Ce procédé de M. Chelini est assez simple pour prendre désormais place dans les traités élémentaires. Ces équations ont acquis une grande célébrité par les beaux travaux de M. Lamé et les théorèmes de M. Chasles sur les surfaces du second degré dites homofocales. En général, les auteurs d'éléments ne font pas assez attention au choix des exemples, qu'ils prennent au hasard, sans autre but que d'exercer au calcul ; tandis que les exemples doivent être cherchés dans les ouvrages des grands maîtres, et préparer les élèves aux connaissances plus relevées dans les sciences mathématiques et physico-mathématiques. Il est vrai que quand nous nous mettons à écrire des Éléments, nous nous accordons de suite la dispense de connaître les grands maîtres. Tel médite un traité d'arithmétique qui sourirait de pitié au conseil qu'on lui donnerait d'étudier auparavant la théorie des nombres de Legendre. Il est si commode d'enseigner sans avoir besoin d'apprendre.

NOTE

sur l'équation $z^m = (1-z)^{m-1}$ (t. VI, p. 32).

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$z = \left(\frac{1-z}{z}\right)^{m-1};$$

faisant $\frac{1-z}{z} = \frac{1}{u}$, d'où $z = \frac{u}{1+u}$, il vient :

$$u^m - u = 1,$$

équation déjà discutée (t. II, p. 321).

THÉORÈME DE FERMAT

sur un trinôme; démonstration de M. Lamé, projet de souscription.

L'équation trinôme $z^n - x^n - y^n = 0$, lorsque n est un nombre entier supérieur à 2, ne peut être résolue en nombres rationnels; en d'autres termes, la surface représentée par cette équation et sous la condition énoncée, n'a aucun point ayant ses trois coordonnées simultanément rationnelles; propriété de l'espace que la géométrie est incapable de démontrer par ses propres moyens, et à laquelle les Grecs auraient attaché une immense importance, à en juger par l'intervention divine qu'ils réclamaient pour le problème subalterne de la Duplication du cube. Près de deux siècles se sont écoulés depuis que le théorème a été publié (*). Les têtes mathématiques les plus fortement organisées, et on les rencontre d'ordinaire dans le champ des *nombres*, ont médité ce théorème; leurs efforts n'ont abouti qu'à le démontrer assez péniblement pour le ternaire (Euler); le quaternaire (Fermat et Euler); le quinaire (Dirichlet et Legendre); le septénaire (Dirichlet et Lamé); une démonstration générale semblait désespérée. Les Euler, les Lagrange, les Legendre, les Abel, parmi les absents; Gauss, hors rang, les Cauchy, les Jacobi, les Poinsot, les Lesbegue, y avaient presque renoncé; lorsqu'à la séance de l'Académie des sciences de Paris, du 1er mars de cette année, un de ses membres est venu exposer une dé-

(*) Arithmorum libri sex, de numeris multangulis liber unus, cum interpretatione et commentariis Claudii Bachetii, et observationibus Pauli de Fermat. Accessit Doctrinæ analyticæ inventum novum ejusdem de Fermat. Tolosæ, 1670, fol.

monstration générale, d'une simplicité presque élémentaire (*); elle est fondée sur la théorie si importante des racines *complexes* des équations, sur laquelle les *Nouvelles Annales* ont appelé depuis longtemps l'attention des professeurs (t. II, p. 527, et t. III, p. 41 et 145). L'illustre arithmologue démontre rigoureusement que la somme des $n^{ième}$ puissances de deux nombres complexes d'une certaine forme, est décomposable en n facteurs complexes de la même forme (p. 313); mais cette décomposition n'est-elle possible que de cette manière? voilà ce qui reste à éclaircir. Mais déjà dans l'état actuel, c'est une admirable invention qui ajoutera à la gloire du pays, si le pays sait la reconnaître. Malheureusement les vérités abstraites ne frappent pas l'imagination de la multitude, et leur découverte, quelle qu'en soit la grandeur, n'a point de retentissement. C'est un motif de plus pour que les grands géomètres, l'honneur de notre Académie, et justes appréciateurs de tout mérite transcendant, s'empressent de voter un monument à leur illustre confrère; une médaille d'or, offerte à l'auteur, transmettrait à la postérité un témoignage de la reconnaissance contemporaine. C'est le sujet de la lettre suivante que j'ai adressée au célèbre rédacteur du *Journal des Mathématiques*.

Monsieur le Rédacteur,

M. Lamé vient de présenter à l'Académie la démonstration du théorème de Fermat. C'est la plus grande découverte du siècle, dans le monde mathématique. Car le vrai dynamomètre du génie est placé dans la théorie des nombres. C'est l'opinion d'Euler, homme qui s'y connaissait.

La gloire d'une découverte ne devient nationale que pour la

(*) C. Rendus, n° 9, (1er mars 1847), p. 310; publiés le 6 mars.

nation qui sait l'apprécier. Ne nous laissons pas devancer. Votre journal et son Rédacteur occupent une haute place dans la science. Ouvrez une souscription qui permette aux géomètres de tous pays d'offrir à votre illustre confrère un hommage d'admiration et de reconnaissance. Il vous appartient de fixer le mode et l'emploi de la souscription. Veuillez accepter mon obole, et m'inscrire pour quinze francs.

Agréez les salutations de votre très-dévoué,

O. TERQUEM.

3 mars 1847.

QUESTIONS.

140. En projetant *cylindriquement* deux hyperboles *conjuguées* sur un plan, les projections sont des hyperboles *conjuguées;* mais que deviennent les hyperboles conjuguées en les projetant *coniquement* sur un plan?

141. Soient A_n, A_{n+1}, A_{n+2} trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_n A_{n+2} - A^2_{n+1}$, elle est aussi récurrente. (Fourier.)

142. Un cône du second degré étant coupé par un plan perpendiculaire à un plan principal, concevons une sphère concentrique au cône et touchant le plan coupant; le plan tangent à la sphère, mené perpendiculairement au plan principal, coupe celui-ci suivant une droite dont la partie interceptée dans le cône est égale au paramètre de la section conique. (Jacques Bernoulli.)

143. Connaissant le centre et un point d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers. (Serret.)

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

(Suite. Voyez page 54.)

—

§ 2. *Démonstration des deux lemmes sur lesquels repose la résolution de deux équations à deux inconnues.*

1[er] LEMME. *Soient* A, B, C *trois fonctions de deux variables* x *et* y *vérifiant la relation*

$$(1) \quad A = BM + C,$$

M *étant aussi une fonction de* x *et de* y, *je dis que les solutions du système* $A=0$, $B=0$ *sont les mêmes que celles du système* $B=0$, $C=0$, *ou comme nous sommes convenus de l'écrire pour abréger, que*

$$[A, B] = [B, C].$$

D'abord il est évident que si un système de valeurs de x et de y, $x=\alpha$, $x=\beta$ annulent A et B, ces mêmes valeurs annuleront B et C, et réciproquement ; ce qu'il importe donc de démontrer, c'est qu'une solution commune aux deux systèmes, a dans les deux le même degré de multiplicité. Appelons y_n, y_p, ... y_r, les valeurs de x tirées de l'équation $B=0$, qui se réduisent à α quand on y fait $y=\beta$, si nous portons successivement ces valeurs à la place de x dans la relation (1), il viendra

$$\begin{aligned} A_n &= C_n \\ A_p &= C_p \\ &\vdots \\ A_r &= C_r. \end{aligned}$$

en appelant A_n, A_p, ... A_r ce que devient A pour

$x = y_n, y_p, \ldots y_r$, et C_n, C_p, ... C_r, ce que devient C pour les mêmes hypothèses. De là nous tirons

$$A_n A_p \ldots A_r = C_n C_p \ldots C_r.$$

Or le degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ du premier membre indique le degré de multiplicité de la solution $x=\alpha$, $y=\beta$ dans le système $A=0$, $B=0$, et celui du second membre le degré de multiplicité de la même solution dans le système $B=0$, $C=0$: ces deux degrés de multiplicité sont donc égaux.

2e LEMME. *Tout système de deux équations de la forme* $AB=0$, $C=0$, *peut être remplacé par les deux systèmes* $A=0$, $C=0$, *et* $B=0$, $C=0$; *en d'autres termes*,

$$[AB, C] = [A, C] + [B, C].$$

Il est évident d'abord qu'un système de valeurs de x et de y, $x=\alpha$, $y=\beta$, qui annulent AB et C, doivent nécessairement annuler A et C, ou B et C, et réciproquement. Ce qu'il suffit donc de démontrer, c'est qu'en appelant ν, ν', ν'' les degrés de multiplicité respectifs de la solution $x=\alpha$, $y=\beta$ dans les trois systèmes ($AB=0$, $C=0$), ($A=0$, $C=0$), ($B=0$, $C=0$), on a toujours $\nu = \nu' + \nu''$. Appelons y_n, y_p, ... y_r les valeurs de x tirées de l'équation $C=0$, qui se réduisent à α quand on y fait $y=\beta$; substituons successivement ces racines à la place de x dans A et dans B, et soient A_n, A_p ... A_r, B_n, B_p ... B_r les résultats obtenus; ν sera égal au degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$, du produit

$$A_n B_n A_p B_p \ldots A_r B_r,$$

et ν' et ν'' aux degrés d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$, des produits

$$A_n A_p \ldots A_r$$

et

$$B_n B_p \ldots B_r.$$

D'après cela, il est bien évident que $\nu = \nu' + \nu''$, comme il fallait le démontrer.

§ 3. *Méthode rigoureuse pour ramener la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues à celle de plusieurs systèmes composés d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues.*

Soient $A=0$, $B=0$ les deux équations proposées. Appliquons aux premiers membres, que nous supposons débarrassés de tous leurs facteurs fonctions de x, fonctions de y et fonctions de x et y, le procédé connu du plus grand commun diviseur; si $q, q_1, q_2 \ldots q_n$ et $Rr, R_1r_1, R_2r_2 \ldots R_{n-1}r_{n-1}, r_n$ sont les quotients et les restes successifs, et $c, c_1, c_2 \ldots c_n$ les fonctions de y par lesquelles on a dû multiplier les dividendes pour obtenir des quotients entiers par rapport à y, nous aurons la suite des relations

$$(1)\qquad \begin{cases} cA = Bq + Rr \\ c_1B = Rq_1 + R_1r_1 \\ c_2R = R_1q_2 + R_2r_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_nR_{n-2} = R_{n-1}q_n + r_n. \end{cases}$$

Or la première relation nous donne, en vertu du premier lemme (§ 2),

$$[cA,B] = [B,Rr],$$

d'où, en vertu du second lemme (§ 2) :

$$[A,B] + [c,B] = [B,R] + [r,B],$$

d'où

$$[A,B] = [B,R] + [r,B] - [c,B];$$

de même la seconde relation donne :

$$[B,R] = [R,R_1] + [r_1,R] - [c_1,R],$$

la troisième :

$$[R,R_1] = [R_1,R_2] + [r_2,R_1] - [c_2,R_1],$$

et ainsi de suite; enfin la dernière :

$$[R_{n-2}, R_{n-1}] = [r_n, R_{n-1}] - [c_n, R_n].$$

Ajoutant toutes ces égalités et supprimant les termes communs aux deux membres, il vient :

$$[A,B] = \begin{cases} [r, B] + [r_1, R] + [r_2, R_1] + \dots + [r_n, R_{n-1}] \\ -[c, B] - [c_1, R] - [c_2, R_1] - \dots - [c_n, R_{n-1}], \end{cases}$$

ce qui ramène la résolution du système proposé à celle de $2(n+1)$ autres systèmes composés chacun d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues.

§ 4. *Simplification de la méthode précédente. — Démonstration complète du théorème de MM. Labatie et Sarrus.*

Proposons-nous de simplifier les résultats qu'a fournis la méthode précédente, en cherchant à retrancher d'une manière générale et algébrique les solutions $[c, B]$, $[c_1, R]$, $[c_2, R_1]$,... $[c_n, R_{n-1}]$ des solutions $[r, B]$, $[r_1, R]$, $[r_2, R_1]$... ... $[r_n, R_{n-1}]$. Reprenons les relations (1) du paragraphe précédent, et pour simplifier le raisonnement, supposons-y $n = 4$, ce qui les réduira à

$$(1) \quad \begin{cases} cA = Bq + Rr \\ c_1B = Rq_1 + R_1r_1 \\ c_2R = R_1q_2 + R_2r_2 \\ c_3R_1 = R_2q_3 + R_3r_3 \\ c_4R_2 = R_3q_4 + r_4. \end{cases}$$

La première nous donnera, comme on l'a vu plus haut,

$$[A, B] = [B, R] + [r, B] - [c, B].$$

Appelons d le plus grand commun diviseur entre r et c, d divisant exactement r et c, on aura (lemme 2) :

$$[r, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + [d, B], \quad [c, B] = \left[\frac{c}{d}, B\right] + [d, B],$$

et par conséquent, en substituant dans la dernière relation,

$$[A, B]=[B, R]+\left[\frac{r}{d}, B\right]-\left[\frac{c}{d}, B\right];$$

mais d étant le plus grand commun diviseur entre r et c, les quotients $\frac{r}{d}$ et $\frac{c}{d}$ sont premiers entre eux; les solutions $\left[\frac{c}{d}, B\right]$ sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r}{d}, B\right]$; cela nous montre que ces dernières solutions sont toutes contenues dans $[A, B]$, et qu'en posant:

$$[A, B]=\left[\frac{r}{d}, B\right]+[A_1, B_1],$$

on a :

$$(2)\quad [A_1, B_1]=[B, R]-\left[\frac{c}{d}, B\right].$$

Considérons la seconde des relations (1). Nous en tirons d'abord :

$$[B, R]=[R, R_1]+[r_1, R]-[c_1, R],$$

d'où, en appelant d_1' le plus grand commun diviseur entre r_1 et c_1, et opérant comme plus haut,

$$[B, R]=[R,R_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'}, R\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right];$$

substituons cette valeur de $[B, R]$ dans l'égalité (2), il viendra :

$$(3)\quad [A_1, B_1]=[R, R_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'}, R\right]-\left[\frac{c}{d}, B\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right];$$

appelons d_1'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{d_1'}{r_1}$ et $\frac{c}{d}$, je dis que l'on aura :

$$[d_1'', R]=[d_1'', B],$$

En effet, divisant les deux membres de la première des égalités (1) par d, il vient :

$$(a) \qquad \frac{c}{d}\mathrm{A}=\mathrm{BQ}+\mathrm{R}\frac{r}{d},$$

ou $\mathrm{Q}=\frac{q}{d}$ est entier, puisque $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ le sont; or d_1'' étant un diviseur de $\frac{c}{d}$, on a (lemme 1) :

$$[d_1'', \mathrm{BQ}]=\left[d_1'', \mathrm{R}\frac{r}{d}\right],$$

d'où, $\frac{r}{d}$ étant premier avec $\frac{c}{d}$, et par suite avec d_1'',

$$[d_1'', \mathrm{B}]+[d_1'', \mathrm{Q}]=[d_1'', \mathrm{R}],$$

d'où

$$[d_1'', \mathrm{B}] \overset{=}{<} [d_1'', \mathrm{R}];$$

mais d'un autre côté, si l'on divise par d_1' les deux membres de la seconde des équations (1), ce qui donne :

$$(b) \qquad \frac{c_1}{d_1'}\mathrm{B}=\mathrm{RQ}_1+\mathrm{R}_1\frac{r_1}{d_1'},$$

on peut en déduire semblablement

$$[d_1'', \mathrm{R}] \overset{=}{<} [d_1'', \mathrm{B}].$$

Nous conclurons de là que

$$[d_1'', \mathrm{B}]=[d_1'', \mathrm{R}];$$

donc, en remarquant que

$$\left[\frac{r_1}{d_1'}, \mathrm{R}\right]=\left[\frac{r'}{d_1'd_1''}, \mathrm{R}\right]+[d_1'', \mathrm{R}]$$

et

$$\left[\frac{c}{d}, \mathrm{B}\right]=\left[\frac{c}{dd_1''}, \mathrm{B}\right]+[d_1'', \mathrm{B}],$$

on pourra écrire la relation (3) sous la forme :

$$[\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1]=[\mathrm{R}, \mathrm{R}_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, \mathrm{R}\right]-\left[\frac{c}{dd_1''}, \mathrm{B}\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, \mathrm{R}\right];$$

et comme les deux quotients $\frac{c_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{dd_1''}$ sont l'un et l'autre premiers avec $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, d'où résulte que les solutions $\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]$ sont distinctes des solutions $\left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right]$; on peut conclure que ces dernières solutions sont contenues dans $[A_1, B_1]$, et qu'en posant :

$$[A_1, B_1]=\left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right]+[A_2, B_2],$$

on a :

$$(4)\quad [A_2, B_2]=[R, R_1]-\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right].$$

Passons à la troisième des égalités (1) ; nous en tirons :

$$[R, R_1]=[R_1, R_2]+[r_2, R_1]-[c_2, R_1],$$

d'où, en appelant d_2' le plus grand commun diviseur entre r_2 et c_2, et opérant comme plus haut :

$$[R, R_1]=[R_1, R_2]+\left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Substituons cette valeur de $[R, R_1]$ dans la relation (4), ce qui donne :

$$(5)\quad [A_2, B_2]=[R_1, R_2]+\left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right]-\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right],$$

et appelons d_2'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, je dis que l'on aura :

$$[d_2'', R_1]=[d_2'', R].$$

En effet, divisant par d_1' les deux membres de la seconde des égalités (1), il vient :

$$(c)\qquad \frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'}.$$

Or d_2'' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'}$, on a :

$$[d_2'', RQ_1] = \left[d_2'', R_1\frac{r_1}{d_1'}\right];$$

donc

$$[d_2'', R] + [d_2', Q_1] = [d_2'', R_1]$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$ est premier avec $\frac{c_1}{d_1'}$ et par suite avec d_2''; donc

$$[d_2'', R] \overline{\overline{<}} [d_2'', R_1];$$

d'un autre côté, si l'on divise par d_2' les deux membres de la troisième des égalités (1), ce qui donne :

$$(d) \qquad \frac{c_2}{d_2'}R = R_1Q_2 + R_2\frac{r_2}{d_2'},$$

on pourra dire que d_2'' étant un diviseur de $\frac{r_2}{d_2'}$, on a :

$$[d_2'', R_1Q_2] = \left[d_2'', \frac{c_2}{d_2'}R\right],$$

d'où

$$[d_2'', R_1] \overline{\overline{<}} [d_2'', R].$$

Nous conclurons de là

$$[d_2'', R_1] = [d_2'', R];$$

et par conséquent, en remarquant que

$$\left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''}, R_1\right] + [d_2'', R_1]$$

et

$$\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right] = \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] + [d_2'', R],$$

que l'égalité (5) peut se mettre sous la forme :

$$(6) \quad [A_2, B_2] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''}, R_1\right] - \left[\frac{c}{dd_1''}, B\right] -$$

$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Appelons encore d_2''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ et $\frac{c}{dd_1''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_2''', R_1]=[d_2''', B].$$

En effet, entre les deux égalités

$$\frac{c}{d}A=BQ+R\frac{r}{d},$$

$$\frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'},$$

déjà considérées, éliminons R; puis l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_1'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{d}$, il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''}Q_1A=BQ'+R_1\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1'd_1''},$$

où Q' est entier, puisque $\frac{c}{dd_1''}$, $\frac{r}{d}$ et $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$ le sont. Mais d_2''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''}$, on a :

$$[d_2''', BQ']=\left[d_2''', R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\right];$$

donc

$$[d_2''',B]+[d_2''',Q']=[d_2''', R_1];$$

puisque $\frac{r}{d}$ et $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$ sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''}$ et par suite avec d_2'''; donc

$$[d_2''', B]\ \overset{=}{<}\ [d_2''', R_1].$$

D'un autre côté, si l'on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'}R=R_1Q_2+R_2\frac{r_2}{d_2'},$$

et que l'élimination faite, on divise de part et d'autre par

d_2'' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'}$ et $\frac{r_2}{d_2'}$, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}\,\frac{c_2}{d_2'}\,B = R_1Q'' + R_2Q_1\frac{r_2}{d_2'd_2''};$$

et d_2''' étant un diviseur de $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, on verra de même que

$$[d_2''', R_1] \overset{=}{<} [d_2''', B].$$

Nous conclurons de là

$$[d_2''', R_1] = [d_2''', B],$$

et par conséquent en remarquant que

$$\left[\frac{r_2}{d_2'd_2''}, R_1\right] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [d_2''', R_1]$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] + [d_2''', B],$$

que l'on peut écrire la relation (6) sous la forme :

$$[A_2, B_2] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] - \\ - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Actuellement les trois quotients $\frac{c_2}{d_2'}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$ sont premiers avec $\frac{r_2}{d'_2d''_2d'''_2}$; donc les solutions $\left[\frac{c_2}{d'_2}, R_1\right]$ $\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right]$ sont distinctes des solutions $\left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right]$. Cela nous montre que ces dernières solutions sont toutes renfermées dans $[A_2, B_2]$, et que l'on peut par conséquent poser

$$[A_2, B_2] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [A_3, B_3];$$

ce qui donne :

$$(7)\quad [A_3, B_3] = [R_1, R_2] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Passons à la quatrième des relations (1), nous en tirons :

$$[R_1, R_2] = [R_2, R_3] + [r_3, R_2] - [c_3, R_2];$$

d'où, en appelant d_3' le plus grand commun diviseur entre r_3 et c_3, et opérant comme plus haut,

$$[R_1, R_2] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Substituant cette valeur de $[R_1, R_2]$ dans la relation (7), il viendra :

$$(8)\quad [A_3, B_3] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, R\right] -$$

$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Appelons d_3'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, je dis que l'on aura :

$$[d_3'', R_2] = [d_3'', R_1].$$

Il suffit, en effet, de considérer les deux égalités :

$$\frac{c_2}{d_2'} R = R_1 Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'} R_1 = R_2 Q_3 + R_3 \frac{r_3}{d_3'},$$

obtenues en divisant la troisième des égalités (1) par d_2' et la quatrième par d_3', et de raisonner sur elles comme on l'a déjà fait sur les égalités (a) et (b) ou sur les égalités (c) et (d). La relation

$$[d_3'', R_2] = [d_3'', R_1]$$

permet de mettre l'égalité (8) sous la forme :

$$(9)\quad [A_1, B_3] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, R_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Il suffit de remarquer que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, R_2\right] + [d_3'', R_2],$$
$$\left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right] = \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] + [d_3'', R_1].$$

Appelons encore d_3''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$; je dis que l'on aura :

$$[d_3''', R_2] = [d_3''', R].$$

En effet, entre les deux égalités :

$$\frac{c_1}{d_1'} B = R Q_1 + R_1 \frac{r_1}{d_1'},$$
$$\frac{c_2}{d_2'} R = R_1 Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'},$$

éliminons R_1, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_2'', plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''} Q_2 B = R Q_1' + R_2 \frac{r_2}{d_2'd_2''} \frac{r_1}{d_1'}.$$

Or d_3''' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, on a :

$$[d_3''', RQ_1'] = \left[d_3''', R_2 \frac{r_2}{d_2'd_2''} \frac{r_1}{d_1'}\right];$$

donc

$$[d_3''', RQ_1'] = [d_3''', R_2],$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ sont premiers avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, et par suite avec d_3'''; donc

$$[d_3''', \mathrm{R}] \overline{\underset{<}{=}} [d_3''', \mathrm{R}_2].$$

D'un autre côté, si on élimine R_1 entre les daux égalités

$$\frac{c_2}{d_2'}\mathrm{R} = \mathrm{R}_1\mathrm{Q}_2 + \mathrm{R}_2\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'}\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2\mathrm{Q}_3 + \mathrm{R}_3\frac{r_3}{d_3'},$$

et que, l'élimination faite, on divise de part et d'autre par d_3'' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_2}{d_2'}$ et $\frac{r_3}{d_3'}$, il viendra :

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'}\mathrm{R} = \mathrm{R}_2\mathrm{Q}_1'' + \mathrm{R}_3\mathrm{Q}_2\frac{r_3}{d_3'd_3''};$$

et d_3''' étant un diviseur de $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, on trouvera de même :

$$[d_3''', \mathrm{R}_2] \overline{\underset{<}{=}} [d_3''', \mathrm{R}].$$

Nous conclurons de là

$$[d_3''', \mathrm{R}] = [d_3''', \mathrm{R}_2],$$

et par conséquent en remarquant que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, \mathrm{R}_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, \mathrm{R}_2\right] + [d_3''', \mathrm{R}_2],$$

$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, \mathrm{R}\right] = \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right] + [d_3''', \mathrm{R}],$$

que l'on peut écrire la relation (9) sous la forme :

$$(10)\ [\mathrm{A}_3, \mathrm{B}_3] = [\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, \mathrm{R}_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, \mathrm{B}\right]$$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, \mathrm{R}_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, \mathrm{R}_2\right].$$

Appelons enfin d_3'''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$ et $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_3'''', R_2] = [d_3'''', B].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c}{dd_1''}Q_1A = BQ' + R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''},$$

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}\frac{c_2}{d_2'}B = R_1Q'' + R_2Q_1\frac{r_2}{d_2'd_2''},$$

éliminons R_1, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_2''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c}{dd_1''}$ et $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, et par Q_1, qui sera facteur à deux et par suite aux trois termes, il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''}Q''A = BQ_1''' + R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''};$$

or d_3'''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, on a :

$$[d_3'''', BQ_1'''] = \left[d_3'''', R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}\right];$$

donc

$$[d_3'''', BQ_1'''] = [d_3'''', R_2],$$

puisque $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}$ sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, et par suite avec d_3'''' ; donc

$$[d_3'''', B] \leqq [d_3'''', R_2],$$

D'un autre côté, si on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}Q_2B = RQ_1' + R_2\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'}R = R_2Q_1'' + R_3Q_2\frac{r_3}{d_3'd_3''},$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_3''' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, et par Q, facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}\ \frac{c_2}{d_2'd_3''}\ \frac{c_3}{d_3'}\ B = R_2Q_1'''' + R_3Q_1'\ \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

et d_3'''' étant un diviseur de $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_3}{d_3'}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, on trouvera de même :

$$[d_3'''', R_2] \overline{\overline{<}} [d_3'''', B];$$

de là nous conclurons

$$[d_3'''', R_2] = [d_3'''', B],$$

et par suite, en remarquant que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, R_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + [d_3'''', R_2]$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] + [d_3'''', B],$$

que l'on peut mettre l'égalité (10) sous la forme :

$$[A_3, R_3] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right]$$

$$-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]$$

$$-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Actuellement les quatre quotients $\frac{c_3}{d_3'}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$ sont premiers avec $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}$; les solutions $\left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right]$, $\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right]$, $\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$ sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right]$, donc ces dernières solutions sont toutes renfermées dans $[A_3, B_3]$; posant dès lors :

$$[A_3, B_3] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_2''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + [A_4, B_4],$$

on aura :

$$(11)\quad [A_4, B_4] = [R_2, R_3] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

(*La fin prochainement.*)

DÉMONSTRATION

d'un théorème de M. CHASLES, *sur les rayons vecteurs des coniques.*

(Question d'examen, *voir* t. V, p. 702.)

Quand deux courbes du second degré ont un foyer commun, si l'on mène de ce point deux rayons vecteurs aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'une des courbes, la somme ou la différence de ces rayons divisés respectivement par les rayons de la seconde courbe, dirigés suivant les mêmes droites que les premiers, est constante.

1. Je supposerai, d'abord, que la première courbe est une ellipse. Je nommerai $2a$ son grand axe; $2c$ la distance de ses deux foyers F, F' (*fig.* 23); e le rapport $\frac{c}{a}$; r, r' les rayons vecteurs Fd, Fd', menés du foyer F aux extrémités d, d' d'un diamètre quelconque dCd' de l'ellipse.

Le quadrilatère $FdF'd'$ étant évidemment un parallélogramme, on a, pour toutes les directions données au diamètre dCd' :

$$Fd + Fd' = Fd + F'd, \quad \text{ou} \quad r + r' = 2a. \qquad (1)$$

Soient FD, FD′, ou R, R′, les rayons vecteurs de la seconde courbe, dirigés suivant Fd, Fd'; et GG′ la directrice correspondante au foyer F. La direction de l'axe focal de cette courbe s'obtiendra en abaissant du foyer F une perpendiculaire FN sur la directrice GG′.

Je prends pour axe des abscisses positives le prolongement FX de la perpendiculaire NF, et je place au point F l'origine des coordonnées ; l'axe des y sera la droite FY perpendiculaire sur FX.

En désignant par δ l'angle F′FX, l'abscisse CM du centre C de l'ellipse sera $FC \times \cos\delta$, ou $c \cos\delta$; et si x, x' représentent les abscisses des extrémités d, d' du diamètre dCd', on aura, quelle que soit la direction de ce diamètre :

$$x + x' = 2c \,.\, \cos\delta. \qquad (2)$$

Actuellement, je nomme :

e' le rapport invariable des distances DF, DG d'un point quelconque de la seconde courbe au foyer F, et à la directrice correspondante ;

p' le demi-paramètre, ou l'ordonnée correspondante au foyer, qui est évidemment égale au produit $FN \times e'$;

X, X′, les abscisses des extrémités D, D′ des rayons R, R′.

Et je distingue deux cas : la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, ou bien une hyperbole.

2. Lorsque la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, les trois points D, D′, F sont toujours situés d'un même côté de la directrice GG′. Et, suivant que l'abscisse du point D sera positive ou négative, on aura, en abaissant de ce point une perpendiculaire DH sur l'axe des y, qui rencontre en G la directrice :

$$FD = DG \times e' = (DH + FN)e',$$

ou

$$FD = DG \times e' = (FN - DH)e',$$

ce qui donne, dans les deux hypothèses, en tenant compte du signe de X :

$$R = p' + e'X. \qquad (3)$$

On a de même : $$R' = p' + e'X'. \qquad (4)$$

Les valeurs de R, R', déterminées par les formules (3) et (4), sont nécessairement positives.

De plus, les triangles semblables Fdh, FDH donnent $\frac{Fd}{FD} = \frac{Fh}{FH}$. Lorsque les rayons F$d$, FD ou r, R, sont dirigés dans le même sens, les abscisses x, X, des points d, D ont le même signe, et l'on peut substituer au rapport $\frac{Fh}{FH}$ celui des abscisses x, X. Alors, l'égalité précédente devient :

$$(5) \qquad \frac{r}{R} = \frac{x}{X}; \text{ on trouve de même } \frac{r'}{R'} = \frac{x'}{X'}. \qquad (6)$$

Au moyen de ces relations, il est facile de démontrer le théorème énoncé.

En effet, remplacez dans l'équation (3) X par sa valeur $\frac{Rx}{r}$ déduite de l'équation (5), il en résultera successivement :

$$R = p' + \frac{e'Rx}{r}; \quad Rr = p'r + e'Rx; \quad \frac{r}{R} = \frac{r - e'x}{p'}. \qquad (7)$$

Par un calcul entièrement semblable, les équations (4) et (6) donnent :

$$\frac{r'}{R'} = \frac{r' - e'x'}{p'}. \qquad (8)$$

On a donc $\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \frac{(r + r') - e'(x + x')}{p'}$, ou parce que $r + r' = 2a$, et $x + x' = 2c \,.\, \cos\delta$:

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \frac{2a - 2e'c.\cos\delta}{p'} = \frac{2a}{p'}(1 - ee'.\cos\delta.) \qquad (9)$$

Cette dernière égalité démontre que la somme des rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{r'}{R'}$ est une quantité constante.

Remarque. Si les rayons R, R′, étaient dirigés en sens contraires de r, r', les abscisses X, X′, auraient des signes différents de ceux des abscisses x, x'. Alors, les équations (5) et (6) deviennent $\frac{r}{R}=-\frac{x}{X}$, $\frac{r'}{R'}=-\frac{x'}{X'}$; on en déduit $X=-\frac{Rx}{r}$, $X'=-\frac{R'x'}{r'}$, et il faut remplacer x, x', par $-x$, $-x'$, dans le calcul qui a conduit aux relations (7) et (8). Cette substitution donne :

$$\frac{r}{R}=\frac{r+e'x}{p'},\ \frac{r'}{R'}=\frac{r'+e'x'}{p'},\ \text{et par suite :}$$

$$\frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}=\frac{2a+2e'c\,.\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1+ee'\cos\delta); \quad (10)$$

de sorte que si l'on désigne par $R_{,}$, $R_{,}'$ les rayons vecteurs de la seconde courbe, dirigés en sens contraires des rayons r, r', de la première, on aura constamment :

$$\frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}+\frac{r}{R_{,}}+\frac{r'}{R_{,}'}=\frac{4a}{p'}.$$

3. Supposons, maintenant, que la seconde courbe est une hyperbole (*fig.* 24).

Lorsque l'extrémité du rayon vecteur FD ou R appartiendra à la branche DM′D′ dont tous les points sont situés, par rapport à la directrice GG′, du même côté que le foyer F commun aux deux courbes, on aura toujours :

$$R=p'+e'X; \quad (3)$$

et par conséquent :

$$\frac{r}{R}=\frac{r-e'x}{p'}, \quad \text{ou} \quad \frac{r}{R}=\frac{r+e'x}{p'},$$

suivant que r, R seront dirigés dans le même sens ou en sens contraires.

Mais si le rayon considéré est la droite FM dont l'extrémité appartient à la seconde branche de l'hyperbole, la valeur absolue de R sera donnée par la formule $R = -(p' + e'X)$, comme il est facile de le voir, en abaissant du point M une perpendiculaire MG' sur la directrice. Alors on a :

$$\frac{r}{R} = -\left(\frac{r + e'x}{p'}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{r}{R} = -\left(\frac{r - e'x}{p'}\right),$$

suivant que r et R ont la même direction ou des directions opposées.

Enfin, lorsque Fd ou r coïncide avec l'une des deux droites Fb, Fa, menées par le foyer F parallèlement aux asymptotes à la branche DD' de l'hyperbole, on a $R = \infty$, et $\frac{r}{R} = 0$.

Cela posé, menons une droite du point b au centre C de l'ellipse, que nous supposons situé dans l'angle bFa ; l'extrémité b' du diamètre bCb' peut avoir trois positions différentes : ce point sera extérieur ou intérieur à l'angle bFa (*figures* 24 et 25), ou bien il coïncidera avec le point a (*fig.* 26).

1° Le point b' étant (*fig.* 24) hors de l'angle bFa; quelle que soit la direction donnée au diamètre de l'ellipse, les rayons vecteurs r, r', menés aux extrémités du diamètre, ne pourront être situés, tous deux, dans l'intérieur de l'angle bFa.

Si les rayons r, r', ont les directions Fd, Fd', extérieures à bFa, les droites Fd, Fd', prolongées, s'il est nécessaire, rencontreront la première branche de l'hyperbole en des points D, D', et on aura :

$$\frac{r}{R} = \frac{Fd}{FD} = \frac{r - e'x}{p'}, \quad \frac{r'}{R'} = \frac{Fd'}{FD'} = \frac{r' - e'x'}{p'},$$

par conséquent :

$$\frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Si l'un des rayons Fm, ou r, est dans l'angle bFa, l'autre Fm', ou r', sera hors de cet angle ; dans ce cas, prolongez la droite mF jusqu'à ce qu'elle rencontre la seconde branche de l'hyperbole en un point M. Il en résultera :

$$\frac{r}{R}=\frac{Fm}{FM}=-\frac{(r-e'x)}{p'}.$$

D'ailleurs,
$$\frac{r'}{R'}=\frac{Fm'}{FM'}=\frac{r'-e'x'}{p'};$$

d'où : $$\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Enfin, lorsque r, r', sont Fb, Fb', on a $\frac{r}{R}=0$, et

$$\frac{r'}{R'}=\frac{Fb'}{FB'}=\frac{r'-e'x'}{p'}.$$

Mais $r'-e'x'=2a-2e'c\cos\delta$. En effet, $\frac{1}{e'}$ représentant le cosinus de l'angle bFX, que l'une des asymptotes de l'hyberbole fait avec l'axe focal de cette courbe, l'abscisse x du point b est égale à F$b\times\frac{1}{e'}$, donc $x=\frac{r}{e'}$, ou $e'x=r$.

On a de plus (§ 1, pages 150, 151),

$$r'=2a-r,\quad x'=2c\cos\delta-x;$$

ces équations donnent immédiatement :

$$r'-e'x'=2a-2e'c\,.\cos\delta.$$

Ainsi :

$$\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c.\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

2° Quand le point b' est dans l'angle bFa (*fig.* 25), les rayons vecteurs r, r', peuvent être dirigés suivant des droites

Fm, Fm', intérieures à cet angle. Ces rayons prolongés rencontreront la seconde branche de l'hyperbole en des points M, M', et on aura :

$$\frac{r}{R}=\frac{Fm}{FM}=-\left(\frac{r-e'x}{p'}\right),\quad \frac{r'}{R'}=\frac{Fm'}{FM'}=-\left(\frac{r'-e'x'}{p'}\right);$$

d'où :

$$\frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}=\frac{2e'c\cos\delta-2a}{p'}=\frac{2a}{p'}(ee'\cos\delta-1).$$

Si l'un des rayons r, ou Fd, est intérieur, et l'autre, Fd', extérieur à l'angle bFa, en prolongeant le premier jusqu'à la rencontre de la seconde branche de l'hyperbole, il en résultera :

$$\frac{r}{R}=\frac{Fd}{FD}=-\left(\frac{r-e'x}{p'}\right);\quad \frac{r'}{R'}=\frac{Fd'}{FD'}=\frac{r'-e'x'}{p'};$$

et par suite : $\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2e'c\cos\delta-2a}{p'}.$

Enfin en donnant aux rayons r, r', les directions Fb, Fb', on trouve : $\frac{r'}{R'}=\frac{2e'c.\cos\delta-2a}{p'},\quad \frac{r}{R}=0.$

3° Lorsque les points b, a, sont les extrémités d'un diamètre de l'ellipse (*fig.* 26), les rayons vecteurs r, r', menés du foyer aux extrémités d'un autre diamètre, seront toujours : l'un, Fd, extérieur, et l'autre, Fd', intérieur à l'angle bFa. On prolongera Fd' jusqu'à la seconde branche de l'hyperbole en D', et on aura :

$$\frac{r'}{R'}=\frac{Fd'}{FD'}=-\left(\frac{r'-e'x'}{p'}\right),\quad \frac{r}{R}=\frac{Fd}{FD}=\frac{r-e'x}{p'};$$

d'où :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Mais $2a-2e'c\cos\delta=0$. En effet, $\frac{1}{e'}$ représentant le cosinus de l'angle que les asymptotes de l'hyperbole font avec l'axe

FX de la courbe, la somme des abscisses des points b, a, est égale à $\frac{Fb+Fa}{e'}=\frac{2a}{e'}$. D'ailleurs la somme des mêmes abscisses est $2c.\cos\delta$; on a donc $\frac{2a}{e'}=2c.\cos\delta$;

ou $$2a-2e'c.\cos\delta=0.$$

Par conséquent, on aura constamment $\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=0$. Ce qui donne la proportion :

$$Fd:Fd'::FD:FD'.$$

On pourrait encore supposer que le centre C de l'ellipse est situé hors de l'angle bFa, ou sur l'un des côtés de cet angle, mais l'examen de ces deux cas ne donnerait lieu à aucune observation nouvelle. D'après ce qui précède, il sera toujours facile de voir dans quels sens on doit prendre les rayons R, R′ pour que la somme ou la différence des rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{r'}{R'}$, soit constante, pour toutes les directions données au diamètre de l'ellipse.

4. Il reste à démontrer le théorème, dans l'hypothèse où la première courbe est une hyperbole (*fig.* 27).

En conservant la notation adoptée (§ 1, pages 150 et 151), et disposant les axes des coordonnées de la même manière, on aura évidemment :

$$r-r'=Fd-Fd'=2a\ldots\ (1),\ \text{et}\ x+x'=2.c.\cos\delta\ldots\ (2).$$

Si la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, la valeur absolue du rapport $\frac{r}{R}$ sera donnée par l'une ou l'autre des formules :

$$\frac{r}{R}=\frac{r-e'x}{p'}\ldots\ (3),\ \text{ou}\ \frac{r}{R}=\frac{r+e'x}{p'}\ldots\ (4),$$

suivant que R et r seront dirigés dans le même sens, ou en sens contraires (§ 2, page 151); et de même :

$$\frac{r'}{R'}=\frac{r'-e'x'}{p'}\dots.\ (5),\ \text{ou}\ \frac{r'}{R'}=\frac{r'+e'x'}{p'}\dots.\ (6).$$

En retranchant l'équation (6) de l'équation (3), membre à membre, il vient :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{r-r'-e'(x+x')}{p'};$$

d'où :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c.\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta)\dots..\ (7);$$

et si l'on retranche l'équation (5) de (4), il en résulte :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2a}{p'}(1+ee'\cos\delta)\dots..\ (8).$$

Dans chacune des relations (7) et (8), r représente le plus grand des deux rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités d'un diamètre de l'hyperbole. La première de ces deux formules, (7), convient au cas où R, r, ont la même direction, et R$'$, r', des directions opposées. Dans la seconde, (8), on suppose, au contraire, les rayons R, r, en prolongement l'un de l'autre, et r', R$'$, dirigés dans le même sens.

Remarque. Si R_1, R'_1, représentent des rayons de sens contraires à r, r', on aura :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}+\frac{r}{R_1}-\frac{r'}{R_1'}=\frac{4a}{p'}.$$

Lorsque la seconde courbe considérée est aussi une hyperbole, on trouve encore, au moyen des formules établies (N. 3, page 153), que la somme ou la différence des rayons r, r', divisés respectivement par les rayons de la seconde courbe, dirigés suivant les mêmes droites que les premiers, est constante. G.

CONCOURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, 1846.

PAR M. DROUETS,
Élève à l'École de la Flèche (*).

Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, *on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse* (fig. 29).

Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés du rectangle, on mène deux droites au point de contact M, de l'un des deux autres côtés, l'on demande de prouver 1° que ces deux droites MN, MQ sont également inclinées sur le côté AB; 2° que leur somme MN et MQ est constante; 3° que les côtés MN, MQ enveloppent une ellipse confocale à la première.

Les tangentes BD, AC étant parallèles, la ligne NQ est un diamètre; les cordes NM, MQ sont des cordes supplémentaires, donc elles sont parallèles à un système de diamètres conjugués, c'est-à-dire que si par le centre O on leur mène des parallèles, ces droites formeront un système de diamètres conjugués. Mais on sait encore que si aux points M et N on mène des tangentes à l'ellipse, elles concourent en un point B du conjugué de MN, donc OB et OA sont respectivement parallèles à MQ et MN. Or, A et B sont sur une circonférence ayant pour centre O, donc OA=OB; les angles OBA, OAB sont égaux; mais à cause des parallèles, QMA=OBA; NMB=OAB donc 1° QMA=NMB. On sait

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

aussi que les deux points A, P sont réciproques ainsi que R et B; donc OA . OP=A^2 quarré du diamètre compté sur cette direction; OB . OR=B^2 quarré du diamètre conjugué;

$$OA = OB, \quad OP + OR = \tfrac{1}{2}\,(MN + MQ) = \tfrac{1}{2}\,\frac{A^2+B^2}{OA}\,; \text{ or,}$$

A^2+B^2 est égale à la somme des quarrés des demi-axes de l'ellipse a, b et le rayon $OA^2=\sqrt{a^2+b^2}$, donc (2°)

$$MN + NQ = 2\sqrt{a^2+b^2} = \text{le diamètre du cercle OA.}$$

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du cercle par rapport aux axes principaux.

L'équation de la corde de contact des tangentes menées par ce point est

$$(1)\quad a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2 \quad (2)\quad \alpha^2+\beta^2=a^2+b^2.$$

On demande l'enveloppe de cette droite.

D'après la théorie générale, j'aurai (en désignant par β' la dérivée de β en α) à éliminer α, β, β' entre les équations (1), (2), (3), (4).

$$(3)\; a^2\beta' y + b^2x = 0 \qquad (4)\; \alpha+\beta'\beta=0 \quad \text{d'où} \quad \beta' = -\frac{\alpha}{\beta},$$

$$(3)\; a^2\alpha y - b^2\beta x = 0., \qquad \alpha = \frac{b^2\beta x}{a^2y}$$ substituant dans (1): il vient

$$\beta = \frac{a^4b^2y}{a^4y^2+b^4x^2}, \text{ donc } \alpha = \frac{a^2b^4x}{a^4y^2+b^4x^2},$$

substituant dans (2), il vient pour équation du lieu

$$a^2b^4y^2 + b^2a^4a^2 = (a^2+b^2)\,(a^4y^2+b^4x^2)^2$$

ou bien mettant en dehors $a^4y^2+b^4x^2$ facteur commun qui donne pour solution le centre $x=0, y=0$, il restera:

$$a^4y^2 + b^4x^2 = \frac{a^4b^4}{a^2+b^2}$$

ellipse concentrique à la première. Les axes A, B de cette ellipse ont pour carrés :

$$A^2=\frac{a^4}{a^2+b^2},\ B^2=\frac{b^4}{a^2+b^2};\ A^2-B^2=C^2=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}=a^2-b^2=c^2$$

donc ces deux ellipses sont confocales.

Voici quelques mots de la théorie des enveloppes qui suffisent pour justifier les équations que j'ai employées.

Soit $F(x, y, a)=0$ l'équation d'une courbe plane dans laquelle a est une variable ; on demande le lieu des intersections successives de cette courbe. Je donne à a une valeur infiniment voisine $a+h$, et j'ai une seconde courbe $F(x, y, a+h)=0$ qui donne des intersections avec la première : on demande ce qu'elles deviennent quand h converge vers 0.

$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{1.2}F''a+=0$, or $Fa=0$ donc

$\left[F'a+\frac{h}{1.2}F''a+\right]=0$; à la limite $h=0$, donc $F'a=0$.

Il faut donc éliminer a entre $Fa=0$ et $F'a=0$ et on a l'équation en x, y. S'il y a plus d'une variable, comme dans l'exemple ci-dessus, on peut supposer que toutes ces variables dépendent de l'une d'elles, d'après les conditions de l'énoncé, et qu'on les ait remplacées par ces valeurs, alors il n'y aura plus qu'une variable, et on pourra appliquer la règle précédente.

Concours d'élémentaires, 1846.

Etant donné, dans un plan, un cercle et une droite AB qui ne rencontre pas le cercle ; de chaque point M de la droite, on mène deux tangentes au cercle, et on joint les points de contact par une corde qui, prolongée, va rencontrer AB en un point M'. On a donc pour chaque point M un segment MM' :

on demande s'il y a dans le plan un point O d'où l'on voie sous un angle droit tous ces segments : on demande ensuite s'il y en a hors du plan et enfin s'il y en aura quand la droite rencontre le cercle (fig. 30).

D'abord, si un tel point existe, il est sur la ligne CP perpendiculaire à AB ; car cette droite divise le cercle et AB en parties qui jouissent absolument des mêmes propriétés (*).

Soit M un point de AB je fais les constructions indiquées : soit O le point cherché, l'angle MOM′ étant supposé droit, le triangle rectangle de même nom donnera $OP^2 = MP.PM'$.

Les triangles rectangles MCP, DPM′ semblables donneront $MP : CP :: DP : PM'$; donc $MP.PM' = CP.DP = OP^2$.

Or, D est le pôle de la droite AB ; donc $CP.DP = CP^2 - CQ^2$ = quantité constante ; donc PO est constant et le point O est fixe. Si PO tourne autour de AB comme axe, le point O décrit une circonférence, telle que de chacune de ses points, on voit le segment MM′ sous un angle droit.

Si la droite AB coupe le cercle $CP^2 - CQ^2$ devient négatif et PO devient imaginaire (*fig.* 31).

DÉMONSTRATION

d'un second théorème de M. Chasles *sur les rayons vecteurs et les polaires des coniques.*

—

Théorème. Étant donné un point dans le plan d'une conique avec sa polaire par rapport à cette conique, si l'on mène par le point une corde quelconque, et des rayons vec-

(*) Cela n'est pas exact. Il peut y avoir plusieurs points symétriquement placés par rapport à CP.

teurs du même foyer aux extrémités de la corde, la somme *algébrique* que l'on obtient en divisant chaque rayon vecteur respectivement par la distance de l'extrémité de la corde à la polaire est constante.

Démonstration. (*Fig.* 28). Soit, pour fixer les idées, une ellipse MNK ; O un point fixe ; MON une corde quelconque ; M'N' la polaire ; MM', OO', NN' des perpendiculaires abaissées sur la polaire ; M''N'' une droite quelconque, non parallèle à la polaire et la coupant en V ; MM'', OO'', NN'' des perpendiculaires abaissées sur la droite quelconque.

Par I, point de rencontre de la corde et de la polaire, menons une parallèle IPQR à la droite M''N''. Les quatre points I, M, O, N, d'après une propriété connue, sont disposés harmoniquement ; c'est-à-dire, IO est une moyenne harmonique entre IM et IN ; donc aussi OO' est une moyenne harmonique entre MM' et NN'. On a donc :

$$\frac{1}{MM'} + \frac{1}{NN'} = \frac{2}{OO'}; \qquad (1)$$

de plus,

$$\frac{MM''}{MM'} = \frac{MP}{MM'} + \frac{QO''}{MM'}; \quad \frac{NN''}{NN'} = \frac{NR}{NN'} + \frac{QO''}{NN'};$$

ajoutant

$$\frac{MM''}{MM'} + \frac{NN''}{NN'} = \frac{2OQ}{OO'} + \frac{2QO''}{OO'} = \frac{2.OO''}{OO'} = \text{quantité constante.}$$

Si la droite quelconque est une directrice, MM'' et NN'' peuvent être remplacés par les rayons vecteurs correspondants ; donc le théorème est démontré.

Observations.

I. La somme est *algébrique* ; selon la position des perpendiculaires par rapport aux droites, cette somme peut devenir une différence.

II. Lorsque la corde MN ou la droite N″M″ est parallèle à la polaire, il faut un autre moyen de démonstration, qui est d'une facilité intuitive.

III. Le même théorème et le même moyen démonstratif subsistent pour une surface du second degré de révolution ; la polaire et la droite quelconque sont remplacées par le plan polaire et un plan quelconque.

IV. Lorsque la droite VN″ passe par le point O, alors OO″ est nul, MM″ et NN″ deviennent proportionnels à OM et ON, et l'on a ce théorème :

Si par un point pris dans le plan d'une conique, on mène une corde, la distance d'une extrémité de la corde au point, divisée par sa distance à la polaire du point, est égale au quotient analogue pour l'autre extrémité de la corde (*).

V. Deux droites dans un plan représentent une conique ; en y appliquant le théorème, on obtient une propriété de géométrie élémentaire. Tm.

PROBLÈME

sur les directrices dans les coniques.

—

PROBLÈME. Étant donnée l'équation générale d'une conique, dans son plan, l'angle des axes étant quelconque, quelles sont les relations entre les coefficients, lorsque l'un des axes est une directrice ?

Solution. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ l'équation de la conique ; γ l'angle des axes. Supposons que l'axe

---

(*) Facile à démontrer directement.

des y soit une directrice ; x' et y' étant les coordonnées du foyer, pôle de cet axe, on a :

$$x' = \frac{l}{k}; \quad y' = -\frac{n}{k} \text{ (t. II, p. 305)};$$

où $\quad l = D^2 - 4AF; \; k = 2AE - BD; \; n = DE - 2BF.$

Transportons l'origine au foyer, sans changer la direction des axes, l'équation de la courbe devient :

$$k^2(Ay^2 + Bxy + Cx^2) + ky(-2An + Bl + Dk) + kx(2Cl - Bn + Ek) +$$
$$+ An^2 - Bnl + Cl^2 - Dnk + Elk + Ek^2 = 0;$$

ou bien, en vertu des relations d'identité :

$$k^2(Ay^2 + Bxy + Cx^2) + 2kLlx + Ll = 0 \text{ (t. IV, p. 425)};$$

où L est la fonction principale, savoir :

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC).$$

L'origine étant au foyer, on a :

$$\left.\begin{array}{l} -4Ak^2Ll = 4k^2L^2 - 4Ck^2Ll \\ -2Bk^2Ll = -4Ak^2Ll\cos\gamma \end{array}\right\} \text{(t. II, p. 427, 1}^{\text{re}}\text{ ligne)};$$

d'où $L = l(C - A)$; $B = 2A\cos\gamma$. Telles sont les deux relations qui doivent exister pour que l'axe des y soit une directrice; si c'était l'axe des x, on aurait les relations :

$$L = l'(A - C); \quad B = 2C\cos\gamma; \quad \text{où} \quad l' = E^2 - 4CF.$$

Observation. Cette solution n'est plus applicable lorsque $k = 0$; le centre étant alors sur l'axe des y, cet axe ne peut être la directrice ; de même lorsque l est positif, car l'axe des y rencontre alors la conique. Tm.

PROGRAMME

de la symétrie plane et de celle de l'espace.

PAR M. J. F. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

SYMÉTRIE PLANE.

Définitions.

Définition I. Deux points sont *symétriques* par rapport à un troisième point, appelé *centre de symétrie*, lorsque la droite, qui les joint, passe par ce centre et y est divisée en parties égales.

Définition II. Deux points sont *symétriques* par rapport à une droite, appelée *axe de symétrie* lorsque la droite, qui les joint, est perpendiculaire en son milieu sur cet axe.

Définition III. Deux figures sont *symétriques par rapport à un centre* ou *à un axe*, lorsqu'on peut les placer de façon que leurs points soient deux à deux symétriques par rapport à ce centre ou à cet axe. Dans cette position, les deux figures sont dites *symétriquement placées.*

Remarque. Les deux figures peuvent être des parties d'une seule et même figure.

Définition IV. Dans deux figures symétriques par rapport à un centre ou à un axe, les éléments prennent quelquefois le nom d'éléments *homologues.*

Symétrie par rapport à un centre.

Théorème I. Deux droites, symétriques par rapport à un centre, sont parallèles et égales.

Réciproque. Deux droites, parallèles et égales, sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les extrémités de deux droites sont symétriques par rapport à un centre, ces droites sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème II. Deux angles symétriques par rapport à un centre ont leurs côtés parallèles dirigés en sens contraires, et sont égaux.

Réciproque. Deux angles, compris entre des côtés parallèles et dirigés en sens contraires, sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les côtés de deux angles sont symétriques par rapport à un centre, ces angles sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème III. Deux polygones, symétriques par rapport à un centre, ont leurs côtés parallèles dirigés en sens contraires et égaux, et sont eux-mêmes égaux.

Réciproque. Deux polygones, qui ont leurs côtés parallèles égaux et dirigés en sens contraires, sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire I. Lorsque les sommets de deux polygones sont symétriques par rapport à un centre, ces polygones sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Symétrie par rapport à un axe.

Théorème I. Deux droites, symétriques par rapport à un axe, sont égales et également inclinées sur cet axe.

Remarque. Lorsque les extrémités de deux droites sont symétriques par rapport à un axe, ces droites sont elles-mêmes symétriques par rapport à cet axe.

Théorème II. Deux angles, symétriques par rapport à un axe, sont égaux et ont leurs côtés dirigés dans le même sens.

Remarque. Lorsque les côtés de deux angles sont symétriques par rapport à un axe, ces angles sont eux-mêmes symétriques par rapport à cet axe.

Théorème III. Deux polygones, symétriques par rapport à un axe, ont leurs côtés égaux également inclinés sur l'axe et sont égaux.

Remarque. Lorsque les sommets de deux polygones sont symétriques par rapport à un axe, ces polygones sont eux-mêmes symétriques par rapport à cet axe.

Comparaison des symétries par rapport à un centre et à un axe.

Théorème. Deux figures, symétriques par rapport à deux axes rectangulaires, sont symétriques par rapport à leur point d'intersection.

Réciproque. Deux figures, symétriques par rapport à un axe et un point de cet axe, sont symétriques par rapport à un second axe, mené par le centre perpendiculairement au premier.

Corollaire. Tout polygone doué de deux axes de symétrie rectangulaires a ses côtés en nombre doublement pair.

SYMÉTRIE DE L'ESPACE.

Définitions.

Définition I. Deux points dans l'espace sont *symétriques* par rapport à un troisième point appelé *centre de symétrie*, lorsque la droite qui les joint passe par ce centre, et y est divisée en parties égales.

Définition II. Deux points dans l'espace sont *symétriques* par rapport à une droite ou à un plan appelé *axe* et *plan de symétrie*, lorsque la droite qui les joint est perpendiculaire en son milieu sur cet axe ou sur ce plan.

Définition III. Deux figures dans l'espace sont *symétriques par rapport à un centre, à un axe* ou *à un plan*, lorsqu'on peut les placer de façon que leurs points soient deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Dans cette position, les deux figures sont dites *symétriquement placées.*

Remarque. Les deux figures peuvent être des parties d'une seule et même figure.

Définition IV. Dans deux figures symétriques par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, les éléments *symétriques* prennent quelquefois le nom d'éléments *homologues.*

Symétrie par rapport à un centre.

Théorème I. Deux droites symétriques par rapport à un centre sont parallèles et égales.

Réciproque. Deux droites parallèles et égales sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les extrémités de deux droites sont symétriques par rapport à un centre, ces droites sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème II. Deux angles symétriques par rapport à un centre ont leurs plans parallèles, leurs côtés dirigés en sens contraires, et sont égaux.

Réciproque. Deux angles qui ont leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les côtés de deux angles sont symétriques par rapport à un centre, ces angles sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème III. Deux polygones symétriques par rapport à un centre ont leurs plans et leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires, et sont égaux.

Réciproque. Deux polygones égaux qui ont leurs plans et leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les sommets de deux polygones sont symétriques par rapport à un centre, ces polygones sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème IV. Deux dièdres symétriques par rapport à un centre ont leurs faces parallèles dirigées en sens contraires et sont égaux.

Réciproque. Deux dièdres qui ont leurs faces parallèles et dirigées en sens contraires sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les sections droites de deux dièdres sont symétriques par rapport à un centre, ces dièdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème V. Deux angles polyèdres symétriques par rapport à un centre ont leurs faces parallèles égales et dirigées en sens contraires, et leurs dièdres égaux et situés, en même temps que les faces, dans un ordre inverse.

Réciproque. Deux angles polyèdres qui ont leurs faces parallèles et dirigées en sens contraires, leurs faces et leurs dièdres égaux chacun à chacun et situés dans un ordre inverse, sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les arêtes de deux angles polyèdres sont symétriques par rapport à un centre, ces angles polyèdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Théorème VI. Deux polyèdres symétriques par rapport à un centre ont leurs faces parallèles égales, leurs dièdres égaux et situés, en même temps que les faces, dans un ordre inverse.

Réciproque. Deux polyèdres qui ont leurs faces parallèles et dirigées en sens contraires, leurs faces et leurs dièdres égaux chacun à chacun et situés dans un ordre inverse, sont symétriques par rapport à un centre.

Corollaire. Lorsque les sommets de deux polyèdres sont symétriques par rapport à un centre, ces polyèdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce centre.

Symétrie par rapport à un axe.

Théorème. Deux figures symétriques par rapport à une droite sont égales entre elles.

Symétrie par rapport à un plan.

Théorème I. Deux droites symétriques par rapport à un plan sont égales et également inclinées sur le plan.

Remarque. Lorsque les extrémités de deux droites sont symétriques par rapport à un plan, ces droites sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Théorème II. Deux angles symétriques par rapport à un plan sont égaux et ont leurs plans également inclinés sur le plan de symétrie.

Remarque. Lorsque les côtés de deux angles sont symétriques par rapport à un plan, ces angles sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Théorème III. Deux polygones symétriques par rapport à un plan sont égaux et situés dans des plans également inclinés sur le plan de symétrie.

Remarque. Lorsque les sommets de deux polygones sont symétriques par rapport à un plan, ces polygones sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Théorème IV. Deux dièdres symétriques par rapport à un plan sont égaux et ont leurs faces également inclinées sur le plan de symétrie.

Remarque. Lorsque les sections droites de deux dièdres sont symétriques par rapport à un plan, ces dièdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Théorème V. Deux angles polyèdres symétriques par rapport à un plan ont leurs faces et leurs dièdres égaux, et ces faces également inclinées sur le plan.

Remarque. Lorsque les arêtes de deux angles polyèdres sont symétriques par rapport à un plan, ces angles polyèdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Théorème VI. Deux polyèdres symétriques par rapport à un plan ont leurs faces et leurs dièdres égaux, et ces faces également inclinées sur ce plan.

Remarque. Lorsque les sommets de deux polyèdres sont symétriques par rapport à un plan, ces polyèdres sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Comparaison des symétries par rapport à un centre et à un plan.

Théorème. Deux figures symétriques par rapport à trois plan rectangulaires sont symétriques par rapport à leur point d'intersection.

Réciproque. Deux figures symétriques par rapport à deux plans rectangulaires et un point de leur intersection sont symétriques par rapport à un second plan mené par le centre perpendiculairement à cette intersection.

Corollaire. Tout polyèdre ou angle polyèdre doué de trois plans de symétrie a ses faces en nombre quadruplement pair.

Théorème II. Deux figures symétriques par rapport à un centre peuvent être symétriquement placées par rapport à un plan donné quelconque.

Réciproque. Deux figures symétriques par rapport à un plan peuvent être symétriquement placées par rapport à un point donné quelconque.

Théorème III. Deux figures symétriques d'une même troisième sont égales entre elles.

Théorème IV. Deux tétraèdres ou deux trièdres symétriques sont décomposables en tétraèdres ou trièdres additifs ou soustractifs égaux et superposables.

Théorème V. Deux polyèdres ou angles polyèdres symétriques sont décomposables en un même nombre de tétraèdres ou de trièdres symétriques, et assemblés par les sommets d'angles symétriques.

Réciproque. Lorsque deux polyèdres ou deux angles polyèdres sont composés d'un même nombre de tétraèdres ou de trièdres symétriques assemblés par les sommets d'angles symétriques, ces polyèdres ou angles polyèdres sont symétriques.

Théorème VI. Deux tétraèdres ou trièdres symétriques sont équivalents.

Théorème VII. Deux polyèdres ou angles polyèdres symétriques sont équivalents.

Corollaire II. Tout polygone doué d'un centre de symétrie est formé d'un nombre pair de côtés.

Corollaire II. Tout polyèdre doué d'un centre de symétrie est terminé par un nombre pair de faces.

Corollaire III. Tout parallélogramme est symétrique par rapport au point de concours des diagonales.

Corollaire III. Tout parallélipipède est symétrique par rapport au point de concours des diagonales. — Tout plan diagonal divise le parallélipipède en deux prismes triangulaires symétriques.

Corollaire. La ligne perpendiculaire sur le milieu d'une droite est un axe de symétrie de cette droite. — *Corollaire.* La bissectrice d'un angle quelconque et celle de l'angle au sommet d'un triangle isocèle sont des axes de symétrie de ces figures.

Corollaire. Dans le losange, les diagonales, dans le rectangle, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés, et dans le carré, les diagonales et les droites qui joignent les milieux des côtés opposés, forment des systèmes d'axes de symétrie rectangulaires.

Corollaire. Le plan perpendiculaire sur le milieu d'une droite est un plan de symétrie de cette droite. — *Corollaire.* Le plan bissecteur d'un angle plan, celui d'un dièdre quelconque et du dièdre à l'arête d'un trièdre isoangle sont des plans de symétrie de ces figures. — *Corollaire.* Dans le parallélipipède rectangle, les trois plans perpendiculaires au milieu des arêtes, dans le cube, les trois plans perpendiculaires au milieu des arêtes et les six plans qui passent par des arêtes opposées parallèles, sont des systèmes de plans de symétrie.

Note. Des programmes semblables, aussi bien rédigés, aussi méthodiques pour l'*égalité*, l'*équivalence* et la *similitude*, en y joignant les principales propositions de la théorie des transversales et l'exposé des méthodes métamorphiques, formeraient un résumé instructif de géométrie élémentaire. Tm.

NOTE

Sur un point de la théorie générale des équations.

PAR M. VIEILLE (JULES),
Professeur.

Ayant eu récemment l'occasion de traiter dans mon cours les *questions relatives à l'abaissement des équations*, j'ai remarqué dans plusieurs traités fort estimables d'algèbre, une erreur qu'il est bon de rectifier dans l'intérêt des élèves.

Il s'agit de cette question : *Étant donnée une équation*

f(x)=0 ***dans laquelle il y a deux racines dont la somme est égale à une quantité donnée*** **s**, ***déterminer ces racines.***

La méthode générale, qui consiste à égaler à zéro le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f(s-x)$, est en défaut lorsque toutes les racines de l'équation $f(x)=0$ se distribuent par couples (a, b), (c, d)... tels que $a+b=s$, $c+d=s$; mais, dans ce cas, on remarque que si l'on prend pour inconnue auxiliaire le produit z de deux racines d'un même couple, le trinôme x^2-sx+z devra, pour les valeurs convenables de z, diviser $f(x)$. On effectue donc cette division, et le reste qui suit celui du deuxième degré en x est égalé à zéro. Jusqu'ici rien que de parfaitement exact; mais on ajoute que ce reste sera du premier degré en x, de la forme $Px+Q$, P et Q étant des fonctions de z, et qu'en conséquence on devra poser $P=0$; $Q=0$, puis chercher le plus grand commun diviseur entre P et Q. Ceci n'est pas exact. *Le reste* de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z ne saurait être du premier degré en x, mais il *sera toujours indépendant de* **x**.

En effet soit

$$(1)\qquad f(x)=x^{2n}+A_1x^{2n-1}+A_2x^{2n-2}+\dots$$

l'équation $f(x)=0$ a par hypothèse n couples de racines (a, b), (c, d)... telles que $a+b=s$, $c+d=s$, et par suite z a n valeurs qui sont les produits ab, cd... Supposons pour un instant qne le reste de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z soit du premier degré en x, $Px+Q$, et soit k le quotient, on aurait

$$f(x)=(x^2-sx+z)\,k+Px+Q.$$

Si dans cette égalité on fait $z=ab$ et qu'on y mette successivement pour x les valeurs a, b, on aura

$$Pa+Q=0$$
$$Pb+Q=0$$

d'où il suit que les fonctions P et Q s'annuleront à la fois pour $z=ab$. Elles s'annuleront de même pour $z=cd$, etc. L'équation $P=0$ admettra donc n racines. Or, cela est impossible, à moins que P ne soit identiquement nul; car il est aisé de voir que P sera d'un degré en z au plus égal à $n-1$.

En effet, en procédant à la division des polynômes (1) par x^2+sx+z, on voit sans peine que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel, de degré impair $2n-1-2p$, contient z à la puissance p. Si donc on pouvait parvenir à un reste du premier degré en x, c'est-à-dire du degré $2n-1-2(n-1)$, le coefficient P de x dans ce reste serait du degré $n-1$ en z. Ainsi, le reste de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z sera indépendant de x, et en l'égalant à zéro, on aura immédiatement les valeurs cherchées de z.

Au fond, la recherche de l'équation en z revient à l'élimination de x entre les deux équations $f(x)=0$, $x^2-sx+z=0$. *A chaque valeur de* z tirée de l'équation finale en z, *doivent correspondre les deux valeurs de* x dont cette valeur de z est le produit, par conséquent le diviseur qui précède l'équation finale doit être du deuxième degré et n'est pas autre chose que x^2-sx+z. Ce second point de vue vient encore à l'appui de ce qui précède, et explique pourquoi on ne peut rencontrer un reste du premier degré en x.

SOLUTION DE LA QUESTION 143. (Page 134.)

PAR M. MURENT (de Clermont-Ferrand).

—

Problème. Connaissant un point et le centre d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu du sommet et du foyer.

1° *Lieu du sommet.* Soient C et M (*fig.* 37) le centre et le point donnés; tirons par ces deux points une droite indéfinie et faisons CM$=d$. Soit CX l'axe transverse de l'hyperbole dans l'une de ses positions; en menant, de part et d'autre de cet axe, deux droites CA, CB qui fassent avec lui des angles de 45°, ces deux droites seront perpendiculaires entre elles et seront les asymptotes de l'hyperbole équilatère que nous considérons. Si le point S est le sommet de cette hyperbole, en tirant la droite MS et la prolongeant, on aura, d'après une propriété connue de cette courbe, BS$=$MA; réciproquement, si, par le point M, on mène la transversale AMSB telle que BS$=$MA, le point S sera le sommet de l'hyperbole; car à cause de cette égalité, il est un point de la courbe, et puisqu'il se trouve sur l'axe transverse, il en est le sommet. Abaissons maintenant MP perpendiculaire sur CA et remarquons que la direction de la transversale AB serait déterminée si l'on connaissait la longueur PA.

Or, de l'égalité BS$=$MA il résulte que si l'on abaisse encore SQ perpendiculaire sur CB, les triangles rectangles SBQ, AMP seront égaux. Ainsi QS sera égale et parallèle à PA : donc en tirant PQ, cette ligne sera parallèle à AB. Cela posé, les triangles semblables MPA, QCP donnent la proportion

$$\mathrm{MP}:\mathrm{PA}::\mathrm{QC}:\mathrm{CP}.$$

Mais dans le triangle-rectangle isocèle CQS, on a CQ$=$QS $=$PA. La proportion devient donc

$$\mathrm{MP}:\mathrm{PA}::\mathrm{PA}:\mathrm{CP},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=\mathrm{MP}.\mathrm{CP}.$$

Il est facile maintenant d'avoir l'équation polaire du lieu. Pour cela prenons C pour pôle et CMx pour axe polaire : le triangle CQS donne

$$\overline{\mathrm{CS}}^2=2\overline{\mathrm{SQ}}^2=2\overline{\mathrm{PA}}^2,$$

et en remplaçant $\overline{PA}^2$ par MP.CP.... $\overline{CS}^2=2MP.CP$ (1)

Faisant $CS=\rho$ et l'angle $SCM=\omega$ et observant que dans le triangle-rectangle MPC, on a

$$MP = CM \sin MCP = d \sin(45^\circ-\omega)$$
$$CP = CM \cos MCP = d \cos(45^\circ-\omega),$$

on mettra ces valeurs dans l'égalité (1) et l'on aura

$$\rho^2=d^2.2\sin(45^\circ-\omega)\cos(45^\circ-\omega)=d^2.\sin(90^\circ-2\omega)=d^2\cos 2\omega,$$

d'où

$$\rho=\pm d\sqrt{\cos 2\omega},$$

équation d'une lemniscate de Bernouilli ayant pour centre le point C et pour demi-axe la longueur donnée $CM=d$.

2° *Lieu du foyer.* Soit F le foyer de l'hyperbole dont S est le sommet, faisons $CF=\rho'$.

On sait que dans l'hyperbole équilatère, la valeur de la demi-excentricité est $c=a\sqrt{2}$, a étant le demi-axe transverse; donc ici on aura $\rho'=\rho\sqrt{2}$, ou en remplaçant ρ par la valeur ci-dessus, on aura pour l'équation du lieu du foyer

$$\rho'=\pm d\sqrt{2\cos 2\omega}.$$

C'est une seconde lemniscate qui enveloppe la première et qui a pour centre le point C et pour demi-axe la longueur $CN=d\sqrt{2}$.

3. Ces deux courbes sont semblables et semblablement placées, et si l'on construit l'une d'elles par points (t. IV, p. 145), on pourra en déduire la seconde par la relation $\rho'=\rho\sqrt{2}$.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 121

(Voyez t. V, page 202.)

PAR M. B... (de Liége).

Étant donnée une progression arithmétique de n termes dont la raison soit égale au premier terme; élevant chaque terme au carré, le tiers de n fois le carré du dernier terme est toujours entre la somme de tous les carrés et cette somme moins le carré du dernier terme; démontrer cette propriété par la géométrie.

Démonstration. Soit une pyramide à base carrée. Je divise sa hauteur en n parties égales, que je prends pour unités; puis par les points de division je mène des plans parallèles à la base. Les $n-1$ sections que j'obtiens sont des carrés. Soient a_1, a_2, a_3 ... a_{n-1} leurs côtés, et a_n la base; ces différentes quantités représentent les termes de la progression arithmétique. Les aires des sections seront a_1^2, a_2^2, a_3^2 ... a_n^2, et représenteront les carrés des termes de la progression.

Sur ces diverses sections construisons des prismes dont la hauteur soit 1 (*fig.* 38).

Sous ces mêmes sections construisons aussi des prismes dont la hauteur soit 1 (*fig.* 39).

Les volumes de ces prismes seront respectivement :

Fig. 1.	*Fig.* 2.
a_1^2	a_1^2
a_2^2	a_2^2
$\vdots$	$\vdots$
a_n^2	a_{n-1}^2.

On voit par ces figures que le volume de la pyramide est moindre que la somme de la première colonne, et plus grand que celle de la seconde. Or le volume de cette pyramide est $\frac{1}{3} n a_n^2$; donc

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2 > \frac{1}{3} n a_n^2 > a_1^2 + a_2^2 + \dots a_{n-1}^2,$$

ce qui est l'expression du théorème.

On voit facilement que le problème 113 peut se résoudre d'une manière analogue (voir t. V, p. 348).

NOTE

Sur un problème de géométrie.

PAR M. FONTÉS,
Professeur de mathématiques à Mâcon.

Problème. Par un point B donné à égale distance de deux droites formant un angle quelconque, mener une sécante telle que la partie interceptée par ces droites soit égale à une ligne donnée m.

On connaît les élégantes constructions de ce problème données pour le cas d'un angle droit par Pappus, Newton et d'autres (*V.* la *Géométrie analytique* de M. Cirrodde). Je me propose dans cette note de montrer comment ces constructions doivent être modifiées dans le cas d'un angle quelconque.

1re *Construction* (*fig.* 36). On sait que la question proposée a toujours deux solutions, et qu'elle peut en avoir quatre. Dans tous les cas, j'observe que les sécantes sont deux à deux également distantes du sommet A de l'angle donné, de sorte que si l'on prend cette distance pour inconnue, elle n'aura que deux valeurs différentes. D'ailleurs ces distances connues, il sera facile de construire les solutions du problème, puisqu'il suffira de décrire du point A comme centre des circonférences avec des rayons égaux à ces distances, et de leur mener des tangentes par le point B.

Soit donc CX une des sécantes cherchées, et appelons r sa distance AN au point A; soit $AC=y$, $AX=x$, $BP=AP=a$, et θ l'angle yAx; le triangle CAX donne

$$m^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta. \qquad (1)$$

En considérant la surface du même triangle, on a

$$mr=xy\sin\theta. \qquad (2)$$

La similitude des triangles donne XCA, XBP donne

$$y:a::x:x-a,\ \text{d'où}\ x+y=\frac{xy}{a}. \qquad (3)$$

Élevant les deux membres de cette dernière équation au carré, et remplaçant dans le résultat xy et x^2+y^2 par leurs valeurs déduites des équations (1) et (2), on obtient l'équation suivante en r:

$$mr^2-2a^2\sin\theta(1+\cos\theta)r-ma^2\sin^2\theta=0. \qquad (4)$$

Cette équation a toujours deux racines réelles : une positive, l'autre négative. La racine positive déterminera la distance AN.

Cherchons l'équation qui déterminera la distance AN″ du point A aux deux autres sécantes. En la désignant par r, posant $AX''=x$, $AC''=y$, le triangle C″AX″ donnera

$$m^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta$$
$$mr=xy\sin\theta,$$

et la similitude des triangles C″AX″, BPX″ donnera

$$y:a::x:a-x,\ \text{d'où}\ y-x=\frac{xy}{a}.$$

Faisant l'élimination de x et y comme dans le cas précédent, on obtient l'équation

$$mr^2+2a^2\sin\theta(1+\cos\theta)r-ma^2\sin^2\theta=0, \qquad (5)$$

équation dont la solution positive donnera la distance AN″. Mais cette équation a ses racines égales et de signes contraires à celles de l'équation (4). Donc la solution négative de l'équation (4), prise en valeur absolue, donnera la distance AN″. Il suffit donc de construire les racines de l'équation (4).

Pour cela, écrivons cette équation ainsi :

$$r\left[r-\frac{2a^2\sin\theta(1+\cos\theta)}{m}\right]=a^2\sin^2\theta. \qquad (6)$$

Construisons d'abord une ligne

$$u=\frac{a^2\sin\theta(1+\cos\theta)}{m}=\frac{a\sin\theta.a(1+\cos\theta)}{m}.$$

Or, si on abaisse du point A une perpendiculaire AD sur la ligne BG parallèle à yy', on a

$$\mathrm{AD}=a\sin\theta;\ \mathrm{BD}=\mathrm{BP}+\mathrm{PD}=a+a\cos\theta=a(1+\cos\theta),$$

donc $u=\dfrac{\mathrm{AD}\times\mathrm{BD}}{m}$. Alors, si on prolonge DA et qu'on prenne $\mathrm{DL}=m$, que l'on tire LB, et qu'on lui mène par le point A une parallèle qui rencontre BG au point F, la ligne DF est égale à y, car on a

$$\mathrm{LD}:\mathrm{BD}::\mathrm{AD}:\mathrm{DF},\ \text{d'où}\ \mathrm{DF}=\frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{BD}}{m};$$

alors l'équation (6) devient

$$r(r-2u)=a^2\sin^2\theta.$$

Donc si du point F comme centre, avec FD pour rayon, on décrit un cercle, et qu'on prolonge le diamètre AF qui rencontre la circonférence en E et E′, AE sera la racine positive de l'équation (4), et AE′ la valeur absolue de la racine négative.

Alors je décris du point A, comme centre, des circonférences avec les rayons AE et AE′; je leur mène des tangentes par le point B, et j'ai construit ainsi les quatre solutions du problème.

Cette construction montre que la question n'a pas toujours quatre solutions; car pour qu'on puisse mener des tangentes à un cercle par le point B, il faut que ce point soit extérieur. Cette condition est toujours satisfaite pour le plus petit cercle, car on a AE′ $<$ AF $<$ AB. Elle ne sera remplie pour l'autre cercle que dans le cas où son rayon AE sera moindre que AB. Écrivons que la valeur positive de r donnée par l'équation est moindre que AB. Le triangle isocèle BPA donne $AB = 2.a \cos\frac{1}{2}\theta$, et on aura :

$$\frac{a^2\sin\theta(1+\cos\theta)+\sqrt{a^4\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2+m^2a^2\sin^2\theta}}{m} < 2a\cos\frac{1}{2}\theta,$$

d'où

$$\sqrt{a^2\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^2+m^2\sin^2\theta} < 2m\cos\frac{1}{2}\theta - a\sin\theta\,(1+\cos);$$

remplaçant $\sin\theta$ par $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$, $1+\cos\theta$ par $2\cos^2\frac{1}{2}\theta$, et élevant au carré les deux membres, il vient

$$16\,a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta\cos^6\frac{1}{2}\theta+4\,m^2\sin^2\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta <$$
$$< (2m\cos\frac{1}{2}\theta-4a\sin\frac{1}{2}\theta\cos^3\frac{1}{2}\theta)^2;$$

effectuant le carré et réduisant, on a

$$m\sin^2\frac{1}{2}\theta < m-4a\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta,$$

ou
$$m\,(1-\sin^2\frac{1}{2}\theta) > 4a\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta,$$

ou enfin
$$m > 4a\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Or, si on mène la ligne KH perpendiculaire à AB, on a

$$KH=2.BH, \text{ et } BA=HA\sin\frac{1}{2}\theta=2a\sin\frac{1}{2};$$

donc $$KH=4a\sin\frac{1}{2}\theta;$$

donc la condition nécessaire pour que le problème admette quatre solutions, c'est que la longueur donnée m soit plus grande que la ligne inscrite menée par le point B perpendiculairement à AB. On sait bien, en effet, que cette ligne KH est la ligne minimum.

2e *Construction.* Soit CX. une des sécantes cherchées. Je fais au point X un angle $BXR=\theta$, et soit R le point où la ligne XR rencontre la parallèle à Ax menée par le point B. Si le point R était connu, en décrivant sur BR un segment capable de l'angle donné θ, l'intersection de l'arc de ce segment avec Ax déterminerait le point X, et le problème serait résolu. Je prends donc pour inconnue $BR=z$, et j'appelle toujours r la perpendiculaire AN abaissée du point A sur CX. Les deux triangles CAX et BXR étant équiangles, leurs lignes homologues sont proportionnelles, ce qui donne

$$CX:BR::AN:BT, \quad \text{ou} \quad m:z::r:a\sin\theta, \quad \text{d'où} \quad r=\frac{ma\sin\theta}{z}.$$

Si je considère de même la sécante $C''X''$, je fais au point X'' un angle $BX''R'$ égal à l'angle $y'Ax$, c'est-à-dire au supplément de l'angle θ, et soit R' le point où $X''R'$ rencontre la parallèle à Ax menée par le point B. Soit $BR'=z$, $AN''=r$; les deux triangles $C''AX''$ et $R'X''B$ sont équiangles et donnent

$$m:z::r:a\sin\theta, \quad \text{d'où} \quad r=\frac{ma\sin\theta}{z}.$$

C'est la même relation que précédemment. Et comme les deux valeurs de r sont, la première la racine positive, la seconde la racine négative, prise en valeur absolue, de l'équation (4); si, dans cette équation (4), je remplace r par la valeur $\frac{ma\sin\theta}{z}$, l'équation résultant de cette substitution devra avoir deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, dont la première sera la valeur de BR, et la seconde, prise en valeur absolue, la valeur de BR'. Cette équation est

$$m.\frac{m^2a^2\sin^2\theta}{z^2}-2a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\frac{ma\sin\theta}{z}-ma^2\sin^2\theta=0,$$

ou $$z^2+2a(1+\cos\theta)z-m^2=0;$$

d'où $$z=-a(1+\cos\theta)\pm\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+m^2}.$$

Mais si du point A, je mène une perpendiculaire AS sur BR', j'ai $$\mathrm{BS}=\mathrm{BQ}+\mathrm{QS}=a+a\cos\theta=a(1+\cos\theta);$$

donc $$z=-\mathrm{BS}\pm\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2};$$
par conséquent,

$$\mathrm{BR}=-\mathrm{BS}+\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2},$$

$$\mathrm{BR'}=\mathrm{BS}+\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2}.$$

On déduit de là :

$$\mathrm{BR}+\mathrm{BS}=\mathrm{BR'}-\mathrm{BS}=\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2},$$

ou $$\mathrm{SR}=\mathrm{SR'}=\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2}.$$

Donc, si au point B, on élève une perpendiculaire à QB, d'une longueur $\mathrm{BM}=m$, en joignant SM, on aura $\mathrm{SM}=\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2+m^2}$, et l'arc décrit du point S comme centre avec SM pour rayon déterminera par ses intersections avec la droite BQ prolongée les points R et R'. Alors, pour achever la construction, on décrira sur BR et au-dessous de cette ligne un segment capable de l'angle θ; on décrira sur BR' et au-dessous de cette ligne un segment capable de l'angle $180°-\theta$. Les arcs de ces segments déterminent sur xx' les points X, X', X'', X''', et il n'y aura plus qu'à joindre ces points au point B pour avoir les sécantes cherchées.

DE LA DIACAUSTIQUE
dans le cas d'une surface réfractante plane.

PAR M. SOULÉ (CHARLES),
Élève à l'institution Barbet.

Soient deux milieux P, P′ séparés par la surface plane OK, et considérons la réfraction des rayons lumineux partis du point P, dans un plan perpendiculaire à cette surface de séparation. Proposons-nous de déterminer l'enveloppe des rayons réfractés tels que KN (*fig.* 34). Nous traiterons d'abord la question par la géométrie. Pour cela, démontrons un théorème préliminaire sur les coniques à centre.

I (*fig.* 35). Par exemple, MN étant une normale à l'ellipse, si l'on joint sa trace K sur l'axe des y au foyer F, on aura $KFF' = F'MK$, ou bien, comme il est démontré que $\frac{\sin F'MK}{\sin F'NK} = \frac{c}{a}$, il s'agit de prouver que $\frac{\sin KFF'}{\sin F'NK} = \frac{c}{a}$. Sur F′F décrivons le segment capable de l'angle F′MF. Le point K étant le milieu de l'arc F′KF, KM sera bissectrice de F′MF, et, par suite, sera précisément la normale MN. Alors les angles KFF′ et F′MK ayant même mesure $\frac{KF'}{2}$ sont égaux.

On démontre facilement le même théorème par le calcul. En effet,

$$\text{tang}\, KFF' = -\frac{\frac{-c^2y'}{b^3}}{c} = \frac{cy'}{b^2}\,;\quad \sin KFF' = \frac{cy'}{\sqrt{b^4+c^2y'^2}}\,;$$

$$\text{tang}\, KNF' = \frac{a'^2y'}{b^2x'}\,;\quad \sin KNF' = \frac{a^2y'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}} =$$

$$= \frac{ay'}{\sqrt{b^4+c^2y'^2}}.$$

Donc $$\frac{\sin \mathrm{KFF'}}{\sin \mathrm{KNF'}} = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, toutes les fois que cette égalité aura lieu, la ligne KNM sera normale à l'ellipse; car, il n'y a qu'une ligne KN qui puisse faire avec OX un angle aigu KNO, dont le sinus ait avec celui de l'angle donné KFO un rapport donné $\frac{c}{a}$.

II. Même théorème pour l'hyperbole.

III. Cela posé (*fig.* 34), soit un rayon incident PK et KN le rayon réfracté, en appelant n le rapport des vitesses de la lumière dans le milieu P' et dans le milieu P, nous aurons $\frac{\sin i}{\sin r} = n.$

Soit $n<1$, et construisons une ellipse ayant O pour centre, P pour foyer, $\frac{c}{a}=n$ pour rapport de son excentricité à son grand axe. Nous aurons $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{a}$, et, d'après le théorème précédent, tout rayon réfracté sera normal à cette ellipse. L'enveloppe des rayons réfractés, ou la caustique, ne sera donc autre chose que celle des normales ou la développée de l'ellipse.

Si $n > 1$, nous construirons une hyperbole d'après les mêmes données. Notre enveloppée sera, de même, la développée de l'hyperbole.

Cherchons l'équation de ces courbes en fonction des données n et $\mathrm{OP}=c$:

$$a^2y^2+(a^2-c^2)\,x'^2 = a^2(a^2-c^2),$$

$$n=\frac{c}{a},\quad a=\frac{c}{n},\quad \frac{c^2}{n^2}y^2+\left(\frac{c^2}{n^2}-c^2\right)x^2=\frac{c^2}{n^2}\left(\frac{c^2}{n^2}-c^2\right).$$

$n^2y^2+n^2(1-n^2)x^2=c^2(1-n^2)$ qui sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que n sera $\gtrless 1$.

Traitons la question par le calcul.

IV. Cherchons l'enveloppe des droites $ay+bx-ab=0$ (1), a et b étant liés par la relation $\frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{KP}}=n=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c'^2+b^2}}$, ou (2) $a^2+(1-n^2)b^2=c'^2n^2$. Désignons, pour abréger, $1-n^2$ par k. Différentions chacune de ces équations, b étant fonction de a :

$$y+x\frac{db}{da}-a\frac{db}{da}-b=0;\quad a+k\frac{db}{da}=0.$$

Egalons les dérivées $\frac{db}{da}$, il vient $a(a-x)-b^2k+bky=0$. (3)

Il faut éliminer a et b entre les équations (1), (2), (3). Pour cela, de (1) nous tirons (4) $b=\frac{ay}{a-x}$; substituant dans (3)

$$a-x-\frac{aky^2}{(a-x)^2}+\frac{ky^2}{a-x}=0;\quad a=x+(kxy^2)^{\frac{1}{3}};$$

$$a^2=x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+k^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2;$$

substituant dans (4),

$$b=\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+k^{\frac{1}{3}}y}{k^{\frac{1}{3}}};\quad b^2=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}}\left(x^{\frac{2}{3}}+k^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2;$$

substituant dans (2), et remarquant que nous avons le cube de $x^{\frac{2}{3}}+k^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, il vient pour équation du lieu :

$$(5)\qquad (1-n^2)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=n^{\frac{2}{3}}c'^{\frac{2}{3}},$$

équation des développées des sections coniques à centre, ellipse ou hyperbole suivant que $1-n^2$ sera $\gtrless 0$.

Pour avoir l'équation de ces sections $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2= =a^2(a^2-c^2)$, identifions l'équation (5) à celle de leurs développées :

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+(a^2-c^2)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},$$

nous aurons :

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}c'^{\frac{2}{3}}},\quad \frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}=\frac{(1-n^2)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}c'^{\frac{2}{3}}};$$

ou

$$\frac{a}{c^2}=\frac{1}{nc'},\quad \frac{a^2-c^2}{c^4}=\frac{1-n^2}{n^2c'^2}.$$

On tire de là $c'=c$, $a=\frac{c}{n}$, et, par suite, l'équation des courbes : $\quad n^2y^2+n^2(1-n^2)x^2=c^2(1-n^2).$

Note. Si d'un point A pris sur une surface, on va vers un autre point A′, les deux normales à la surface ne sont pas dans un même plan, généralement parlant, et la plus courte distance DD′ des deux normales divisée par la longueur de AA′ donne un quotient fini, lors même que l'arc AA′ est infiniment petit. Euler a démontré qu'il existe pour chaque point A deux directions rectangulaires pour lesquelles le rapport $\frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{AA'}}$ devient nul, c'est-à-dire où la distance DD′ est un infiniment petit du second ordre relativement à l'arc AA′. C'est là l'origine des lignes de courbure, une des plus belles découvertes de l'illustre créateur de la géométrie des surfaces ; tout ce qu'on a fait depuis ne sont que des conséquences médiates ou immédiates des théories eulériennes (Mém. de

Berlin, 1760, en français) Monge a généralisé cette idée d'Euler et a établi que si par deux points A et A′ infiniment voisins, on mène deux droites soumises à la même loi de construction, il existe toujours une direction AA′ pour laquelle le rapport $\frac{DD'}{AA}$ est nul. Malus s'est élevé encore à une plus vaste généralisation : il considère un premier système de droites rencontrant une surface donnée ; de chaque point de rencontre part une droite liée à la première par une loi donnée ; on obtient ainsi un second système. A l'aide d'une analyse très-belle, mais assez compliquée, Malus découvre des relations, devenues célèbres, entre les deux systèmes, relations que M. Dupin a obtenues ensuite plus simplement, par des considérations géométriques. C'est même la grande utilité de la géométrie, d'éclairer des théories qu'elle n'a pas fondées, d'abréger la voie aux découvertes qu'elle n'a pas faites. Ces relations que nous venons de mentionner renferment la question optique comme cas particulier. En effet, le premier système peut représenter des rayons incidents, et le second système les rayons réfractés, qui comprennent aussi les rayons réfléchis en prenant l'indice de réfraction égal à —1. Depuis, M. Quetelet a eu l'heureuse idée de considérer les deux surfaces trajectrices qui coupent orthogonalement les deux systèmes de droites d'incidence et de réfraction : grand moyen de simplification, car les développantes sont souvent de degrés moins élevés que les développées. On en a un exemple dans les coniques, courbes du second degré, qui ont pour développées des lignes du sixième degré. M. Quetelet a énoncé à ce sujet des théorèmes que M. Timmermans, de Gand, a démontrés d'une manière tellement élémentaire, que nous pouvons les consigner dans ce recueil.

Soient deux droites MA, NA se coupant au point A ; le lieu géométrique d'un point dont le rapport des distances aux deux droites est constant, est formé par le système de deux droites passant aussi par A et relatives aux deux angles aigus et aux deux angles obtus. Considérons une de ces droites que nous désignons par AP; prenant donc un point I sur cette droite, et abaissant sur les droites AM, AN les perpendiculaires IR, IS, on aura :

$$\frac{\text{IR}}{\text{IS}} = \frac{\sin \text{MAP}}{\sin \text{NAP}} = \frac{\sin i}{\sin r} = n = \text{constante.}$$

Si par le même point I nous élevons une perpendiculaire IT à AP, on a évidemment aussi :

$$\frac{\sin \text{RIT}}{\sin \text{SIT}} = \frac{\sin i}{\sin r} = n;$$

en regardant donc AP comme une droite *dirimante* de deux milieux, IR étant un rayon incident, IS sera le rayon réfracté, si n est l'indice de réfraction.

Cela posé, soient maintenant AM, A''N deux courbes quelconques situées dans le même plan. Le point dont le rapport des distances normales à ces deux courbes est constant, sera une troisième courbe A'P, et telle que si par un point I de cette courbe nous menons les deux normales IR, IS, les trois tangentes menées en R, I, S, respectivement aux courbes AM, A'P, A''N, se couperont en un même point. C'est une conséquence immédiate de ce qui a été dit ci-dessus. Si donc la courbe A'P est une ligne dirimante entre deux milieux, et si AM représente une trajectoire orthogonale des rayons incidents, il est évident que la courbe A''N sera une trajectoire orthogonale des rayons réfractés, si l'on a $\frac{\text{IR}}{\text{IS}} = n =$ indice de réfraction; trajectoire que M. Quetelet désigne sous le nom de *caustique secondaire*, et qui n'est autre que l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt la ligne dirimante et dont le rayon IS est égal à n.IR. On sait d'ailleurs qu'il existe une infinité de trajectoires orthogonales; quand on en adopte une pour les rayons incidents, celle des rayons réfractés est déterminée, et les développées de cette dernière trajectoire ou caustique *secondaire*, est la caustique cherchée (*Corresp. math.*, t. I, p. 336). Lorsque l'objet lumineux se réduit à un point, la trajectoire orthogonale des rayons incidents est un cercle de rayons arbitraires qu'il est naturel de prendre égal à zéro. C'est ce qu'on a fait dans le problème précédent sur la *droite dirimante*. Du reste, ce problème a été souvent résolu, entre autres analytiquement par M. Gergonne, et ensuite géométriquement par M. Sturm; les solutions de M. Soulé semblent plus simples.

Les *Nouvelles Annales* contiennent l'équation générale des *caustiques secondaires* par réflexion des coniques, les rayons émanant d'un point. Cette courbe est celle qu'on obtient en abaissant du point lumineux une perpendiculaire sur la tangente à la conique et prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 426). Je ne sache pas qu'on ait jamais calculé cette équation avec cette généralité. Ce genre de courbe est aussi donné par l'équation bifocale $pz+qz'=v$; z et z' sont les distances d'un point quelconque de la courbe à deux foyers fixes, et p, q, v, des constantes. C'est ce que M. Sturm a démontré pour le cas particulier du cercle.

Tschirnhausen (Walther de) est l'inventeur des caustiques catoptriques. Il a indiqué, sans démonstration, la caustique du cercle pour des rayons incidents parallèles (*Acta erud.*, nov. 1682, p. 364); mais J. Bernoulli a démontré que l'indication de Tschirnhausen était fausse, et a donné, dans des leçons sur le calcul intégral à l'usage du marquis de Lhospital (1691 et 1692), la première théorie analytique et géométrique des caustiques catoptriques et dioptriques pour des rayons parallèles et convergents, mais toujours dans un même plan (*Opera omnia*, t. III).

Nous croyons utile de consigner ici les principaux travaux sur les caustiques publiés dans ces derniers temps.

Journal de l'École Polytechnique.

Malus. Mémoire sur l'optique, cahier XIV, p. 1-44, 1808; sur la dioptrique, p. 84-129.

Correspondance sur l'École Polytechnique.

Malus. Surfaces caustiques, t. I, p. 142-144, 1808.

Petit. Moyens de construire par points les caustiques par réflexion ou par réfraction dans le cas des surfaces sphériques, t. II, p. 353-358. 1812.

Annales des Mathématiques (Gergonne).

Gergonne. De la manière dont les poissons nous voient et dont nous les voyons, t. XI, p. 41-69, 1820-21.

Gergonne. Recherches analytiques des propriétés les plus générales des faisceaux lumineux directs, réfléchis et réfractés, t. XIV, p. 129-187, 1823.

Sturm. Recherches sur les caustiques par réflexion et réfraction dans le cercle, t. XV, p. 205-219, 1825.

Gergonne, Sarrus, Quetelet. Sur les caustiques, t. XV, p. 345-358.

Gergonne. Recherches d'analyse sur les surfaces caustiques, t. XV, p. 1-19.

Gergonne. Théorème sur les surfaces caustiques, t. XV, p. 65-80, 247-254.

Gergonne. Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, et historique des recherches sur les caustiques, t. XV, p. 307-315.

Saint-Laurent (Thomas de). Recherches sur la caustique par réflexion dans le cercle, t. XVII, p. 1-33.

Saint-Laurent (Thom. de). Recherches sur la caustique formée au fond d'une tasse cylindrique, t. XVII, p. 33-35, 1827.

Saint-Laurent (Thomas de). Équation générale de la caustique par réflexion dans le cercle, t. XVII, p. 128-134.

Saint-Laurent (Thomas de). Recherches sur la caustique par réfraction dans le cercle, t. XVIII, p. 1-19, 1827.

Gergonne. De la caustique par réfraction dans le cercle, t. XVIII, p. 48-56.

Correspondance mathématique.

Tome I, 1828.

Quetelet. Énoncé d'un théorème général sur les caustiques, p. 14.

J. G. G. Notice historique sur les caustiques, p. 29.

Quetelet. Énoncé de quelques théorèmes nouveaux sur les caustiques, p. 147.

Gergonne. Extrait d'une lettre au rédacteur, p. 149 et 268.

A. Timmermans. Sur les caustiques secondaires, p. 336.

Tome VII, 1832.

Plana. Mémoires sur les caustiques, p. 13.

Plana. Suite, p. 85.

Tome VIII, 1835.

Hamilton. Remarques sur le mémoire de M. Plana, p. 27.

1822. Dupin. Applications de géométrie. Routes de la lumière, p. 185.

SOLUTION DE LA QUESTION 143 (p. 134).

PAR M. JOHN (de Marseille).

Connaissant le centre et un point d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers (Serret).

Lieu des sommets. Prenons pour axe des x la droite passant par le centre et le point donné, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite élevée par le centre.

L'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$Ay^2+Bxy+Ca^2+F=0;$$

puisqu'elle est équilatère, $C=-A$. D'ailleurs A peut être supposé égal à 1. L'équation de l'hyperbole équilatère sera donc $y^2+Bxy-x^2+F=0$; soit m le coefficient angulaire de l'axe de la courbe; ce coefficient angulaire sera donné par l'équation $Bm^2-4m-B=0$; x', y' désignant les coordonnées de l'un des sommets $y'=mx'$; $y'^2+Bx'y'-x'^2+a^2=0$; a désignant l'abscisse du point commun à toutes les hyperboles; il faudra donc éliminer m, B et F. Entre les trois équations :

$$(1)\, y'=mx',\ (2)\, Bm^2-4m-B=0,\ (3)\, y'^2+Bx'y'-x'^2+F=0,$$

il vient :

$$y'^4-x'^2y'^2+4x'^2y'^2-x'^2y'^2+x'^4+a^2(y'^2-x'^2)=0;$$

l'équation du lieu est donc $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère dont l'axe serait a, sur ses tangentes (*Voir* Charpentier, *Annales*, t. IV, p. 142). C'est une lemniscate de Bernoulli; il est d'ailleurs évident que le lieu des foyers est une courbe semblable à celle des sommets et semblablement placée.

Note. L'équation est $y^2+Bxy-x^2+F=0$, ou $F=a^2$; α, β désignant les coordonnées des foyers, on connaît leurs valeurs (*voir* t. II, p. 430); il faut y faire $\gamma=90°$; $N=0$; $L=mF$; $A=-C=1$; éliminant m entre les deux équations, on obtient de suite $(\alpha^2+\beta^2)^2=2F(\alpha^2-\beta^2)$. Tm.

NOUVELLE SOLUTION

et généralisation de la question 101.

PAR M. PAUL SERRET,
Élève d'Avignon.

—

Théorème. Quatre droites situées dans le même plan forment quatre triangles; dans chacun d'eux existe un point de rencontre des trois hauteurs; les quatre points de rencontre sont situés sur une même droite.

1. La démonstration de ce théorème donnée *Nouvelles Annales*, 1846, p. 13, est assez compliquée; la suivante, qui me paraît plus simple, présente en outre, comme nous le verrons, l'avantage de s'appliquer immédiatement au théorème général, démontré analytiquement *Nouvelles Annales*, 1845, p. 530.

Soient (*fig.* 40) ABD, ACE; ODE, OBC les quatre droites données. Par le point C d'intersection des deux droites OBC, ACE, menons CF parallèle à ABD, qui rencontre la droite ODE au point F, de sorte que l'on a :

(1) FD : FE :: AC : CE.

Soient d, f, e, a les projections sur OBC des points D, F, E, A. Soient de plus m, n, p, et M les points de rencontre des hauteurs dans les trois triangles ODB, ABC, OCE, et dans le triangle auxiliaire OCF.

Cela posé, pour prouver, par exemple, que les trois points m, n, p sont en ligne droite, comme par construction la ligne M Cp est droite, et que de plus les droites Mm et Cn sont parallèles, il suffit de faire voir que l'on a :

$$Mm : Cn :: Mp : Cp; \qquad (2)$$

ou bien, en prenant les projections de ces longueurs sur OBC, que l'on a :

$$df : Ca :: fe : Ce,$$

ou bien

$$fd : fe :: Ca : Ce,$$

ou bien

$$FD : FE :: CA : CE,$$

ce qui est précisément la relation de construction (1). Donc on a bien la relation (2); donc les trois points m, n, p sont en ligne droite. On verrait d'une façon analogue que les trois points m, n, l sont en ligne droite. Donc les quatre points sont sur une même droite.

2° *Théorème.* Si deux des quatre droites sont anti-parallèles par rapport à l'angle formé par les deux autres, 1° la distance des points de rencontre des deux triangles partiels sera égale à la distance des points de rencontre des deux triangles qui les comprennent; 2° les distances des points de rencontre de chacun des grands triangles aux points de rencontre des triangles non compris sont égales.

Ainsi l'on aura : $mn = lp$ et $ml = np$.

Par hypothèse l'on a, BC et DE étant anti-parallèles dans le triangle DAE : angle B=angE; angC=angD, et de plus

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}. \qquad (a)$$

Il en résulte immédiatement, comme il est facile de le voir, que BD et CE sont aussi anti-parallèles par rapport à l'an- DOB, et que l'on a :

ang B = angE ; ang ($2dr$ — C) = ang($2dr$ — D), et de plus

$$\frac{OE}{OB}=\frac{OC}{OD}. \qquad (b)$$

Soient ω, b, d les projections sur ACE des points O, B, D ; c, d, β, les projections sur OE, de C, A, B ; ε, ω, γ, les projections sur ABD de E, O, C.

Cela posé, je dis d'abord qu'on aura la proportion

$$pn : nm :: ml : pl. \qquad (1)$$

On trouve en effet :

$$pn : nm :: ae : ad :: \text{AE.}\cos C : \text{AD.}\cos B ;$$

de même

$$ml : pl :: d\delta : cd :: \text{AB.}\cos D : \text{CA.}\cos E ;$$

donc, pour que la relation (1) existe, il faut et il suffit que $\frac{\text{AE.}\cos E}{\text{AB.}\cos B}=\frac{\text{AD.}\cos D}{\text{AC.}\cos C}$, égalité qui existe en vertu des relations (a). De même je dis qu'on aura :

$$ml : mn :: np : lp, \qquad (2)$$

et on a :

$$ml : mn :: \varepsilon\omega' : \omega'\gamma :: \text{EO.}\cos D : \text{CO.}\cos B$$
$$np : lp :: b\omega : \delta\omega :: \text{OB.}\cos CO : \text{D.}\cos E ;$$

donc, pour que la relation (2) existe, il faut et il suffit que $\frac{\text{OE.}\cos E}{\text{OB.}\cos B}=\frac{\text{OC.}\cos C}{\text{OD.}\cos D}$, égalité qui existe en vertu des relations (b) ; donc on a en même temps les proportions (1) et (2) ; or, 1° en les multipliant terme à terme on a :

$$ml.pn : \overline{mn}^2 :: ml.pn : \overline{pl}^2,$$

donc $$\overline{mn}^2 = \overline{pl}^2, \text{ ou } mn = pl.$$

En divisant (1) et (2) terme à terme on a :

$$\frac{pn}{ml} : 1 :: \frac{ml}{np} : 1,$$

d'où

$$\frac{pn}{ml} = \frac{ml}{np}, \text{ d'où } pn = ml.$$

Or les deux égalités $mn = pl$, et $ml = np$ démontrent le théorème qui fait l'objet de ce paragraphe.

3. *Lemme.* Un triangle étant inscrit à une conique, les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant respectivement par les sommets opposés concourent en un même point.

Cette proposition, démontrée analytiquement (*Nouvelles Annales*, 1845, p. 432), peut se démontrer géométriquement, ainsi qu'il suit :

Les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant par les milieux de ces côtés, concourent en un même point, centre de la conique ; donc, comme on pourrait facilement le démontrer, les trois parallèles menées par les sommets opposés, concourront en un même point.

4. La démonstration du paragraphe 1 suppose essentiellement et seulement 1° que dans chaque triangle les trois droites menées par les trois sommets concourent en un même point ; 2° que dans chaque triangle la direction de la transversale menée par un sommet quelconque dépend *uniquement* de la direction du côté opposé, de sorte que dans deux triangles tels que ODB, BAC qui ont leurs bases sur la même droite, les transversales menées par les sommets D et A opposés à la base commune soient parallèles.

En effet, cela étant, on verra comme précédemment, paragraphe 1, 1° que la ligne MCp est droite, 2° que les droites Mm, Cn sont parallèles, et que leurs longueurs sont entre elles comme leurs projections df, aC, faites suivant les parallèle Dd, Ff et na sur la droite OBC, et ainsi de suite...

Par conséquent, toutes les proportions précédemment établies subsisteront encore et conduiront au même résultat.

Donc, d'après le lemme 3, la démonstration du paragraphe 1 est exactement applicable au théorème général suivant :

Théorème. Un quadrilatère étant tracé dans le plan d'une conique, si l'on prolonge suffisamment les côtés opposés, on obtient quatre triangles ; dans chacun d'eux existe un point de rencontre des trois droites conjuguées aux trois côtés et passant par les sommets opposés ; ces quatre points sont en ligne droite.

NOTE

Sur un nouvel indice de l'existence de racines imaginaires dans une équation.

PAR M. PAUL SERRET,
Élève d'Avignon.

—

1. On sait qu'une équation a toujours des racines imaginaires quand plusieurs termes consécutifs de cette équation présentent trois coefficients en progression géométrique, ou quatre coefficients en progression arithmétique. La première proposition se déduit immédiatement du théorème de de Gua, et indirectement de celui de Descartes ; la seconde, dont la remarque est due à M. Hermite, est une conséquence de la première.

2. *Théorème.* Si dans une équation quatre termes consécutifs ont leurs coefficients en proportion géométrique, et si de plus les antécédents ont le même signe, l'équation aura des racines imaginaires.

Cette remarque que je crois nouvelle, et que l'on peut déduire du théorème de Descartes, se déduit aussi immédiatement du théorème de de Gua.

En effet, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2} étant les coefficients de quatre termes consécutifs, on doit avoir séparément, si toutes les racines sont réelles, les deux relations :

$$(a) \qquad A^2_n > A_{n-1}.A_{n+1}, \qquad A^2_{n+1} > A_n.A_{2+n}.$$

Or, par suite de la restriction faite dans l'énoncé, on a à la fois :

$$A_{n-1}.A_{n+1} > 0, \quad \text{et} \quad A_n.A_{n+2} > 0,$$

mais des deux relations (a) on déduit la suivante :

$$A^2_n.A^2_{n+1} > A_{n-1}.A_n.A_{n+1}.A_{n+2},$$

ou bien, divisant par le facteur positif $A_n.A_{n+1}$, on aura :

$$(b) \qquad A_n.A_{n+1} > A_{n-1}.A_{n+2};$$

or, dans le cas actuel, on a :

$$A_n.A_{n+1} = A_{n-1}.A_{n+2};$$

donc on ne pourrait avoir en même temps les deux relations (a), donc l'équation a des racines imaginaires.

3. Soient a, b, c, d les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation; supposons-les en proportion arithmétique; on reconnaîtra facilement que l'équation aura des racines imaginaires, si l'on a : $\frac{b^2 - ac}{bd - c^2} > 0$, en multipliant l'équation proposée par $x - \frac{c}{b}$.

QUESTION D'EXAMEN (*V.* t. V, p. 703).

Lieu des milieux des cordes de direction donnée, intercèptée entre deux coniques.

I. Théorème. Le milieu des cordes de direction donnée, interceptée entre deux coniques, est, généralement parlant, une ligne du quatrième degré.

Démonstration. Prenons pour axe des y une droite ayant la direction donnée, et soit l'équation ordinaire à six termes celle de la première conique; et une équation analogue avec des coefficients accentués, celle de la seconde conique. Toutefois nous supposons, ce qui est toujours permis, que le coefficient A de y^2 est le même dans les deux équations; résolvant les deux équations, on a

$$[2AY_1+Bx+D]=\sqrt{mx^2-2kx+l};\ [2AY_2+B'x+D']=$$
$$=\sqrt{\mu x^2-2\varkappa x+\lambda};$$

Y_1 et Y_2 sont les coordonnées correspondant à la même abscisse dans chaque conique; μ, $\varkappa$, λ sont des quantités de la seconde conique, analogues à m, k, l dans la première conique

$$m=B^2-4AC$$
$$k=2AE-BD$$
$$l=D^2-4AF.$$

La grandeur *absolue* de la corde interceptée est Y_1-Y_2; en représentant par y l'ordonnée du milieu de cette corde, on a $2y=Y_1+Y_2$; il vient donc

$$4Ay+x(B+B')+D+D'=\sqrt{mx^2-2kx+l}+\sqrt{\mu^2-2\varkappa x+\lambda};$$

faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$[(4Ay+x(B+B')+(D+D')^2-x^2(m+\mu)+2x(k+\varkappa)-l-\lambda]^2=$$
$$=4[mx^2-2kx+l]\,[\mu x^2-2\varkappa x+\lambda],$$

équation du quatrième degré.

II. *Discussion.* Le second membre peut prendre cette forme :

$$4m\mu\left[x^2-2\frac{k}{m}+\frac{l}{m}\right]\left[x^2-2\frac{\varkappa}{\mu}x+\frac{\lambda}{\mu}\right];$$

les deux facteurs trinômes deviennent égaux, lorsque

$$\frac{k}{m}=\frac{\varkappa}{\mu};\quad \frac{l}{m}=\frac{\lambda}{\mu}, \qquad (1)$$

la première équation annonce que les centres des deux coniques sont sur une parallèle à l'axe des y, et la seconde, que les pôles de l'axe des y, pris par rapport aux deux coniques, sont aussi sur une parallèle à l'axe des y.

On a les identités

$$\frac{k^2}{m^2}-\frac{l}{m}=\frac{4AL}{m^2}, \text{ ou } L=AE^2-BDF+CD^2+mF;$$

$$\frac{\varkappa^2}{\mu^2}-\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4AL'}{\mu^2} \text{ (t. I, p. 490)};$$

donc, d'après les équations (1), $\frac{L}{m^2}=\frac{L'}{\mu^2}$; mais les trinômes peuvent se mettre sous la forme

$$\left(x-\frac{k}{m}\right)^2-\frac{4AL}{m^2} \text{ et } \left(x-\frac{\varkappa}{\mu}\right)^2-\frac{4AL'}{\mu^2};$$

le lieu est donc le système de deux coniques représenté par l'équation

$$\left[4Ay+(B+B')x+D+D'\right]^2=\left[\sqrt{m}\pm\sqrt{\mu}\right]^2\left[x^2-\frac{2kx}{m}+\frac{m}{l}\right].$$

III. Si les deux coniques sont concentriques et ont un diamètre commun de même grandeur ; on peut prendre ce diamètre pour axe des x et le centre pour origine ; alors

$k=\varkappa=0$, $F=F'$, et $l=4AF=\lambda=-4AF'$; donc l'équation du quatrième degré devient

$$[(4Ay+x(B+B')^2-x^2(m+\mu)-2l]^2=4\,[mx^2+l]\,[\mu x^2+\lambda],$$

c'est la question 12 proposée tome V, p. 702. $\frac{F}{A}$ ou $\frac{l}{4A^2}$ présente le carré du demi-diamètre commun.

Avis. Nous engageons les candidats à traiter cette dernière question directement. Les méthodes les plus générales sont toujours les meilleures sous le point de vue scientifique, mais ne valent rien pour les examens où l'on ne donne que de petits cas particuliers qui exigent de petits expédients auxquels il faut être préparé d'avance, sous peine d'échouer, les plus forts comme les plus faibles. Tm.

ANNONCE.

QUESTION D'EXAMEN (voy. t. V, p. 703).

Problème. Résoudre l'équation $a\sin x + b\cos x = c$.

Solution. Faisons $\frac{a}{a^2+b^2} = \sin m$; $\frac{b}{a^2+b^2} = \cos m$; m est connu par les tables; l'équation devient $\cos(x-m) = \frac{c}{a^2+b^2}$; les tables donnent $x-m$, et par conséquent x; si $c=a^2+b^2$, alors $x=m$; si $c > a^2+b^2$, x est imaginaire; lorsque c est négatif, on fait $x=-y$, et l'équation devient $a\sin y - b\cos y = c$.

Observation I. Par la table de Gauss, on trouve facilement $\log(a^2+b^2)$ au moyen de $\log a$ et $\log b$ (*V.* Finck, *Éléments d'algèbre*, p. 518, seconde édition).

Observation II. Dans la courbe transcendante donnée par l'équation $y = a\sin x + b\cos x$, la valeur maxima de y est a^2+b^2; l'aire comprise entre l'ordonnée à l'origine et une ordonnée quelconque, ajoutée au coefficient angulaire correspondant à cette dernière ordonnée, est une quantité constante. La courbe est une sinussoïde.

SUR LES NORMALES

et les Développées des coniques.

Remarque. Nous faisons usage, dans ce qui suit, des fonctions que nous avons introduites dans la théorie des coniques, fonctions qui existent similairement pour toutes les lignes et surfaces algébriques, et qui servent à l'application de la *théorie des équations* à la recherche des propriétés de l'espace, ce qui constitue la vraie géométrie cartésienne, et qu'on n'enseigne pas dans nos livres élémentaires; ce qu'ils donnent sous ce nom n'est qu'une macédoine de problèmes et de théorèmes, résolus et démontrés moyennant des opérations algébriques, chose qu'on savait faire et qu'on faisait plus d'un siècle avant Descartes. Rappelons notre notation. Nous désignons la fonction fondamentale par L, savoir :

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC);$$

elle renferme six coefficients, et de là six fonctions dérivées partielles :

$$\frac{dL}{dA} = l' = E^2 - 4CF; \quad \frac{dL}{dC} = l = D^2 - 4AF;$$

$$\frac{dL}{dD} = k' = 2CD - BE; \quad \frac{dL}{dE} = k = 2AE - BD;$$

$$\frac{dL}{dB} = -n = DE - 2BF; \quad \frac{dL}{dF} = m = B^2 - 4AC.$$

I. Problème. Étant donnée l'équation générale d'une conique, rapportée à des axes rectangulaires, et l'équation d'une droite située dans le plan de la conique, quelle relation doit exister entre les coefficients pour que la droite soit normale à la courbe.

Solution. Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (1)$$

l'équation de la conique, et

$$dy + ex + f = 0 \quad (2)$$

l'équation de la droite, désignons restrictivement par x et y les coordonnées du point d'intersection de ces deux lignes. Pour satisfaire à la condition énoncée, on doit avoir

$$\frac{2Ay + Bx + D}{2Cx + By + E} = \frac{-e}{d},$$

ou bien

$$y(2Ad+Be)+x(2Ae+Bd)=-(dD+eE).$$

Combinant cette équation avec l'équation (2), on déduit

$$Mx=f(2Ad+Be)-d(dD+eE);\ My=-f(2Ce+Bd)+$$
$$+e(dD+eE);\ M=2(C-A)de+B(d^2-e^2);$$

substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), réunissant les termes en f^2, en f, et les termes indépendants de f, on trouve, toute réduction faite, et faisant usage des relations d'identité (t. I, p. 490) :

$$f(Ad^2+Bde+Ce^2)[mf+2k'd+2ke]+e^4(Cl-L)+$$
$$+de^3[Bl-2Cn]+d^2e^2[l(A-2C)+l'(C-2A)+2mF]+$$
$$+d^3e[Bl'-2An]+d^4[Al'-L)=0, \quad (3)$$

relation cherchée.

Corollaire 1. Lorsque le rapport $\frac{e}{d}$ est constant, l'équation en f n'est que du second degré; ainsi il n'y a que deux normales parallèles, ce qui est évident; lorsque f est nul, ce qui revient aux droites passant par un même point, l'équation en $\frac{e}{d}$ est du quatrième degré. Nous devons à M. Gérono la première discussion complète de ce cas (t. II, p. 16).

Problème 2. Étant donnée l'équation d'une ligne du sixième degré, à coordonnées rectangulaires, vérifier si elle est la développée d'une conique.

Solution. Soit $\varphi(x,y)=0$ l'équation donnée du sixième degré, et soient $x'y'$ les coordonnées d'un point de la courbe; l'équation de la tangente à la courbe en ce point est $yD_{y'}+xD_{x'}=y'D_{y'}-x'D_{x'}$; $D_{x'}$ et $D_{y'}$ désignent les dérivées de la fonction φ prises successivement par rapport à x et à y, et dans lesquelles ces variables courantes sont remplacées respectivement par x' et y'; on sait d'ailleurs que le second membre ne renferme que des termes du cinquième degré. Mettant dans la relation (3) du problème précédent, au lieu de d, e, f, respectivement les fonctions $D_{y'}$, $D_{x'}$, $y'Dy_1 - x'Dx_1$; si l'on peut donner aux lettres A, B, C...F des valeurs telles que la relation s'annule *identiquement;* alors la courbe est la développée d'une conique, déterminée par les valeurs des coefficients A, B... F. Si cette possibilité n'existe pas, la courbe donnée n'est pas la développée d'une conique.

PROBLÈME 3. Étant donnée l'équation générale d'une conique, à coordonnées rectangulaires, trouver l'équation de la développée.

1er *Cas.—Courbes à centre.* Soit l'équation de la courbe $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$; prenons pour origine le centre; à cet effet, faisons $x=x'+\frac{k}{m}$, $y=y'+\frac{k'}{m}$, on aura $Ay'^2+Bx'y'+C'x'^2+\frac{L}{m}=0$; rapportons les courbes à ses axes principaux; posons $x'=x''\cos\varphi - y''\sin\varphi$, $y'=+x'\sin\varphi+y''\cos\varphi$, on peut toujours supposer que φ est un angle aigu, et substituant, il vient $a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2$ pour l'ellipse; la développée de cette ellipse est

$$[a^2x''^2+b^2y''^2-c^4]^3=27a^2b^2c^4x^2y^2 \quad (V. \text{ t. II, p. } 74),$$

ou

$$c^2=a^2-b^2.$$

Revenant au second système d'axes, on a

$$x''=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi;\ y''=-x'\sin\varphi+y'\cos\varphi;$$
$$x''^2=x'^2\cos^2\varphi+2x'y'\sin\varphi\cos\varphi+y'^2\sin^2\varphi;$$
$$y''^2=x'^2\sin^2\varphi-2x'y'\sin\varphi\cos\varphi+y'^2\cos^2\varphi;$$

on a $\operatorname{tang}2\varphi=\frac{-B}{A-C}$; de là on déduit, par les relations trigonométriques connues :

$$\sin 2\varphi = \frac{+B}{R} \text{ (B et R doivent avoir même signe);}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{R+A-C}{2R};\ \sin^2\varphi = \frac{R+C-A}{2R},\ \text{où } R^2=(A-C)^2+B^2;$$

on a aussi

$$a^2 = \frac{2L}{m^2}[N+R];\ b^2 = \frac{2L}{m^2}[N-R],\ \text{où } N=A+C;$$

et $c^4 = \frac{16L^2R^2}{m^4}$ (*V.* t. I, p. 493, et t. II, p. 431);

faisant les substitutions, il vient

$$4[m^2(Ax'^2-Bx'y'+Cy'^2)-4LR^2]^3+27m^5L[B(x'^2-y'^2)+$$
$$+2(A-C)x'y']^2=0. \qquad (1)$$

On revient du second système au premier, moyennant

$$x'=x-\frac{k}{m};\ y'=y-\frac{k'}{m},$$

et l'on a ainsi l'équation générale de la développée de l'ellipse, les axes étant rectangulaires.

Pour l'hyperbole, il faut changer le signe de b^2, et prendre $b^2=\frac{2L}{m^2}[R-N]$, et l'on arrive à la même équation que ci-dessus.

Parabole. Même équation générale que dessus, et soient α, β les coordonnées du sommet, on a
$8NL\alpha=k(l+l')-4EL$; $8NL\beta=k'(l+l')-4DL$ (t. II, p. 432); adoptons le sommet pour origine, et pour axes, les axes principaux; à cet effet, faisons

$$x=\alpha+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$$
$$y=\beta+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

on doit obtenir l'équation

$$y'^2+\frac{\sqrt{LN}}{N^2}x'=0,$$

car le paramètre principal est égal à $\frac{\sqrt{LN}}{N^2}$ (*V.* t. I, p. 494) ; l'équation de la développée est alors

$$-\frac{27}{2}\frac{\sqrt{LN}}{N^2}y'^2-8\left(x'+\frac{\sqrt{NL}}{2N^2}\right)^3=0;$$

dans le cas actuel, $R=\pm(A+C)$; donc

$$\cos^2\varphi=\frac{A}{R};\ \sin^2\varphi=\frac{C}{R};\ \sin 2\varphi=\frac{B}{R};$$

revenons du second système au premier : l'on a

$$x'=\cos\varphi(x-\alpha)+\sin\varphi(y-\beta);\ y'=-\sin\varphi(x-\alpha)+\cos\varphi(y-\beta),$$

$$y'^2=\frac{1}{N}[C(x-\alpha)^2-B(x-\alpha)(y-\beta)+A(y-\beta)^2],$$

$$x'=\frac{\sqrt{N}}{N}[\sqrt{A}(x-\alpha)+\sqrt{C}(y-\beta)]=\frac{\sqrt{N}}{2N\sqrt{A}}[2A(x-\alpha)+$$
$$+B(y-\beta)],$$

et
$$\sqrt{L}=\frac{k}{2\sqrt{A}};$$

substituant, il vient

$$54AkN^2[C(x-\alpha)^2+B(x-\alpha)(y-\beta)+A(y-\beta)^2]=$$
$$=[4AN(x-\alpha)+2BN(y-\beta)-k]^3;$$

mais le trinôme du premier membre est le carré de $(x-\alpha)\sqrt{C}+(y-\beta)\sqrt{A}$, et remplaçant $\sqrt{C}$ par $\frac{B}{2\sqrt{A}}$, il vient

$$27kN^2[2A(y-\beta)+B(x-\alpha)]^2=-2[4AN(x-\alpha)+$$
$$+2BN(y-\beta)+k]^3.$$

PROBLÈME 4. Étant donnée l'équation générale d'une conique à coordonnées obliques, trouver l'équation de la développée.

Solution. Même notation que dessus : γ l'angle des axes;

conservons même origine et même axe des x; prenons les axes rectangulaires. A cet effet, faisons

$$x = x' - y' \cot\gamma\,;\ y \sin\gamma = y',$$

il vient

$$y'^2[A - B\cos\gamma + C\cos^2\gamma] + x'y'[B\sin\gamma - 2C\cos\gamma] + Cx'^2\sin^2\gamma +$$
$$+ y'\sin\gamma[D - E\cos\gamma] + \sin^2\gamma(Ex' + F) = 0\,;$$

les axes étant rectangulaires, on peut appliquer les résultats précédemmen tobtenus, et ensuite revenir au système oblique à l'aide des formules $x' = x + y\cos\gamma$; $y' = y\sin\gamma$.

SOLUTIONS

De quelques questions sur l'origine des coordonnées dans les coniques.

—

Remarque. Nous prenons l'équation hexanôme de la conique, et désignons par γ l'angle des axes; nous faisons usage de la fonction principale L et de ses six fonctions dérivées k, k', l, l', n, m. (*Voir* page 206.)

1. Quelles sont les équations de condition pour que l'origine soit : 1° sur la courbe; 2° un sommet; 3° le centre; 4° un foyer; 5° un centre de courbure; 6° sur un axe principal; 7° sur une directrice.

Solutions. 1° *Sur la courbe* : $F = 0$, équation de condition;

2° *Un sommet* $\left\{\begin{array}{l} L^2(2A\cos\gamma - B^2) = k^2 l R^2 \\ L^2(2C\cos\gamma - B^2) = k'^2 l R^2 \end{array}\right\}$ équations de condition où $R^2 = (A+C)^2 + m\sin^2\gamma$; (*voy.* t. I, p. 26, équation (9));

3° *Le centre* : $k = 0$; $k' = 0$;

4° *Un foyer* : $l = l'$; $n = l\cos\gamma$ (*voy.* t. II, p. 427);

5° *Un centre de courbure* : les axes étant rectangulaires.

Ellipse et hyperbole $4[Ak^2-Bkk'+Ck'^2-4LR^2m^2]^3+27m^4L$ $[B(k^2-k'^2)+2(A-C)kk']^2=0$; on parvient à ce résultat, en remplaçant dans l'équation (1) de la développée (*voy.* p. 209) x et y par $-\frac{k}{m}$ et $-\frac{k'}{m}$;

Parabole. $27kN^2[2A\beta+B\alpha]^2=2[4AN\alpha+2BN\beta-k]^3$; $N=A+C$; x, β sont les coordonnées du sommet. *Voir* la développée de la parabole (p. 210).

Observation. Si les coordonnées sont obliques, il faut les rendre rectangulaires, comme il a été dit pages 210 et 211.

6° *Sur un axe principal.* $k'[2A\cos\gamma-B]=k[C-A\pm R]$, où $R=\sqrt{(A+C)^2+m\sin^2\gamma}$; il faut que l'une ou l'autre de ces deux équations soit satisfaite; on parvient à ce résultat, en remplaçant dans l'équation aux axes principaux x et y par $-\frac{k}{m}$ et $-\frac{k'}{m}$ (*voir* t. I, p. 496).

Observation. Cette équation de condition équivaut à celle-ci:

$$k[2A\cos\gamma-B]=k'[A-C\pm R],$$

et cela en vertu de la relation d'identité

$(A-C)^2+[2A\cos\gamma-B][2C\cos\gamma-B]=R^2$ (*voy.* t. I, p. 490).

7° *Sur une directrice.* La polaire de l'origine doit dans ce cas passer par un foyer.

Ellipse et hyperbole. L'équation de la polaire de l'origine est $Dy+Ex+2F=0$; $\alpha+\frac{k}{m}$, $\beta+\frac{k'}{m}$ sont les coordonnées du foyer; α et β étant les coordonnées du même point lorsque l'origine est au centre; substituant ces valeurs, il vient pour équation de condition, $m(D\beta+E\alpha]=2L$; d'où

$$m^2[D^2\beta^2+2DE\alpha\beta+E^2\alpha^2]=4L^2;$$

mais on connaît les valeurs de α^2, β^2, et $\alpha\beta$ en fonction des coefficients de l'équation (t. II, p. 430). Pour avoir $\alpha\beta$, il faut avoir recours à l'équation, aux axes principaux

$$2(A-C)\alpha\beta+a^2[B-2C\cos\gamma]+a^2[2A\cos\gamma-B]=0\,;$$

on en déduit :

$$\alpha\beta\sin^2\gamma=\frac{2L}{m^2}\,[\cos\gamma[N-R]-B\sin^2\gamma]$$

ou $\quad R^2=N^2+m\sin^2\gamma$ et $N=A+C-B\cos\gamma$;

faisant les substitutions, on a, toute réduction faite :

$$[N-R]\,[D^2+E^2-2DE\cos\gamma]+2mF\sin^2\gamma=0.$$

Parabole. On a $D\beta+E\alpha=-2F$; remplaçant β et α par leurs valeurs trouvées (t. II, p. 432), on obtient pour équation de condition : $\cos\gamma[Dkl'+Fk'l]=L(l-l')]$.

NOTE SUR LES RACINES ÉGALES.

PAR A. VACHETTE,

Licencié ès sciences mathématiques, et licencié ès sciences physiques.

—

1° Exprimer que $f(x)=0$ a n racines égales.

On a les trois moyens suivants : 1° exprimer que le quotient de $f(x)$ par $(x-a)^n$ est entier; 2° exprimer que $f(x)$, $f'(x)\ldots f^{(n-1)}$ ont une racine commune a; 3° exprimer que $f(x)$ et $f'(x)$ ont un diviseur commun du degré $n-1$, qui est une puissance exacte $(x-a)^{n-1}$.

Ces trois procédés sont identiques. En effet, remplaçons, dans $f(x)$, x par $a+x-a$, et développons

$$f(a+x-a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n+\ldots$$

En divisant par $(x-a)^n$, le premier membre devient $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$, et l'on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{1.2(x-a)^{n-2}} + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-1)\,(x-a)} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n} + \dots$$

Le second membre devant être un polynôme entier en x, il faut que les termes où x entre en dénominateur disparaissent d'eux-mêmes, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(a)=0\,;\ f'(a)=0\,;\ f''(a)=0\ \dots f^{(n-1)}(a)=0\,,$$

n équations qui contiennent a, et donneront $n-1$ conditions quand on aura éliminé a.

Ce sont les mêmes conditions qu'on trouverait par le second procédé.

Par le troisième procédé, on sait, d'après la formation du dérivé d'un polynôme au moyen des facteurs de ce polynôme, que s'il existe un commun diviseur $(x-a)^{n-1}$ entre $f(x)$ et $f'(x)$, $f(x)$ doit admettre comme diviseur $(x-a)^n$; car $f'(x)$ étant la somme des produits $m-1$ à $m-1$ de $f(x)$, si $f(x)$ n'était pas divisible par $(x-a)^n$, la somme des produits ne pourrait admettre comme diviseur $(x-a)^{n-1}$. En exprimant donc que $f(x)$ est divisible par $(x-a)^n$, on trouve les conditions précédentes; et en exprimant que $f'(x)$ est divisible par $(x-a)^{n-1}$, on les retrouve toutes, excepté la première ; en effet :

$$f'(a+x-a)=f'(a)+\frac{f''(a)}{1}(x-a)+\frac{f'''(a)}{1.2}(x-a)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-2)}(x-a)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots(n-1)}(x-a)^{n-1}+\dots$$

ou bien :

$$\frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}}=\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{f''(a)}{(x-a)^{n-2}}+\frac{f'''(a)}{1.2(x-a)^{n-3}}+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-2)\,(x-a)}+\frac{f^{(n)}a}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots$$

Comme le deuxième membre doit être un polynôme entier en x, on a les conditions

$$f'(a)=0\,;\quad f''(a)=0\ \ldots\ldots f^{(n-1)}(a)=0,$$

où il ne manque, pour avoir toutes les précédentes, que la condition $f(a)=0$.

On évite ainsi le paradoxe que M. Gérono avait, à mon avis, suffisamment résolu dans le tome Ier des *Annales*. J'ajoute néanmoins que les développements nouveaux qu'il vient de donner dans le tome actuel confirment pleinement sa théorie par des exemples, et font, pour ainsi dire, toucher au doigt la démonstration.

Pour démontrer plus rigoureusement les conclusions qui précèdent, j'observe que le reste de la division de $f(x)$ est

$$\frac{f(a)}{(x-a)^{n}}+\frac{f(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{f''(a)}{1.2(x-a)^{n-2}}+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)\,(x-a)},$$

et doit être nul, quel que soit x ou quel que soit $x-a$; on peut l'écrire

$$\frac{1}{(x-a)^{n}}\left\{\begin{array}{l} f(a)+f'(a)\,(x-a)+\dfrac{f''(a)}{1.2}\,(x-a)^{2}+\ldots+ \\ \quad+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}\,(x-a)^{n-1} \end{array}\right\}=0.$$

C'est alors une identité qui donne les conditions énoncées.

QUESTIONS.

144. Étant donnés deux ellipsoïdes semblables, concentriques, et ayant leurs axes principaux homologues dans la même direction, tout cylindre circonscrit au petit ellipsoïde coupe le volume du grand dans un rapport simple qu'il s'agit de trouver. (Lebesgue).

145. Une droite est parallèle au plan d'une conique; un plan de direction donnée coupe la droite et la conique en trois points; formant les sommets d'un triangle, trouver 1° l'équation de la surface engendrée par les côtés du triangle qui vont de la parallèle à la conique; 2° dans quel cas les sections planes de cette surface sont-elles des coniques; 3° évaluation du volume. (Wallis).

146. Dans un paraboloïde hyperbolique dont les paraboles principales sont égales, la somme ou la différence des distances des divers points d'une même ligne de courbure à deux génératrices rectilignes fixes, est constante. (J. A. Serret.)

147. L'équation de la développée de la courbe $a^2x^2+b^2y^2=$ $=(x^2+y^2)^2$, qui est lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse sur ses tangentes, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\left\{(2b^2-a^2)a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+(2a^2-b^2)b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right\}= \\ =ab\,(a^2-b^2).$$

(Strebor).

148. La rectification de la courbe, lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène deux tangentes à une ellipse donnée, l'angle qu'elles font soit constant, s'effectue par des fonctions elliptiques. (Strebor).

THÉORÈME

sur les courbes algébriques asymptotiques.

PAR J. A. SERRET.

Si une droite est asymptote d'une branche de courbe algébrique, elle l'est également d'une seconde branche.

Soit pris pour l'un des axes coordonnés l'une des asymptotes d'une courbe quelconque, algébrique ou non, et soit $F(x, y) = 0$ l'équation de cette courbe. Changeons y en $\frac{1}{y}$, l'équation $F\left(x, \frac{1}{y}\right) = 0$ appartiendra à une seconde courbe, laquelle passera par l'origine des coordonnées; or, si pour celle-ci l'origine n'est pas un point d'arrêt, elle sera toujours coupée en deux points par un cercle décrit de l'origine avec un très-petit rayon; en d'autres termes, pour une très-petite valeur de x, variant par exemple de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, il y aura deux valeurs de y réelles et très-petites, qui pourront être de mêmes signes ou de signes contraires. Par conséquent, en remontant à la courbe primitive, on verra que si x varie de $+\varepsilon$ à 0 et de $-\varepsilon$ à 0, on aura deux valeurs réelles de mêmes signes ou de signes contraires, et qui augmentent au delà de toute limite. Il n'y a d'exception que dans le cas où l'origine est un point d'arrêt pour la courbe auxiliaire, ce qui ne peut arriver chez une courbe algébrique. On en voit un exemple sur l'équation $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Note. Ce théorème est dû à Newton, et est énoncé, si je ne me trompe, dans son *Enumeratio Linearum tertii ordinis.* Euler dit : « Quam ob rem curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter se oppositos, quorum alter cum ista linea recta antrorsum, alter cum eadem retrorsum infinite producta conveniet (Int., t. II, § 174). Ce *quam ob rem* avait besoin d'une démonstration. Tm.

DÉMONSTRATION

des Analogies de Néper.

PAR M. J. CORTAZAR,
ancien élève de l'École de arts et manufactures,
professeur à l'Université de Madrid.

—

Multiplions l'une par l'autre les deux formules

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\frac{1}{2}\text{A}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},\\ \text{tang}\frac{1}{2}\text{B}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

et nous aurons, d'après des réductions très-simples :

$$\text{tang}\frac{1}{2}\text{A}\,\text{tang}\frac{1}{2}\text{B}=\frac{\sin(p-c)}{\sin p},$$

ou, ce qui est égal :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\text{A}\sin\frac{1}{2}\text{B}}{\cos\frac{1}{2}\text{A}\cos\frac{2}{2}\text{B}}=\frac{\sin(p-c)}{\sin p},$$

d'où il vient :

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\text{A}\cos\frac{1}{2}\text{B}+\sin\frac{1}{2}\text{A}\sin\frac{1}{2}\text{B}}{\cos\frac{1}{2}\text{A}\cos\frac{1}{2}\text{B}-\sin\frac{1}{2}\text{A}\sin\frac{1}{2}\text{B}}=\frac{\sin p+\sin(p-c)}{\sin p-\sin(p-c)}.$$

Or, d'après des formules usuelles, le premier membre est égal à

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

et le deuxième à

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(2p-c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c};$$

donc

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c};$$

c'est une des analogies.

Divisons maintenant les deux formules (a), et il résulte

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(p-b)}{\sin(p-a)},$$

ou

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(p-b)}{\sin(p-a)};$$

donc

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin(p-b)+\sin(p-a)};$$

ou enfin

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c};$$

c'est l'analogie conjuguée de la première.

Le triangle supplémentaire donne les deux autres.

QUESTION

sur des Ellipses homofocales.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
professeur.

—

Étant donnée une série d'ellipses homofocales, quelle est la courbe qui passe par tous les points de ces ellipses, où les normales sont parallèles à une droite donnée ?

Soient F, F′ les foyers de ces ellipses, les axes principaux pris pour axes de coordonnées, et a, b les demi-diamètres de l'une d'elles. Son équation sera $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Le coefficient angulaire de la normale menée en un de ces points (x, y) sera $\frac{a^2y}{b^2x}$, et aura une valeur k constante si ce point appartient au lieu cherché.

Soit $FF'=2c$, $a^2-b^2=c^2$, d'où

$$\frac{a^2y}{(a^2-c^2)x}=k,\quad a^2=\frac{-c^2kx}{y-kx},\quad b^2=\frac{-c^2y}{y-kx};$$

et enfin

$$xy\left(y^2-x^2-\frac{k^2-1}{k}\,xy\right)=-c^2xy.$$

On trouve donc pour lieu géométrique $x=0$, $y=0$, et l'hyperbole équilatère concentrique aux ellipses.

$$y^2 - x^2 - \frac{k^2-1}{k}xy = -c^2.$$

Si le plan des ellipses est vertical, et que la direction constante des normales soit aussi verticale, on obtient la courbe que décrit le point d'application d'un poids qu'on hisse au moyen d'un fil fixé en F′, et qui s'enroule sur une poulie en F, et une autre mobile au point de suspension.

Note. Il est évident qu'on trouve le même lieu pour une droite donnée de direction, et faisant avec l'ellipse homofocale un angle donné; lorsque cet angle est nul, on a la tangente.

Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 124 (t. V, p. 376).

PAR M. MOUTIER,
élève au Collége de Versailles.

(*Fig.* 41.) Soit oMP un triangle dont le sommet fixe o est sur une droite fixe oL située dans le plan du triangle, on a :

$$oP = 1\,; \quad MP = \sqrt{2}\,, \quad \text{et} \quad \cos(MoP - 2oMP) = \cos MoL.$$

Le lieu du point M est une lemniscate, et la tangente en M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle oPM.

(Serret.)

Je prends o pour pôle; oL pour axe polaire, et j'appelle ω, ρ les coordonnées du point M; on a alors

$$\cos MoP \cos 2oMP + \sin MoP \sin 2oMP = \cos\omega.$$

Or, dans le triangle MoP :

$$\cos MoP = \frac{\rho^2-1}{2\rho}\,; \quad \cos oMP = \frac{\rho^2+1}{2\rho\sqrt{2}}\,;$$

et par suite $\sin \text{Mo}P = \frac{\sqrt{6\rho^2-\rho^4-1}}{2\rho}$; $\sin o\text{MP} =$, etc.; reportant ces valeurs dans la précédente équation, et réduisant

$$\rho^4-4\rho^3\cos\omega+4\rho^2-1=0,$$

équation polaire d'une lemniscate ayant pour axe, l'axe polaire ; le centre V a pour rayon vecteur $o\text{V}=1$; et les sommets s et s',

$$os'=1+\sqrt{2}\,;\quad os=\sqrt{2}-1\,,\ \text{etc.}$$

Soit c le centre du cercle circonscrit au triangle oPM, et cD perpendiculaire sur le milieu de oM ; alors

$$c\text{D} = \sqrt{\overline{c\text{M}}^2 - \frac{\rho^2}{4}}\,;$$

mais, d'après la formule $\text{R}=\frac{abc}{4s}$,

$$c\text{M} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2\rho\sin \text{M}o\text{P}} = \frac{\rho\sqrt{2}}{\sqrt{6\rho^2-\rho^4-1}},$$

et

$$c\text{D} = \frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^2-3}{\sqrt{6\rho^2-\rho^4-1}}.$$

En désignant par k un certain accroissement du rayon vecteur, et par h l'accroissement correspondant de l'angle :

$$\text{limite}\left(\frac{h}{k}\right)=\frac{4\rho^2-\rho^4-3}{4\rho^4\sin\omega}.$$

Si donc je mène la sous-tangente polaire du point M :

$$o\text{T}=\rho^2\lim\left(\frac{h}{k}\right)=\frac{4\rho^2-\rho^4-3}{4\rho^2\sin\omega}$$

Or, il est aisé de vérifier que

$$\frac{\rho(\rho^2-3)}{\sqrt{6\rho^2-\rho^4-1}} = \frac{4\rho^2-\rho^4-3}{4\rho^3\sin\omega},$$

c'est-à-dire que $2cD=oT$; donc les trois points M, c, T sont en ligne droite; donc enfin la tangente à la lemniscate au point M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle oPM.

DEUX QUESTIONS D'EXAMEN

sur les Progressions par quotients.

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

1° Trouver quatre nombres en progression par quotient, quand on connaît leur somme, celle de leurs carrés, celle de leurs quatrièmes puissances.

Il faut résoudre

$$x+y+z+t=a$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=b$$
$$x^4+y^4+z^4+t^4=c$$
$$xt=yz.$$

Je pose $x+t=x_1$ et $xt=y_1$; les équations données contenant x et t de la même manière qu'elles contiennent y et z, la valeur de x donnera non-seulement $x+t$, mais $x+z$, et le problème sera résolu. Comme on a

$$y+z=a-x_1 \quad y^2+z^2=(a-x_1)^2-2y_1=b-(x_1^2-2y_1)$$
$$y^4+z^4=(y^2+z^2)^2-2y^2z^2=(b-x_1^2+2y_1)^2-2y_1^2=$$
$$=c-(x_1^2-2y_1)^2+2y_1^2,$$

on aura à résoudre les deux équations

$$2x_1^2-2ax_1-4y_1+a^2-b=0,$$
$$2(x_1^2-2y_1)(x_1^2-2y_1-b)-4y_1^2+b^2-c=0.$$

et en remarquant que la première donne

$$2\,(x_1^2 - 2y_1) = 2ax_1 - a^2 + b$$

et

$$x_1^2 - 2y_1 - b = ax_1 - \frac{a^2+b}{2} = \frac{2ax_1 - a^2 - b}{2},$$

la deuxième deviendra

$$(2ax_1 - a^2 + b)\,(2ax_1 - a^2 - b) - 2y_1^2 + \frac{b^2-c}{2} = 0,$$

ou bien

$$4a^2x_1^2 - 8a^3x_1 + a^4 - b^2 - 2y_1^2 + \frac{b^2-c}{2} = 0,$$

ce qui donne les deux équations

$$2(x_1^2 - ax_1) = 4y_1 - a^2 + b,$$
$$4a^2(x_1^2 - ax_1) = 8y_1^2 - a^4 - b^2 + 2c,$$

d'où l'on tire, par la division,

$$2a^2(4y_1 - a^2 + b) = 8y_1^2 - a^4 - b^2 + 2c,$$
$$8y_1^2 - 8a^2y_1 + a^4 - 2a^2b - b^2 + 2c = 0,$$

$$y_1 = \frac{2a^2 \pm \sqrt{2(a^2+b)^2 - 4c}}{2}.$$

Comme x_1 ou $x+t$ n'est jamais égal à a, alors y_1 ou xt n'est jamais égal à $\frac{a^2}{4}$, valeur maximum du produit de deux facteurs dont la somme est a, ce qui sert à rejeter la solution où le radical a le signe $+$. On trouve ensuite, avec

$$y_1 = \frac{2a^2 - \sqrt{2(a^2+b)^2 - 4c}}{2}; \quad x_1 = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2 + 8y_1}}{2} =$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{3a^2 + 2b - 2\sqrt{(a^2+b)^2 - 4c}}}{2}.$$

On combinera les deux valeurs de x_1 alternativement avec celle de y_1, et on aura d'abord x et t, ensuite y et z. La question n'admet qu'une solution.

Soit par exemple $a=21$, $b=125$, $c=5729$, on trouvera $y_1=24$ et $x_1=10$ avec $x_1=11$, ce qui donne pour la proportion cherchée : $4:3::8:6$.

Le problème est impossible pour $c>\frac{(a^2+b)^2}{2}$. Le maximum de la somme des cubes des termes d'une proportion par quotient dont la somme et la somme des carrés sont connues, est $c=\frac{(a^2+b)^2}{2}$ donné par $y_1=a^2$ et $x_1=\frac{a\pm\sqrt{3a^2+2b}}{2}$.

2° Trouver une progression par quotient, connaissant la somme s des termes, la somme s_2 de leurs carrés, la somme s_4 de leurs quatrièmes puissances.

On a donc

$$\frac{lq-a}{q-1}=s\,;\quad \frac{l^2q^2-a^2}{q^2-1}=s_2\,;\quad \frac{l^4q^4-a^4}{q^4-1}=s_4\,,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{lq+a}{q+1}=\frac{s_2}{s}=m;\quad \frac{l^2q^2+a^2}{q^2+1}=\frac{s_4}{s_2}=n.$$

Prenant pour inconnues $lq=x$, $a=y$ et q, on a les trois équations

$$\begin{aligned} x+y&=m(q+1),\\ x-y&=s(q-1),\\ x^2+y^2&=n(q^2+1)\,; \end{aligned}$$

éliminant x et y, on obtient

$$(m^2+s^2-2n)q^2+2(m^2-s^2)q+m^2+s^2-2n=0\,,$$

équation réciproque, car elle doit donner aussi bien le quotient du deuxième terme par le premier que le quotient de l'avant-dernier terme par le dernier. On en déduit :

$$q=\frac{s^2-m^2\pm\sqrt{(s^2-m^2)^2-(s^2-m^2+2n)^2}}{s^2+m^2-2n}=$$

$$=\frac{s^2-m^2\pm2\sqrt{(s^2-n)\,(n-m^2)}}{s^2+m^2-2n}.$$

Comme on a les valeurs

$$x=\frac{m+s}{2}q+\frac{m-s}{2},\ y=\frac{m-s}{2}q+\frac{m+s}{2};$$

on pourra trouver tous les éléments de la progression, et le problème n'aura qu'une solution.

Si l'on fait $s=31$, $s_2=341$ et $s_4=69905$, on en déduit $m=11$ et $n=205$. On trouve alors $q=2$, et la progression cherchée est ÷1:2:4:8:16.

Il faut, pour la possibilité du problème, que les valeurs de q soient réelles, ce qui exige que n soit compris entre s^2 et m^2, ou que s_4s^2 soit compris entre s^4s_2 et $s_2^2s_4$.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

des Polygones et des Polyèdres inscriptibles. — Expression du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. — Rayons de courbure des courbes à double courbure.

PAR E. BRASSINE,
professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

—

1° Si a, b, c désignent les trois côtés d'un triangle dont s est l'aire et R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation très-connue : $\mathrm{R}=\frac{a.b.c}{4s}$, d'où $4s=\frac{a.b.c}{\mathrm{R}}$; cela posé, considérons un polygone inscriptible, que nous décomposerons en triangles par des diagonales partant d'un même sommet, la formule précédente appliquée à chacun des triangles prouve que quatre fois l'aire du polygone égale la somme des produits des trois côtés de chaque triangle, divisée par le rayon du cercle circonscrit, et comme le sommet d'où partent les diagonales qui divisent le polygone est quelconque, il résulte ce théorème général :

Si l'on décompose un polygone inscriptible en triangles par des diagonales partant d'un même sommet, la somme des produits formés, en multipliant entre eux les trois côtés de chacun des triangles, sera la même, quel que soit le sommet d'où partent les diagonales qui opèrent la division du polygone.

Ce théorème comprend comme cas particulier la proposition qui donne le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit en fonction des côtés.

2° On arriverait à une proposition moins simple pour le polyèdre inscriptible, mais son énoncé suppose l'expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre, en fonction des côtés de ce tétraèdre. Or, en employant les mêmes lettres avec ou sans accent pour désigner les côtés opposés du tétraèdre, nous représenterons dans notre formule ses six arêtes par a, a', b, b', c, c' (a, a' étant deux arêtes opposées, etc.). Si V est le volume de ce solide et R le rayon de la sphère circonscrite, nous écrirons, sans la démontrer, la relation :

$$R=\frac{1}{24.V}\sqrt{(aa'+bb'+cc')(aa'+bb'-cc')(aa'+cc'-bb')(cc'+bb'-aa')}.$$

Si l'on désigne par $2p$ la somme $aa'+bb'+cc'$, l'expression précédente s'écrira ainsi :

$$R=\frac{1}{6.V}\sqrt{p(p-aa')(p-bb')(p-cc')}.$$

3° Supposons que sur un plan trois points consécutifs d'une ligne courbe m, m', m'', aient pour coordonnées x, y, $x+dx$, $y+dy$, $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$. Si on prolonge mm' jusqu'à l'ordonnée du point m'' que nous supposerons coupée en k, il est visible que le triangle

$$mm'm''=mm''k-m''m'k=\frac{1}{2}(dx.d^2y-dyd^2x);$$

en appelant ds le premier élément de la courbe, on aura, d'après la formule du § 1°, $R=\frac{abc}{4s}$, l'expression du rayon de courbure de la courbe

$$R=\frac{2ds^3}{4mm'm''}=\frac{ds^3}{(dxd^2y-dyd^2x)}.$$

Si M, M', M'' sont trois points consécutifs d'une courbe à double courbure, dont le premier élément mm' sera ds, le rayon de courbure de cette courbe au point M sera $R=\frac{ds^3}{2A}$, A étant l'aire du triangle MM'M''; mais les points M, M', M'' se projetant sur les plans des xy en m, m', m'', et en considérant successivement $mm'm''$ ou MMM'' comme les bases du tronc du prisme formé par les six points M, M', M'', m, m', m'', et mesurant de deux manières ce solide, on trouve que l'aire du triangle $mm'm''$, que nous désignerons par $A'=A\cos\alpha$, α étant l'angle du plan osculateur MM'M'' avec celui des x, y ; en appelant de même A'', A''' les projections de A sur les plans des xz, yz, et remarquant que $A=\sqrt{A'^2+A''^2+A'''^2}$, on a, pour le rayon de courbure, $R=\frac{ds^3}{2\sqrt{A'^2+A''^2+A'''^2}}$; mais, d'après ce qui précède, $A'=\frac{1}{2}(dxd^2y-dyd^2x)$; A'', A''', se déduisant de A', en changeant les y ou les x en z.

On pourrait aussi exprimer R au moyen des rayons de courbure des trois projections de la courbe, et on parviendrait à une relation assez simple. Enfin il est évident que si on désigne par E, e', e'', e''' les angles de contingence de la courbe à double courbure et de ses projections, relatifs au point M et aux projections de ce point, on aura, en appelant R', R'', R''' les rayons de courbure des projections de la courbe :

$$2R^2\sin^2E=R'^2\sin^2e'+R''^2\sin^2e''+R'''^2\sin^2e'''.$$

Le cosinus des angles que fait le plan osculateur MM'M'' avec les trois plans coordonnés étant $\frac{A'}{A}$, $\frac{A''}{A}$, $\frac{A'''}{A}$, on aura pour l'équation de ce plan :

$$A'''(x'-x) + A''(y'-y) + A'(z'-z)=0,$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point quelconque.

4° Considérons trois éléments consécutifs, MM', M'M'', M'', M''', de la courbe à double courbure, dont nous supposerons les équations connues. Dans le plan osculateur MM'M'' formé par les deux premiers éléments, et par les milieux de ces éléments, je mène deux droites, r, r', faisant avec ces éléments des angles égaux à φ; ces droites se couperont en un point I. Dans le plan osculateur suivant, je mène des droites r'', r''', faisant avec le second et le troisième élément des angles φ, et se coupant en un point I'; en continuant ainsi, je formerai une courbe II'I''..., dont on pourra aisément trouver les équations en combinant l'équation du plan osculateur avec celle des deux cônes consécutifs dont les axes seront MM', M'M'', et dont les génératrices feront avec ces axes des angles φ. Si nous représentons par ω l'angle de deux plans osculateurs consécutifs ou l'angle de torsion, on trouvera, géométriquement ou analytiquement, pour l'expression de l'arc infiniment petit II' de la courbe II'I''..., l'expression $ds^2=dr'^2+r'^2\omega^2\sin^2\varphi$; on pourrait trouver aussi l'équation de la surface gauche formée par la suite des perpendiculaires élevées aux points I, I', I''... sur les plans osculateurs consécutifs. Dans le cas où $\varphi = 90°$, la courbe II'I''... sera le lieu des centres de courbure sur les plans osculateurs; la surface gauche deviendra développable, et la relation précédente deviendra $ds^2=dr'^2+\omega^2r'^2$, qui a été déjà donnée par M. Molins, *Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 382.

Note. M. Bérard a donné la relation suivante pour le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre :

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{144V^2}[A^2+B^2+C^2];\ A^2=a^2\sin^2\alpha-2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma);$$

γ, β, α sont les angles respectivement compris entre ab, ac, bc, on trouve B en changeant dans A : a en b, α en β, et vice-versâ ; de même C en changeant a et α en c et γ ; il faut en déduire la relation, d'une élégance si remarquable, de M. Brassine (*Annales de Gergonne*, t. VI, p. 228).

Tm.

THEORÈMES

relatifs aux Propriétés focales des coniques.

PAR M. SUCHET,
professeur au collége Charlemagne.

—

1° Dans l'ellipse, il existe une infinité de systèmes de deux cercles égaux ayant leurs centres sur l'axe focal à égale distance du centre de la courbe, et tels que si par un point quelconque de l'ellipse on mène à chacun d'eux une tangente, la somme des deux tangentes est constante. Quand le rayon des cercles devient nul, leurs centres donnent les foyers. D'ailleurs la longueur d'une tangente est une fonction rationnelle de l'abscisse du point correspondant de la courbe. Même propriété dans l'hyperbole en prenant au lieu de la somme la différence des tangentes.

2° Dans les courbes du second ordre, il existe une infinité de systèmes composés d'un cercle ayant son centre sur l'axe focal, et d'une droite perpendiculaire à cet axe, tels que si par un point quelconque de la courbe on mène une tangente au cercle et une perpendiculaire à la droite, le rapport de la tangente à la perpendiculaire est constant.

Note. Le premier théorème a été énoncé par M. Chasles (*Journal des Mathématiques*, t. III, p. 402. 1838). On y trouve aussi le théorème IV de la page 64 du présent volume.

Tm.

THÉORÈMES

sur les Normales dans les coniques.

PAR M. BELLION,
élève du collége Sainte-Barbe.

—

On sait que la tangente est divisée, au point de contact G et par les axes, en deux segments DG, GC, dont le produit est égal au carré du demi-diamètre conjugué de oG, diamètre qui passe par son point de contact (*fig.* 43).

Théorème I. Il existe pour la normale un théorème analogue à celui de la tangente; et de même que $DG.GC=b'^2$, de même aussi $GI.GK=b'^2$. En effet, les deux triangles rectangles DKG et GIC étant semblables, on a :

$$DG:GI::GK:GC, \text{ d'où } GI.GK=DG.GC=b'^2.$$

Théorème II. Le produit des segments que forme la normale en un point avec chaque axe et le diamètre parallèle à la tangente qui passe par ce point est égal au carré de l'autre demi-axe.

En effet, on a, d'après le théorème précédent :

$$GI.GK=b'^2 \text{ et } \overline{HG}^2=\overline{Go}^2, \sin^2 GoH=a'^2\sin^2\gamma;$$

do c

$$\text{GL. GK. HG. HG} = a'^2 b'^2 \sin^2\gamma = a^2 b^2, \qquad (1)$$

parce que a' et b' sont des demi-diamètres conjugués ; d'un autre côté,

$$\overline{\text{OH}}^2 = \text{KH. HI} = (\text{GK} - \text{GH})(\text{GH} - \text{IG});$$

donc, en développant et en observant que

$$\overline{o\text{H}}^2 + \overline{\text{HG}}^2 = a'^2 \text{ et GI.GK} = b'^2,$$

il vient

$$\text{IG.HG} + \text{GK.GH} = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Or, les équations (1) et (2) montrent que le plus grand produit GK.GH$=a^2$, et le plus petit IG.HG$=b^2$, c. q. f. d.

THÉORÈME

sur les Asymptotes de l'hyperbole.

(*Voir* t. 1, p. 142.)

PAR M. HUET.

—

Théorème. Si d'un point pris dans le plan d'une hyperbole on abaisse des perpendiculaires sur les asymptotes, et qu'on prenne sur chacune de ces perpendiculaires la longueur de l'autre, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes sera perpendiculaire à la polaire du point choisi ; si le point est pris sur la courbe, ce sera la normale en ce point.

La démonstration donnée pour l'ellipse s'appliquant parfaitement, je n'en parlerai pas ; mais j'en donnerai une plus géométrique qui s'appliquera également à l'ellipse. Soit M le point donné ; AB sa polaire ; abaissons sur les asymptotes les perpendiculaires MG, ME, et prenons $MH = MG$ et $MF = ME$; construisons le parallélogramme IFMH, je dis que la diagonale IM sera perpendiculaire à AB; l'équation de la polaire d'un point dont les coordonnées sont y'', x'' est $y''x + x''y = 2m^2$; $xy = m^2$ étant l'équation de la courbe, faisant dans la première équation successivement $x = 0$, $y = 0$, on obtient :

$$OA = y = \frac{2m^2}{x''} \text{ et } OB = x = \frac{2m^2}{y''},$$

d'où
$$OA : OB :: y'' : x'';$$

la figure donne

$$IF = MH = MG = x'' \sin\theta, \text{ etc.}$$

$MF = ME = y'' \sin\theta$ donne $MF : IF :: y'' : x''$, ou, à cause du rapport commun : $AO : OB :: MF : IF$. Or l'angle $MF = AOB$; donc les deux triangles AOB, FIM sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc l'angle $IMF = OAB$; or $F = M$ est perpendiculaire à OA; donc IMAFD est perpendiculaire à AB.

AUTRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 68.

(Voyez t. II, page 327.)

PAR M. P. A. G. COLOMBIER,
régent de mathématiques à Béziers.

Nous avons donné (*V.* t. III, p. 22) une démonstration de ce théorème; la suivante doit être préférée en raison de sa simplicité.

Démonstration. De ce que les quatre points O, S, O′, S′ (*V.* t. III, *fig.* 5) sont harmoniquement situés sur PQ, l'on a

$$SO:SO'::S'O:S'O';$$

par suite, les points O, O′ sont des points conjugués par rapport au diamètre SS′, c'est-à-dire que

$$OC \times O'C' = \overline{SC'}^2;$$

menons le rayon C′A à l'un des points d'intersection des deux circonférences; en vertu de cette relation, la droite C′A est tangente en A à la circonférence qui passe par les trois points O, O′, A; par conséquent, si je joins CA, cette droite sera perpendiculaire à C′A, et par suite les deux circonférences se couperont orthogonalement en A, c. q. f. d.

NOTE

sur une Courbe dérivant d'une ellipse (*).

PAR M. J. DIENGER (de Sinsheim)

Soit
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b \tag{1}$$

l'équation d'une ellipse; menons du centre de cette courbe à sa circonférence tous les rayons vecteurs possibles; prolongeons chacun d'eux de la même longueur h, et cherchons l'équation de la courbe passant par les extrémités de tous ces rayons vecteurs.

Soient à cet effet x_1, y_1 les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, l'équation du rayon vecteur qui aboutit à ce point sera $y=\frac{y_1}{x_1}x$; si l'on prolonge ce rayon de la longueur h, les coordonnées de son extrémité seront

---

(*) Du genre Conchoïde, *V.* t. II, p. 288. Tm.

$$x = x_1 + \frac{hx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad y = y_1 + \frac{hy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Pour trouver l'équation de la courbe cherchée, il faudra éliminer x_1, y_1 entre ces deux équations, et l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

A cet effet, posons $x_1 = \rho \cos \varepsilon$, $y_1 = \rho \sin \varepsilon$, on aura d'abord :

$$\rho^2 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{b^2} \right) = 1 \qquad (2)$$

et

$$x = \rho \cos \varepsilon + h \cos \varepsilon = (\rho + h) \cos \varepsilon$$
$$y = \rho \sin \varepsilon + h \sin \varepsilon = (\rho + h) \sin \varepsilon;$$

de là on tire

$$x^2 + y^2 = (\rho + h)^2, \text{ ou } \rho^2 = x^2 + y^2 - 2h\sqrt{x^2 + y^2} + h^2$$
$$\cos^2 \varepsilon = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2 \varepsilon = \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

d'où enfin on obtiendra l'équation de la courbe cherchée en substituant ces valeurs dans l'équation (2) :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - h \right)^2 = x^2 + y^2. \qquad (3)$$

On peut facilement voir que cette courbe est composée de quatre parties identiques, comme l'ellipse d'où elle dérive. Les deux points de sa circonférence qui sont le plus éloignés du centre de l'ellipse, qui est en même temps aussi le centre de notre courbe, se trouvent sur l'axe des x ; leur éloignement du centre est $a + h$. Les deux points les moins éloignés du centre se trouvent sur l'axe des y à une distance $b + h$ du centre de la courbe.

Si l'on pose $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, r étant le rayon vecteur de la nouvelle courbe tirée du centre à un point de la circonférence, α l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, on aura pour l'équation polaire de la courbe en question :

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} + h, \qquad (4)$$

l'angle α étant compté depuis zéro jusqu'à 2π

Cherchons maintenant la quadrature de l'espace compris entre l'axe des x, le rayon vecteur correspondant à l'angle $\alpha\left(\overline{<}\ \frac{\pi}{2}\right)$, et la portion de la courbe comprise entre ces deux lignes. On sait que cet espace est exprimé en général par $\frac{1}{2}\int_0^\alpha r^2 d\alpha$; donc il est dans le cas actuel :

$$\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} + abh\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} + \\ + \frac{h^3\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}b^2\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1 - e^2\cos^2\alpha} + bh\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\alpha}} + \frac{h^3\alpha}{2},$$

e étant $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

La première de ces deux intégrales se détermine de la manière suivante :

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1 - e^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1 + e\cos\alpha} + \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1 - e\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{e + \cos\alpha}{1 + e\cos\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{-e + \cos\alpha}{1 - e\cos\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{a}{2b} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}\right).$$

Quant à la seconde intégrale, on a pour $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\beta \frac{-d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} = \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin\beta}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} - \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} =$$

$$= \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - \mathrm{F}(\beta, e) = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, e\right),$$

en désignant la fonction elliptique de $\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}$ par $\mathrm{F}(\varphi, m)$.

Substituant ces valeurs, on trouve pour l'espace cherché :

$$\frac{ab}{4}\,\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}\right) +$$

$$bh\left[\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\ \alpha, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\right] + \frac{h^2}{2}\alpha. \quad (5)$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cette expression donne le quart de l'espace entier renfermé par la circonférence de la courbe, dont cet espace est :

$$ab\pi + 4bh\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + h^2\pi. \qquad (6)$$

L'espace compris entre l'ellipse et notre courbe se trouve donc :

$$4hb\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + h^2\pi. \qquad (7)$$

Si dans tous les points de la circonférence de l'ellipse proposée (1) on mène des tangentes, et si du centre de l'ellipse on abaisse des perpendiculaires sur ces tangentes, le lieu de tous les points de rencontre des tangentes et des perpendiculaires correspondantes est, comme on sait, une courbe représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2y^2. \tag{8}$$

L'équation polaire à cette courbe est donc

$$r=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}.$$

Cette courbe touche l'ellipse aux extrémités des deux axes principaux, et elle est de même composée de quatre parties identiques. Son plus grand rayon vecteur est a, tandis que le plus petit rayon vecteur de la courbe considérée plus haut est $b+h$.

De là on voit qu'on peut prendre h toujours de manière que la courbe (3) soit tout à fait hors de la courbe (8), ce que nous supposerons dans ce qui suit.

L'espace renfermé par la courbe (8) se trouve :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)d\alpha=(a^2+b^2)\frac{\pi}{2}.$$

L'espace compris entre l'ellipse (1) et la courbe (8) est $(a-b)^2\frac{\pi}{2}$, et l'espace compris entre la courbe (8) et la courbe (3) est :

$$4bhF\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)+\frac{\pi}{2}[2h^2-(a-b)^2]. \tag{9}$$

Si $h=a-b$, ce qui peut avoir lieu dans la supposition précédente, le dernier espace est simplement

$$4b(a-b)F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)+\frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

Dans le cas où h est assez petit pour que les deux courbes (3) et (8) s'entrecoupent, chacune de ces courbes sera en partie hors de l'autre; pour ce cas, l'expression (9) est la différence de deux quantités, dont l'une est la somme des parties de l'espace compris entre les deux courbes qui sont hors de la courbe (8), et l'autre, la somme des parties de cet espace qui sont hors de la courbe (3).

Si l'on porte sur le prolongement des rayons vecteurs de l'ellipse (1) des longueurs h, $2h$, $3h$..., et si l'on fait passer par les extrémités des longueurs h, $2h$... des courbes, on aura une série de courbes analogues à celle représentée par l'équation (3). Désignant par première, seconde... courbe celle qui passe par les extrémités de h, $2h$..., on aura pour l'espace renfermé par la $n^{ième}$ courbe :

$$ab\pi + 4nbh\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + n^2h^2\pi\,;$$

l'espace compris entre la $n^{ième}$ et la $(n+1)^{ième}$ courbe est donc .

$$4bh\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + (2n+1)h^2\pi\,,$$

c'est-à-dire égal à l'espace compris entre la première courbe et l'ellipse plus $2n$ fois l'espace d'un cercle de rayon h. Il suit de là que les espaces compris entre deux courbes consécutives croissent en progression arithmétique, et que la différence des termes de cette progression est le double du cercle dont le rayon est égal à h. La courbe de l'ordre 0 sera ici l'ellipse primitive (*).

On peut se proposer la même question que ci-dessus relativement à l'ellipsoïde; mais les intégrales qu'on rencontre dans cette nouvelle recherche paraissent trop compliquées pour qu'elles puissent trouver place ici. Il suffira d'indiquer quelques résultats. L'équation de la nouvelle surface est

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-h\right)^2 = x^2+y^2+z^2\,,$$

(*) Propriété intuitive, commune au genre conchoïde. Tm.

et le volume du corps terminé par cette surface :

$$4\pi\left[\frac{abc}{3}+\frac{abch\mathrm{F}(\varepsilon,\,\eta)}{\sqrt{a^2-c^2}}+\frac{ach^2\mathrm{F}(\varepsilon,\,k)}{\sqrt{a^2-c^2}}+\frac{h^3}{3}\right],$$

$$\varepsilon \text{ étant} = \text{arc}\left(\cos=\frac{c}{a}\right),\ \eta=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ k=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

—

NOTIONS ESSENTIELLES D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, comprenant, outre les questions exigées pour le baccalauréat ès lettres et le baccalauréat ès sciences physiques, l'indication des théories les plus importantes et les plus usuelles à l'usage des élèves de philosophie et d'humanités, par A.-M. Laisné, professeur de mathématiques au collége Rollin ; avec cette épigraphe : *Prodesse spes est et unus mihi labor.* Paris, 1847, in-8°, 32 pages. Chez Bachelier, Delalain, Hachette, libraires.

Les ouvrages bien écrits se lisent vite; j'ai parcouru promptement cet *exposé substantiel* de l'algèbre élémentaire. Il peut servir aux humanistes à repasser *rationnellement* les connaissances qu'on leur a enseignées et sur lesquelles ils auront à répondre. Rien d'essentiel n'est omis ; les énoncés, quoique resserrés, sont très-intelligibles : c'est le caractère d'une bonne rédaction. On donne avec quelque étendue la théorie des quantités *négatives*. Il est des théories qu'on n'explique bien qu'à ceux qui les savent : les expressions négatives sont de ce genre : il semble qu'il faudrait distinguer les quantités qu'on se donne, pour ainsi dire de prime-abord, d'avec celles qui ne sont que des résultats de calcul; tels sont les termes isolés négatifs, les $\frac{0}{0}$, les $\frac{\infty}{0}$, les $\sqrt{-1}$, etc. On ne devrait expliquer ces dernières qu'au moment qu'elles se présentent, ou, en style de prospectus, au moment que le besoin s'en fait sentir. On devrait ajourner la théorie *négative* et n'en parler qu'après la résolution des équations du premier degré.

D'après Lhuillier, l'auteur se sert des mots *minuende* et *minuteur* pour distinguer la quantité dont on soustrait de celle qui est soustraite. L'emploi de ces mots, dans le cours de la science, est si peu fréquent, qu'on ne voit pas la nécessité de les établir. Il en est de même de l'expression : quantité *sous-radicale*, pour dire quantité sous un radical. C'est surtout dans les ouvrages destinés aux jeunes gens qu'il faut éviter les néologismes ; mais on ne peut qu'applaudir à la suppression de l'accentuation barbare autorisée par l'Académie dans *binôme*, *polynôme*, etc. M. Laisné, fidèle à sa devise, a fait un ouvrage utile. Tm.

QUESTIONS.

149. A, B, C, D sont quatre points pris sur une ellipse, et tels que les normales en ces points se rencontrent en un même point. Faisant passer une circonférence par trois quelconques A, B, C de ces points, cette circonférence coupera l'ellipse encore une fois en un point D′, diamétralement opposé au point D. (Joachimsthal.)

150. Soit a un point pris hors d'une ellipse, et bc la corde polaire de ce point. Soit a' un point sur le même diamètre que a et à égale distance du centre ; abaissant de ce point les perpendiculaires $a'p$, $a'q$ sur les axes principaux, la

droite pq prolongée coupe l'ellipse en deux points b', c'; les quatre normales qui passent par b, c, b', c' se rencontrent en un même point. (Joachimsthal.)

151. Supposons trois points m', m'', m''' sur une ellipse; menons par les points m', m'' des tangentes à cette courbe, que nous supposerons se couper en un point T. Joignons le point m'' au point m''', et par le point T menons une sécante parallèle à la corde $m''m'''$; cela fait, si on joint le point m''' au premier point m', la ligne de jonction $m'''m'$ passe au milieu de la corde, interceptée sur la sécante partant du point T et parallèle à $m''m'''$.

Cette proposition fera trouver le centre d'une ellipse lorsqu'on connaîtra trois points de cette courbe et deux tangentes en deux des points donnés. (Brassine.)

152. Prenons un point K dans une ellipse dont AB est un diamètre. Joignons les extrémités A, B de ce diamètre au point K, et prolongeons les droites AK, BK jusqu'aux points m', m'', où elles vont couper la courbe; menons aux points m', m'' des tangentes à l'ellipse, qui se couperont en un point extérieur T. Cela posé, la droite KT sera parallèle au diamètre conjugué du diamètre AB. (Brassine.)

153. Trouver en coordonnées polaires sphériques le lieu d'un point P sur la surface d'une sphère tel que si l'on mène de là des arcs de grands cercles aux sommets V_1, $V_2 \ldots V_n$ d'un polygone régulier sphérique, inscrit dans un petit cercle donné, la somme des angles PV_1V_2, $PV_2V_3 \ldots PV_nV_1$ soit constante. (Strebor.)

154. Soit G le centre de gravité d'un triangle, H un point pris dans le plan du triangle; joignons le point H aux trois sommets et par le milieu de chacun des trois côtés, menons une parallèle à la droite qui joint le sommet opposé au point H; ces trois parallèles se rencontrent au même point K. Cela posé, 1° les trois points G, H, K sont en ligne droite;

2° l'on a $GH = 2GK$. (Théorème de M. Paul Serret, élève d'Avignon).

155. Étant données quatre circonférences A, B, C, D dans un même plan, décrire une cinquième circonférence E ayant son centre sur la circonférence A; touchant la circonférence B, de telle sorte que les axes radicaux de cette circonférence E par rapport à B et C se coupent sur un point de la circonférence D.

156. Par un point M d'une conique on mène les cordes MA, MB, MC...; par les points ABC... on mène des droites respectivement conjuguées aux droites MA, MB, MC...; toutes ces droites concourent en un même point situé sur la conique. (Paul Serret.)

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

(Suite. Voyez page 54.)

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

Considérons enfin la cinquième des égalités (1), nous en tirons

$$[R_2, R_3] = [r_4, R_3] - [c_4, R_3],$$

d'où, en appelant d_4' le plus grand commun diviseur entre r_4 et c_4,

$$[R_2, R_3] = \left[\frac{r_4}{d_4'}, R_3\right] - \left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right],$$

et substituant dans l'égalité (11)

$$(12) \quad [A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'}, R_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$

$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right]-\left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right]$$
$$-\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right].$$

Appelons en second lieu d_4'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, je dis que l'on aura

$$[d_4'', R_3]=[d_4'', R_2].$$

Il suffit, en effet, de considérer les deux égalités

$$\frac{c_3}{d_3'} R_1=R_2Q_3+R_3\frac{r_3}{d_3'},$$
$$\frac{c_4}{d_4'} R_2 = R_3Q_4 + \frac{r_4}{d_4'}$$

obtenus en divisant la quatrième des égalités (1) par d_3' et la cinquième par d_4', et de raisonner sur ces égalités comme on l'a fait plus haut sur les égalités (a) et (b), ou sur les égalités (c) et (d). La relation

$$[d_4'', R_3]=[d_4'', R_2]$$

permet de mettre l'égalité (12) sous la forme

$$(13)\quad [A_4, B_4]=\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, R_2\right]-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right]-\left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right]$$
$$-\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right];$$

il suffit de remarquer que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, R_3\right] + [d_4'', R_3]$$

et

$$\left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right] = \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right]+[d_4'', R_2].$$

Appelons encore d_4''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$ et $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, je dis que l'on aura

$$[d_4''', R_3]=[d_4''', R_1].$$

En effet, entre les deux égalités

$$\frac{c_2}{d_2'}R=R_1Q_2+R_2\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'}R_1=R_2Q_3+R_3\frac{r_3}{d_3'};$$

éliminons R_2; puis l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_3'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, il viendra

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}Q_3R=R_1Q_2'+R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\frac{r_2}{d_2'}.$$

Or d_4''' étant un diviseur de $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, on a

$$[d_4''', R_1Q_2']=\left[d_4''', R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\frac{r_2}{d_2'}\right];$$

donc

$$[d_4''', R_1Q_2']=[d_4''', R_3],$$

puisque $\frac{r_2}{d_2'}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ sont premiers avec $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, et par suite avec d_4'''; donc

$$[d_4''', R_1]\ \overline{\underline{<}}\ [d_4''', R_3].$$

D'un autre côté, si l'on élimine R_2 entre les deux équations

$$\frac{c_3}{d_3'}R_1=R_2Q_3+R_3\frac{r_3}{d_3'},$$

$$\frac{c_4}{d_4'}R_2=R_3Q_4+\frac{r_4}{d_4'},$$

et que, l'élimination faite, on divise de part et d'autre par

d_4'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, il viendra :

$$\frac{c_3}{d_3'd_4''}\ \frac{c_4}{d_4'}\ R_1 = R_3 Q_2'' + Q_3 \frac{r_4}{d_4'd_4''},$$

et d_4''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, on trouvera de même

$$[d_4''', R_3] \overline{\underline{<}} [d_4''', R_1].$$

Nous conclurons de là

$$[d_4''', R_3] = [d_4''', R_1],$$

et par conséquent, en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] + [d_4''', R_3]$$

et

$$\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] = \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] + [d_4''', R_1],$$

que l'on peut écrire la relation (13) sous la forme

$$(14)\quad [A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right]$$
$$-\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right].$$

Appelons encore d_4'''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, je dis que l'on aura

$$[d_4'''', R_3] = [d_4'''', R].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}Q_2B=RQ_1'+R_2\frac{r_2}{d_2'd_2''}\;\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\;\frac{c_3}{d_3'}R=R_2Q_1''+R_3Q_2\frac{r_3}{d_3'd_3''},$$

éliminons R_2, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_3''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$ et $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$, et par Q_2, qui sera facteur à tous les termes, il viendra

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}Q_1''B=RQ_2'''+R_3\frac{r_1}{d_1'}\;\frac{r_2}{d_2'd_2''}\;\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}.$$

Or d_4'''' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, on a

$$[d_4'''', RQ_2''']=\left[d_4'''', R_3\frac{r_1}{d_1'}\;\frac{r_2}{d_2'd_2''}\;\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}\right];$$

donc

$$[d_4'''', RQ_2'''] \overset{=}{<} [d_4'''', R_3],$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$ sont premiers avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, et par suite avec d_4'''', donc

$$[d_4'''', R] \overset{=}{<} [d_4'''', R_3];$$

d'un autre côté, si on élimine R_1 entre les deux équations

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}Q_3R=R_1Q_2'+R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\;\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'd_4''}\;\frac{c_4}{d_4'}R_1=R_3Q_2''+Q_3\frac{r_4}{d_4'd_4''},$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_4''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$ et $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$, et par Q_3 facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}\;\frac{c_3}{d_3'd_4''}\;\frac{c_4}{d_4'}R=R_3Q_2''''+Q_2'\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''},$$

et d_4'''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$, $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}$, on trouvera de même

$$[d_4'''', R_3] \leqq [d_4'''', R],$$

nous conclurons de la

$$[d_4'''', R_3] = [d_4'''', R]$$

et par suite, en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] + [d_4'''', R_3]$$

$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right] = \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right] + [d_4'''', R],$$

que l'on peut mettre l'égalité (14) sous la forme

$$(15)\ [A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d'_4d_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d'_2d_3''d_4'''}, R_1\right]$$
$$- \left[\frac{c_3}{d'_3d_4''}, R_2\right] - \left[\frac{c_4}{d'_4}, R_3\right].$$

Appelons enfin d_4''''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}$ et $\frac{c}{dd_1''d_2''d_3''''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_4''''', R_3] = [d_4''''', B].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''} Q''A = BQ_1''' + R_2 \frac{r}{d} \frac{r_1}{d_1'd_1''} \frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''},$$

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''} \frac{c_2}{d_2'd_3''} \frac{c_3}{d_3'} B = R_2Q_1'''' + R_3Q_1' \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

éliminons R_2; puis, l'élimination faite, divisons de part et d'autre par d_3''''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$ et $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$, et par $Q'_1 = Q''$ (*) facteur commun à tous les termes; il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''} Q_1''''A = BQ_2''''' + R_3 \frac{r}{d} \frac{r_1}{d_1'd_1''} \frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''} \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}.$$

Or, d_4''''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$, on a :

$$[d_4''''', BQ_2'''''] = \left[d_4''''', R_3 \frac{r}{d} \frac{r_1}{d_1'd_1''} \frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''} \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}\right],$$

donc :

$$[d_4''''', BQ_2'''''] = [d_4''''', R_3],$$

puisque $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}$, sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$, par suite avec d_4''''', donc :

$$\left[d_4''''', B\right] \overset{=}{<} \left[d_4''''', R_3\right];$$

d'un autre côté si l'on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''} Q_1''B = RQ_2''' + R_3 \frac{r_1}{d_1'} \frac{r_2}{d_2'd_2''} \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''} \frac{c_3}{d_3'd_4''} \frac{c_4}{d_4'} R = R_3Q_2'''' + Q_2' \frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''};$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_4'''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$ et $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}$, et par

(*) On peut aisément calculer Q_1' et Q'', et reconnaître la justesse de la relation $Q_1' = Q''$; mais l'égalité de Q_1' et de Q'' tient à une cause générale qu'il est bon d'indiquer, afin de montrer que, si les égalités (1) étaient en plus grand nombre que cinq, les quantités qui remplaceraient Q_1' et Q'' dans les nouvelles égalités que l'on aurait à considérer seraient encore égales. On peut remarquer que Q_1' et Q'' sont, à un même facteur près, les dénominateurs des valeurs de R et R_1 déduites des équations $\frac{c_1}{d_1'} B = RQ_1 + R_1 \frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c_2}{d_2'} R = R_1Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'}$.

$Q_1'' = Q_2'$, facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}\,\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}\,\frac{c_3}{d_3'd_4''}\,\frac{c_4}{d_4'}\,B = R_3Q_2'''''' + Q_2'''\,\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''},$$

et d_4''''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$, $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}$, on trouvera de même

$$\left[d_4''''', R_3\right] \overset{=}{<} \left[d_4''''', B\right];$$

de là nous concluons :

$$[d_4''''', R_3] = [d_4''''', B],$$

et par suite en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right] + [d_4''''', R_3],$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right] + [d_4''''', B];$$

que l'on peut mettre l'égalité (15) sous la forme

$$[A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right]$$
$$-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right]$$
$$-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right] - \left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right].$$

Actuellement les cinq quotients

$$\frac{c_4}{d_4'},\ \frac{c_3}{d_3'd_4''},\ \frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''},\ \frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''},\ \frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''},$$

sont premiers avec $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}$; les solutions

$$\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right],\ \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right],\ \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right],$$
$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right],\ \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right],$$

sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right]$; cela nous montre que ces dernières solutions sont égales à $[A_4, B_4]$; ainsi

$$[A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right],$$

ajoutant cette égalité avec les égalités

$$[A_3, B_3] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + [A_4, B_4]$$

$$[A_2, B_2] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [A_3, B_3]$$

$$[A_1, B_1] = \left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right] + [A_2, B_2]$$

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + [A_1, B_1].$$

précédemment obtenues; il vient après réductions:

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + \left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right] + \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right]$$
$$+ \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right].$$

Ce qui ramène la résolution du système proposé, à la résolution de plusieurs systèmes composés d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues, en nombre deux fois moindre que par la méthode de M. Bret.

On peut voir aisément que le résultat précédent coïncide avec le théorème de MM. Labatie et Sarrus. Pour cela je m'appuierai sur un théorème d'arithmétique très-facile à établir, et qui s'énonce ainsi : le plus grand commun diviseur entre un produit $abcd\ldots$, et un nombre n peut s'obtenir, en cherchant le plus grand commun diviseur δ entre a et n, le plus grand commun diviseur δ', entre b et $\frac{n}{\delta}$, le plus grand commun diviseur δ'' entre c et $\frac{n}{\delta\delta'}$, etc., et multipliant entre eux les plus grands communs diviseurs $\delta, \delta', \delta''$... Cela posé d_1' étant le plus grand commun diviseur entre r_1 et c_1, et d_1'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{d}$, le produit $d_1'd_1''$ sera le plus grand commun diviseur d_1 entre r_1 et $\frac{cc_1}{d}$; de même d_2' étant le plus grand commun diviseur entre r_2 et c_2, d_2'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, et d_2''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ et $\frac{c}{dd_1''}$, le produit $d_2'd_2''d_2'''$ sera le plus grand commun diviseur d_2 entre r_2 et $\frac{cc_1c_2}{d_1'dd_1''} = \frac{cc_1c_2}{dd_1}$. On verrait de même que $d_3'd_3''d_3'''d_3''''$ est le plus grand commun diviseur d_3 entre r_3 et $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}$, et $d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''$ le plus grand commun diviseur d_4 entre r_4 et $\frac{cc_1c_2c_3c_4}{dd_1d_2d_3}$, on a donc :

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + \left[\frac{r_1}{d_1}, R\right] + \left[\frac{r_2}{d_2}, R_1\right] + \\ + \left[\frac{r_3}{d_3}, R_2\right] + \left[\frac{r_4}{d_4}, R_3\right];$$

ce qui est le théorème de MM. Labatie et Sarrus, seulement établi pour les solutions multiples comme pour les solutions simples.

NOTE

Sur les sphères tangentes à quatre plans donnés.

PAR E. CATALAN.

On sait que si quatre plans se coupent de manière à former un tétraèdre, on peut généralement construire huit sphères tangentes à ces quatre plans (*). De ces huit sphères, la *première*, intérieure au tétraèdre, est appelée *sphère inscrite ;* les *quatre* suivantes sont tangentes chacune à une face du tétraèdre et aux prolongements des trois autres faces : elles sont dites *ex-inscrites ;* enfin chacune des *trois* dernières, inscrite dans l'angle dièdre formé par deux faces du tétraèdre ou par les prolongements de ces deux faces, touche aussi les plans des deux autres faces. Ces *trois* dernières sphères se réduisent à *deux* ou à *une* dans certains cas particuliers, dont on peut voir la discussion dans l'ouvrage de M. *Olivier*. Je me suis proposé, dans cette note, d'indiquer les relations qui existent entre les rayons de toutes ces sphères. Je donne aussi, sous une forme assez simple, les valeurs absolues de ces rayons, en fonction des éléments du tétraèdre formé par les plans donnés.

I.

Soient :

A, B, C, D, les aires des quatre faces du tétraèdre ;
V le volume du tétraèdre ;
r le rayon de la sphère inscrite ;

(*) Géométrie descriptive de M. Leroy; Développements de Géométrie descriptive par M. T. Olivier.

α, β, γ, δ, les rayons des quatre sphères *ex-inscrites;*
R_1, R_2, R_3, les rayons des trois dernières sphères.

Nous supposerons, pour fixer les idées, $A > B > C > D$.

Si l'on joint par des droites le centre d'une quelconque des sphères aux sommets du tétraèdre donné, on le décomposera en quatre tétraèdres, ayant pour bases les faces du tétraèdre donné, pour hauteur commune le rayon de la sphère, et pour sommet commun le centre de la sphère. Il est facile de voir, en outre, que cette construction appliquée à la sphère inscrite, donnera quatre tétraèdres *additifs*. La même construction, appliquée à une sphère ex-inscrite, donnera lieu à trois tétraèdres additifs et à un tétraèdre soustractif; enfin, elle donnera, pour chacune des trois autres sphères, deux tétraèdres additifs et deux tétraèdres soustractifs. Nous aurons donc, en appliquant à chacune de ces décompositions l'expression ordinaire du volume d'une pyramide, ces trois groupes d'équations :

$$\frac{3V}{r} = A + B + C + D, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3V}{\alpha} &= B + C + D - A, \\ \frac{3V}{\beta} &= C + D + A - B, \\ \frac{3V}{\gamma} &= D + A + B - C, \\ \frac{3V}{\delta} &= A + B + C - D, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3V}{R_1} &= A + B - C - D, \\ \frac{3V}{R_2} &= A + C - B - D, \\ \frac{3V}{R_3} &= A + D - B - C, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

II.

La somme des équations (2) donne :

$$3V\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)=2(A+B+C+D);$$

d'où, à cause de l'équation (1) :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{2}{r}. \qquad (4)$$

Ainsi *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites* est égale *à deux fois l'inverse du rayon de la sphère inscrite.*

III.

Les équations (3) donnent :

$$3V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=3A-B-C-D.$$

D'ailleurs, si de la somme des trois dernières équations du groupe (2), on retranche la première multipliée par 3, on obtient :

$$3V\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{\alpha}\right)=6A-2B-2C-2D;$$

donc

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{\alpha}; \qquad (5)$$

c'est-à-dire que, *si de la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux petites faces du tétraèdre on retranche trois fois l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite opposée à la grande face, on obtient pour résultat deux fois la somme des inverses des rayons des sphères de la troisième espèce.*

IV.

D'autres combinaisons des équations (2) et (3) donneront encore :

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=\frac{3}{\delta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}, \tag{6}$$

$$2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}, \tag{7}$$

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{3}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}, \tag{8}$$

V.

Si de l'équation (5) on retranche successivement les équations (6), (7), (8), on obtient :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2}{R_3}&=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha},\\
\frac{2}{R_1}&=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha},\\
\frac{2}{R_2}&=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ces dernières équations prouvent que *l'inverse du rayon de la sphère inscrite dans l'angle dièdre formé par le prolongement de deux faces, est égal à la demi-somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux deux autres faces, moins la demi-somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux deux premières faces.*

Parmi les équations que nous venons de trouver, il y en a qui rentrent dans les autres ; ainsi l'équation (5) est une conséquence, soit des équations (6), (7), (8), soit des équations (9).

Mais ces dernières, jointes à l'équation (4), donnent quatre équations distinctes.

VI.

Si, dans les équations (3) on suppose $A+D=B+C$, on trouve $R_3=\infty$. Ainsi, *quand la somme des aires de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux.*

Si, avec $A+D=B+C$, nous supposons $D=C$, d'où $A=B$, nous aurons en même temps $R_2=\infty$, $R_3=\infty$; *les sphères de la troisième espèce se réduisent à une, si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux.*

Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, $R_1=\infty$, $R_2=\infty$, $R_3=\infty$, et les sphères inscrites dans les angles dièdres opposés à ceux du tétraèdre se transportent toutes les trois à l'infini.

VII.

Proposons-nous maintenant de déterminer les rayons des différentes sphères. Afin d'avoir des valeurs simples, nous prendrons pour éléments du tétraèdre formé par les quatre plans, les trois côtés a, b, c de la face D, et les inclinaisons λ, μ, ν de D sur les trois autres faces A, B, C.

D'après les équations (1), (2), (3), les rayons des différentes sphères seront connus, si nous exprimons, en fonction des données, les aires A, B, C, D et le volume V.

Du sommet opposé à la face D, menons la perpendiculaire H sur cette face, et les perpendiculaires p, q, r sur les côtés a, b, c. En appelant p', q', r' les projections de ces perpendiculaires sur la face D, nous aurons évidemment :

$$p'=p\cos\lambda,\quad q'=q\cos\mu,\quad r'=r\cos\nu,$$
$$H=p\sin\lambda=q\sin\mu=r\sin\nu;$$

puis, comme il est facile de s'en assurer :

$$2D=ap'+bq'+cr',$$
$$2A=ap,\quad 2B=bq,\quad 2C=cr.$$

Ces équations donnent

$$p=\frac{H}{\sin\lambda},\ q=\frac{H}{\sin\mu},\ r=\frac{H}{\sin\nu},$$
$$p'=H\cot\lambda,\ q'=H\cot\mu,\ r'=H\cot\nu,$$
$$2D=H(a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu).$$

La quantité $a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu$ est une certaine longueur. Pour abréger, représentons-la par $2l$; nous aurons :

$$H=\frac{D}{l},\ A=\frac{D}{2l}\frac{a}{\sin\lambda},\ B=\frac{D}{2l}\frac{b}{\sin\mu},\ C=\frac{D}{2l}\frac{c}{\sin\nu}.$$

Actuellement, le volume V du tétraèdre est représenté par $\frac{1}{3}$ DH ; donc

$$3V=\frac{D^2}{l}.$$

Transportons cette valeur et celles de A, B, C dans les équations (1), (2), (3), nous obtiendrons :

$$\frac{D}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}\right)+l,$$
$$\frac{D}{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}-\frac{a}{\sin\lambda}\right)+l,$$
$$\frac{D}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sin\nu}+\frac{a}{\sin\lambda}-\frac{b}{\sin\mu}\right)+l,$$
$$\frac{D}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)+l,$$
$$\frac{D}{\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}\right)-l,$$
$$\frac{D}{R_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)-l,$$
$$\frac{D}{R_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{c}{\sin\nu}-\frac{b}{\sin\mu}\right)-l,$$
$$\frac{D}{R_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}-\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)+l.$$

Si, dans la première équation, nous remplaçons l par sa valeur, il vient :

$$\frac{D}{r}=\frac{1}{2}\left[\frac{a(1+\cos\lambda)}{\sin\lambda}+\frac{b(1+\cos\mu)}{\sin\mu}+\frac{c(1+\cos\nu)}{\sin\nu}\right],$$

ou

$$\frac{D}{r}=\frac{1}{2}\left[a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu\right];$$

puis

$$r=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu}.$$

Ces valeurs pourraient se déduire immédiatement de la formule

$$H=\frac{2D}{a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu}.$$

Des simplifications analogues se rencontrent dans les autres équations, et l'on trouve définitivement :

$$\alpha=\frac{2D}{-a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$\beta=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda-b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$\gamma=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu-c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$\delta=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu+c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_1=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu-c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_2=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda-b\cot\frac{1}{2}\mu+c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_3=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda-b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu-c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu}.$$

Note. **M. Aubert, de Christiania, en Norwége, démontre les relations suivantes. (Crelle, t. V, p. 163, 1830.)**

$$r^{-1}=\delta^{-1}+\gamma^{-1}+R_1^{-1}=\delta^{-1}+\beta^{-1}+R_2^{-1}=\delta^{-1}+\alpha^{-1}\pm R_3^{-1},$$

$$r^{-1}-\alpha^{-1}-\beta^{-1}-\gamma^{-1}-\delta^{-1}+R_1^{-1}+R_2^{-1}\pm R_3^{-1}=0,$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+\delta^{-2}=r^{-2}+R_1^{-2}+R_2^{-2}+R_3^{-2}.$$

Ceci se rapporte à la notation de M. Catalan; voici celle de M. Aubert, qui me semble plus mnémonique : R, rayon de la sphère inscrite; R_1, R_2, R_3, R_4, rayons des sphères ex-inscrites et rangés par ordre de grandeur; R_5, R_6, R_7, rayons des sphères ex-inscrites dans les bi-angles et aussi rangés par ordre de grandeur.

NOTE

sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne quelconque.

PAR M. LE DOCTEUR JOACHIMSTHAL,
agrégé à l'Université de Berlin.

—

La marche suivante nous paraît la plus simple pour parvenir à une équation symétrique entre les coordonnées. Soit γ l'angle des axes, qui est aussi l'angle dans lequel on inscrit la droite de longueur l, on a les deux équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma=l^2;$$

x et y étant les coordonnées du point de la droite mobile avec l'enveloppe, on trouve, par les méthodes connues :
$l^2x=a^2(a-b\cos\gamma)$; $l^2y=b^2(b-a\cos\gamma)$ (1) (*Nouv. Ann.*, t. I, p. 266).

Faisons $a+b=s$; $ab=p$, et par conséquent

$$l^2+4p\cos^2\frac{1}{2}\gamma=s^2\,;\quad l^2(x+y)=s\left(c^2-2p\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right);$$

$$l^4xy=p^3\sin^2\gamma-l^2p^2\cos\gamma\,;$$

d'où

$$l^4(x+y)^2=\left[l^2+4p\cos^2\frac{1}{2}\gamma\right]\left[l^2-2p\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right]^2.$$

Éliminant p entre ces deux dernières équations, on obtient évidemment une équation symétrique entre les deux coordonnées.

Note 1. Ces équations développées peuvent se mettre sous la forme

$$Ap^3+Bp^2+Cp+D=0,$$
$$A'p^3+B'p^2+C'p+D'=0\,;$$

ou

$$A=\sin^2\gamma\,;\ B=-l^2\cos\gamma\,;\ C=0,\ D=-l^4xy,$$

$$A'=4\sin^2\gamma\sin^2\frac{1}{2}\gamma\,;\ B'=4l^2\sin^2\frac{1}{2}\gamma\left[5\sin^2\frac{1}{2}\gamma-4\right].$$

$$C'=4l^4\cos\gamma\,;\ D'=l^4\left[l^2-(x+y)^2\right];$$

L'élimination mène à cette équation finale :

$$[AB'.BC'-AC'^2+AD'.AB']CD'-[AB'.BD'-AC.AD']BD'+$$
$$+[AB'.CD'-AD'^2]AD'=0.$$

AB' désigne, non un monôme, mais le binôme alterné AB'—BA', de même BC' désigne BC'—CB', et ainsi des autres. C'est l'équation donnée par Bezout (*Théorie générale des Équations*, p. 300). Le terme le plus élevé est évidemment donné par le binôme $[AD'-DA']^3$; ainsi l'enveloppe est du sixième degré. Faisant les calculs, on obtient :

$$AB'=-3l^2\sin^4\gamma\,;\ AC'=4l^4\sin^2\gamma\cos\gamma\,;\ AD'=Ml^4\sin^2\gamma\,;$$
$$BC'=-4l^6\cos^2\gamma\,;\ BD'=-Ml^6\cos\gamma-3l^6xy\sin^2\gamma\,;$$
$$CD'=4l^8xy\cos\gamma\,;\ \text{où } M=l^2-x^2-y^2-2xy\cos\gamma.$$

Représentons les trois produits qui composent l'équation finale respectivement par P, Q, R, de sorte que l'on a $P-Q+R=0$, il vient :

$$P=-4l^{4}xy\cos\gamma\sin^{4}\gamma[4l^{2}\cos^{2}\gamma+3M\sin^{2}\gamma];$$
$$Q=-l^{4}\sin^{4}\gamma[M\cos\gamma+3xy\sin^{2}\gamma][-M\cos\gamma+9xy\sin^{2}\gamma],$$
$$R=-Ml^{2}\sin^{6}\gamma[12l^{2}xy\cos\gamma-M^{2}];$$

et de là :

$$\sin^{2}\gamma[M^{3}+27x^{2}y^{2}l^{2}\sin^{2}\gamma]-$$
$$-2l^{2}xy\cos\gamma[8l^{2}\cos^{2}\gamma+9M\sin^{2}\gamma]-M^{2}l^{2}\cos^{2}\gamma=0.$$

Lorsque $\gamma=\frac{\pi}{2}$, l'équation se réduit à $M^{3}+27x^{2}y^{2}l^{2}=0$ (voyez tome I, p. 266).

II. Cherchons la polaire réciproque de cette enveloppe relativement à l'ellipse donnée par l'équation $y^{2}+x^{2}-l^{2}=0$; désignant par x' et y' les coordonnées du pôle de la droite mobile, on a $x'=\frac{l^{2}}{a}$, $y'=\frac{l^{2}}{b}$ (t. II, p. 305); mettant les valeurs de a et b dans la relation $l^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos\gamma$, et ôtant les accents, on obtient pour équation de la polaire réciproque : $x^{2}y^{2}-l^{2}(y^{2}+x^{2}-2xy\cos\gamma)=0$.

La discussion de cette courbe est l'objet du travail qui suit.

III. Soient p, q les coordonnées connues d'un point de la droite mobile dans une de ses positions, et x, y les coordonnées du pôle de cette droite; on a, pour déterminer x et y, d'abord l'équation qu'on vient de trouver, et ensuite l'équation $qy+px=l^{2}$, ce qui conduit à une équation du quatrième degré; mais si l'on a $p=q$, alors cette dernière équation fait connaître $x+y$, et l'équation de la polaire réciproque donne xy; la question est donc ramenée à une équation du second degré; mais ces divers cas ont été amplement discutés pour l'enveloppe même (page 180), et nous ne nous y arrêterons pas.

DISCUSSION

de la courbe représentée par l'équation

$$x^2y^2 - l^2(y^2 + x^2 - 2xy\cos\theta) = 0,$$

θ étant l'angle des axes.

PAR M. E. DE BOUTEILLER,
Elève de l'Institution de Reusse.

—

(*Fig.* 46.) Une remarque fort importante, et que l'on peut faire à la simple inspection de l'équation, consiste dans la parfaite symétrie des variables, qui est mise en relief par la forme

$$y^2x^2 + 2xyl^2\cos\theta - l^2(x^2 + y^2) = 0,$$

sous laquelle on peut mettre l'équation. Cette propriété indique que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, et par là la construction de la courbe se simplifiera beaucoup.

Tous les termes de l'équation étant de même parité, on reconnaît tout d'abord que la courbe a un centre et qu'elle est rapportée à ce centre. Ce point appartient au lieu, car l'équation est satisfaite par ses coordonnées ; mais la forme que nous trouverons pour la courbe fera voir aisément que c'est un point singulier.

Passons maintenant à la détermination de la forme de cette courbe. En résolvant l'équation par rapport à y, on trouve :

$$y = \frac{-l\cos\theta\, x^2 \pm \sqrt{lx^4\cos^2\theta + l^2x^2(x^2 - l^2)}}{x^2 - l^2}$$

$$y = \frac{-lx^2\cos\theta \pm lx\sqrt{l^2\cos^2\theta + x^2 - l^2}}{x^2 - l^2}$$

$$y = \frac{lx\left(-l\cos\theta \pm \sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta}\right)}{x^2 - l^2}.$$

La discussion sera plus facile en mettant cette expression sous une autre forme. J'emploie, pour la transformer, l'artifice connu qui consiste à multiplier la somme des deux quantités dont on a la différence :

$$y = \frac{lx}{l\cos\theta \pm \sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta}}.$$

La condition de réalité des valeurs de y est que l'on ait $x^2 - l^2\sin^2\theta > 0$, ou $x > l\sin\theta$; si donc on construit une ligne $OA = l\sin\theta$, et que par le point A on mène une parallèle à l'axe des y, on est sûr que tous les points de la courbe sont situés au delà de cette ligne. En égalant à 0 le dénominateur, on a une valeur de y infinie ; donc $x = l$ est une asymptote de la courbe. Voyons où la courbe rencontre la ligne AA', c'est-à-dire cherchons la valeur de y correspondant à l'hypothèse $x = l\sin\theta$. Cette hypothèse réduit y à $l\,\text{tang}\,\theta$. Pour construire cette valeur, j'élève en B une perpendiculaire à l'axe ; BC sera égal à $l\,\text{tang}\,\theta$; je le rabats sur BB', et par le point B' je mène une parallèle à l'axe des x. Le point A sera le point de tangence cherché.

Je cherche l'intersection de la courbe avec la ligne BB'. Si je fais $x = l$, $y = \frac{l}{2\cos\theta}$, en prenant le signe + du radical ; on sait qu'au signe — correspond une valeur infinie. Il faut donc construire $BG = \frac{l}{2\cos\theta}$; or, on a, dans le triangle OBC, $OC = \frac{l}{\cos\theta}$. Donc, en prenant la moitié de cette ligne, on obtient le point G.

Je vais chercher la condition pour que le point G soit au-dessous du point A' ; il faut que l'on ait :

$$\frac{1}{2\cos\theta} < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \text{ ou } \frac{1}{2} < \sin\theta,$$

c'est-à-dire que $\theta > 30°$.

Ainsi, dans le cas des axes dont l'angle est inférieur à 30°, la courbe affecte une forme plus rentrante. Pour $\theta = 30°$, le point G et le point A' sont sur une même parallèle; pour des valeurs de θ supérieures à 30°, la courbe descend obliquement de A' en G.

Cherchons maintenant en quel point la courbe rencontre son axe de symétrie OS. Je fais $x = y$ dans l'équation ; il vient :

$$x^4 + 2x^2l^2\cos\theta - 2l^2x^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + 2l^2\cos\theta - 2l^2 = 0,$$

en divisant par x^2, car la solution $x = 0$ ne convient pas à la question, on a :

$$x^2 = 2l^2(1 - \cos\theta); \quad x = 2l\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Construisons cette valeur :

(*Fig.* 47.) $$BD = l\sin\frac{1}{2}\theta\,;$$

donc $OE = 2BD = x$. On obtient ainsi le point I en menant la parallèle EI.

Maintenant que nous avons noté quelques points remarquables et indiqué la forme générale de la courbe, cherchons à la déterminer d'une manière plus précise. Nous allons voir ce que produit l'accroissement de x sur les valeurs correspondantes de y. Nous donnerons, dans cette discussion, au radical le signe —, qui correspond à la branche de courbe IGA'. Pour qu'à des valeurs positives de x correspondent des valeurs positives de y, il faut qu'on ait :

$$l^2\cos^2\theta > x^2 - l^2\sin^2\theta,$$

ce qui donne $x < l$. Pour ces valeurs de x inférieures à l, y croîtra avec x jusqu'à l'infini, qui correspond à $x = l$.

Pour des valeurs supérieures à l, y devient négatif, et la branche de courbe correspondant à ces valeurs est au-dessous de l'axe des x.

Pour déterminer cette branche, je prends la valeur absolue de y :

$$y = \frac{-lx}{\sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta} - l\cos\theta} = \frac{-l}{\sqrt{1 - \frac{l^2\sin^2\theta}{x^2}} - \frac{l\cos\theta}{x}};$$

la différence croît avec x, donc y décroît. Pour une valeur de x très-rapprochée de l, y est négatif et très-grand ; à mesure que x augmente, y diminue ; et pour $x = \infty$, il se réduit à $y = -l$, c'est-à-dire que la parallèle $y = -l$ est asymptote de la branche OS'. Cette branche rencontre l'axe de symétrie H à son point d'intersection avec la ligne EI prolongée.

D'après ce que l'on a remarqué de la symétrie de la courbe par rapport à la bissectrice et au centre, on peut aisément compléter la construction de la courbe et la tracer. (*Fig.* 48.)

Pour mieux encore particulariser la forme de la courbe, déterminons le coefficient d'inclinaison, et cherchons la position de quelques tangentes.

Ce coefficient d'inclinaison est

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{2xy^2 + 2yl^2\cos\theta - 2l^2x}{2y(x^2 - l^2) + 2xl^2\cos\theta} = \frac{l^2x - xy^2 - yl^2\cos\theta}{y(x^2 - l^2) + xl^2\cos\theta};$$

j'élimine y entre cette équation et celle de la courbe

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{x \cdot \frac{l^2x^2}{(l\cos\theta + \sqrt{\;})^2} - \frac{l^2\cos\theta x}{l\cos\theta + \sqrt{\;}} + l^2x^2}{\frac{(x^2 - l^2)lx}{l\cos\theta + \sqrt{\;}} + l^2x\cos\theta}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{l(l\cos\theta + \sqrt{\;})^2 - l^2\cos\theta(l\cos\theta + \sqrt{\;}) - lx^2}{(x^2 - l^2)(l\cos\theta + \sqrt{\;}) + l\cos\theta(l\cos\theta + \sqrt{\;})^2},$$

effectuant et réduisant

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{l^2(\cos\theta\sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta} - l\sin^2\theta}{(l\cos\theta + \sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta})^2\sqrt{x^2 - l^2\sin^2\theta}}.$$

Pour avoir les tangentes parallèles à l'axe des x, il faut égaler à 0 le coefficient d'inclinaison :

$$x^2\cos^2\theta - l^2\sin^2\theta\cos^2\theta = l^2\sin^4\theta,$$

d'où
$$x = \pm\, l\operatorname{tang}\theta.$$

A ces valeurs de x correspondent les parallèles menées par les points A et A_1.

Pour les tangentes parallèles à l'axe des y, il faut égaler à 0 le dénominateur, soit en posant $x^2 - l^2\sin^2\theta = 0$, ou $x = \pm l\sin\theta$, soit en posant $l^2\cos^2\theta = x^2 - l^2\sin^2\theta$, $x = \pm l$. On peut remarquer que les asymptotes de la courbe se trouvent au nombre des tangentes que nous venons de déterminer : ce sont en effet des tangentes à l'infini.

Cherchons la tangente au point d'intersection de la courbe avec son axe de symétrie. Soit au point I par exemple ; on a en ce point $x^2 = 2l^2(1 - \cos\theta)$,

$$l^2(2 - 2\cos\theta - \sin^2\theta) = l^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) = l^2(1 - \cos\theta^2).$$

On a alors :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{l^2[l\cos\theta(1 - \cos\theta) - l\sin^2\theta]}{l^3(1 - \cos\theta)} =$$

$$= \frac{\cos\theta(1 - \cos\theta) - \sin^2\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{\cos\theta - 1}{1 - \cos\theta} = -1.$$

Il est facile de vérifier que cette tangente est perpendiculaire à la bissectrice.

Dans le cas particulier où l'angle des axes est droit, la courbe prend une forme beaucoup plus simple ; l'équation se réduit alors à

$$y^2(x^2 - l^2) - l^2x^2 = 0,\ \text{d'où}\ y = \pm\frac{lx}{(x+l)(x-l)}.$$

On voit de suite que $x = -l$ et $x = l$ sont asymptotes; de même pour $y = l$ et $y = -l$, à cause de la symétrie de l'équation par rapport aux deux variables.

Pour avoir le point où la courbe est coupée par la bissectrice, je fais $x = y$,

$$x^4 - l^2x^2 - l^2x^2 = 0,$$
$$x^2(x^2 = 2l^2) = 0.$$

$x = 0$ donne l'origine. Je supprime cette solution; il reste $x = l\sqrt{2}$.

SOLUTION

d'un cas particulier du théorème de M. Serret. (Question 146, p. 216.)

PAR E. CATALAN.

Soit un paraboloïde hyperbolique dans lequel les plans directeurs sont perpendiculaires entre eux, on pourra le représenter par $z = xy$, les axes étant rectangulaires.

Les lignes de courbure sont représentées par

$$x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} xy - \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{4\alpha^2} = 0,$$

ou par

$$x^2 + y^2 + \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} xy - \frac{(\beta^2 - 1)^2}{4\beta^2} = 0;$$

α et β étant des constantes arbitraires introduites par l'intégration.

D'un autre côté, le lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à l'axe des x et à l'axe des y soit égale à c, est donné par

$$(2z^2+x^2+y^2)^2-2c^2(2z^2+x^2+y^2)+c^4=4(z^2+x^2)(z^2+y^2).$$

Pour avoir la projection de la ligne suivant laquelle cette surface coupe le paraboloïde, faisons $z=xy$, et nous aurons :

$$(x^2-y^2)^2-2c^2(2x^2y^2+x^2+y^2)+c^4=0.$$

Or, si nous prenons $c^2=\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}$, nous verrons que le premier membre est identique avec

$$\left[x^2+y^2-\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}xy-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}\right]\left[x^2+y^2+\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}xy-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}\right].$$

Donc le lieu en question coupe le paraboloïde suivant deux lignes de courbure ; donc, etc.

HEXAGRAMME DE PASCAL,

PAR M. A. HAILLECOURT,

Ancien élève de l'École normale,
Professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Tours.

—

Soit ABCDEF l'hexagone inscrit dans la conique donnée par l'équation $\varphi(x,y)=0$. (*Fig.* 45.)

Désignons par $F_1(x,y)=0$ l'équation du troisième degré qui représente les droites d'ordre impair, 1, 3, 5; par $F_2(x,y)=0$ celle qui représente les droites d'ordre pair ; il s'agit de montrer que six des neuf points communs à ces deux lieux étant sur une conique, les trois autres sont en ligne droite.

Supposons la réciproque démontrée, savoir : si trois des neuf points communs à deux courbes du troisième degré sont en ligne droite, les six autres sont sur une conique. La proposition directe s'ensuit aisément ; car, supposons que P n'appartienne plus à MN, et soit P' le point où ED coupe MN, l'intersection de P'B avec MF devrait appartenir à une conique passant par FEDCB, ce qui n'est pas pas possible.

Il suffit donc de démontrer la réciproque.

Pour cela, prenons pour axe des x, la droite passant par les trois points communs à $F_1=0$, $F_2=0$; $F_1(x,0)=0$ et $F_2(x,0)=0$ ayant les mêmes racines, leurs premiers membres ne peuvent différer que par un facteur q, et par conséquent $F_1(x,0)-qF_2(x,0)=0$; ce qui démontre que

$$F_1(x,y)-qF_2(x,y)=y\varphi(x,y).$$

Or, tout point commun aux deux lieux $F_1=0$, $F_2=0$ est aussi sur le lieu de l'équation $y\varphi(x,y)=0$, par suite sur l'axe des x donné par $y=0$, ou sur la conique de l'équation $\varphi(x,y)=0$. Donc ...

Remarque. Cette démonstration, de même que celle de M. Roguet (tome III, page 304), permet de supposer que les lieux représentés par les équations $F_1=0$, $F_2=0$, sont quelconques du troisième degré, au lieu d'être l'ensemble de trois droites chacune. La conclusion en est facile à tirer.

Note. Ce mode de démonstration, dû à Bobillier, a été appliqué à l'hexagramme de Pascal par M. Gergonne, et ensuite à d'autres polygones inscrits par divers géomètres, et particulièrement par M. Plücker. Tm.

QUESTIONS.

157. Lorsque trois forces P, Q, R, non-situées deux à deux dans un même plan, se réduisent à une seule force, la somme des deux tétraèdres construits sur les droites P, Q, R, prises deux à deux, est équivalente au troisième. (CATALAN.)

158. Si tang $a = \pm\sqrt{-1}$, on aura aussi tang $(a+b) = \pm\sqrt{-1}$, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de b.

159. Si par le foyer d'une conique, on conçoit *analytiquement* deux tangentes à la conique, les coefficients angulaires de ces tangentes, par rapport à une droite quelconque prise pour axe, sont représentés par $\pm\sqrt{-1}$, les axes étant rectangulaires.

160. 1° Soient $2p$ le paramètre d'une parabole; r, r', les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités d'une corde, normale à la courbe au point correspondant à r, on a la relation :

$$\left(r-\frac{1}{2}p\right)\left(r'-\frac{1}{2}p\right)=\left(r+\frac{1}{2}p\right)^2.$$

2° L'angle α de la normale avec l'axe est donné par

$$\text{Cos}^2\alpha = \frac{p}{2r}.$$

3° La distance d du foyer à la normale au point correspondant à r, par

$$d^2 = r\left(r-\frac{1}{2}p\right).$$

(GEORGES RITT.)

161. Soient A et A′ deux points d'une ellipse; AN, A′N, deux normales se rencontrant en N; n et n' les grandeurs de ces normales; p et p' les distances du centre aux tangentes passant par A et A′, d le demi-diamètre parallèle à la corde AA′; on a : 1° $np+n'p'=2d^2$; 2° si l'on mène les deux autres normales passant par N, on a $np+n'p'+n''p''+n'''p'''=$constante; 3° si A′ se réunit à A, on a $np=d^2$, où n est le rayon de courbure; 4° cette dernière expression s'applique au rayon de courbure d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, d étant le demi-diamètre parallèle à la tangente. (JOACHIMSTHAL.)

162. ABCDE étant un pentagone plan, représentons par α, β, γ, δ, ε, les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, et par S l'aire du pentagone, on a $S^2-S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=0$. (GAUSS.)

163. Si d'un point donné dans le plan d'une ellipse, on mène quatre normales, les pieds de ces normales, le point donné et le centre de l'ellipse, sont sur une même hyperbole équilatère, dont les asymptotes ont mêmes directions que les axes principaux de l'ellipse; le point de moyenne distance des pieds des normales, les centres de l'hyperbole et de l'ellipse, sont sur une même droite conjuguée dans l'ellipse au diamètre qui fait avec le petit axe un angle égal à celui que fait avec le grand axe le diamètre qui passe par le point donné.

RECTIFICATIONS RELATIVES

1° *à une leçon d'arithmétique* (Voir p. 204); 2° *au Traité des fonctions elliptiques de Legendre et de M. Verhulst*,

PAR M. P. F. VERHULST,
Professeur.

—

1° *Leçon d'arithmétique.* A la page 5 de cet opuscule, je dis par inadvertance que l'erreur totale de la multiplication abrégée a pour limite $1+a+b+c+d+e$; il faut ajouter f à cette somme, c'est-à-dire *que l'erreur a pour limite la somme de tous les chiffres du multiplicateur qui ont servi à l'opération, et qui en ont à leur droite, dans le multiplicande, plus le premier chiffre qui n'a point servi, plus une unité si le premier chiffre du multiplicande en a plus d'un à sa gauche dans le multiplicateur.*

2° *Fonctions analytiques.* Tome III, p. 97, ligne 4, au lieu de $\beta'^6=\frac{1}{4}(k'q)^{-\frac{1}{2}}$, il faut $\beta'^6=\frac{1}{4}k(k'q)^{-\frac{1}{2}}$; cette faute est d'autant plus perfide, qu'il faut refaire un assez long calcul pour s'en apercevoir. Elle m'a induit en erreur dans mon Traité élémentaire des fonctions elliptiques, où il faut lire à la 7e ligne de la page 229 : $\alpha'^6=2bc\left(\frac{D}{\pi}\right)q^{-\frac{1}{2}}$, $\beta'^6=\frac{1}{4}q^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c$.

FORME REMARQUABLE

que peut prendre l'équation qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

—

Si les termes sont a, b, c.... k, l et la raison δ, on sait que l'on pose ordinairement :

$$b=a+\delta$$
$$c=b+\delta$$
$$d=c+\delta$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$l=k+\delta$$

puis on élève chacun de ces binômes à la $n^{ième}$ puissance, ce qui donne:

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1-2}a^{m-2}\delta^2 + \ldots + ma\delta^{m-1} + \delta^m$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots + mb\delta^{m-1} + \delta^m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^m = k^m + mk^{m-2}\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots + mk\delta^{m-1} + \delta^m.$$

En ajoutant toutes ces égalités terme à terme on trouve :

$$l^m = a^m + m\delta(s_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1-2}\delta^2(s_{m-2} - l^{m-2}) + \ldots$$
$$+ m\delta^{m-1}(s_1 - l) + \delta^m(s_0 - 1);$$

ou bien, en ordonnant

$$m\delta s_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1-2}\delta^2 s_{m-2} + \ldots\ldots + m\delta^{m-1}s_1 + \delta^m s_0 = l^m +$$
$$+ m\delta l^{m-1} + \ldots\ldots + m\delta^{m-1}l + \delta^m - a^m = (l+\delta)^m - a^m;$$

or le premier membre de l'égalité peut se mettre sous la forme

$$s_m + m\delta s_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1-2}\delta^2 s_{m-2} + \ldots\ldots + m\delta^{m-1}s_1 + \delta^m s_0 - s_m.$$

Si donc on considère les indices comme des exposants, ce premier membre peut s'écrire sous la forme symbolique :

$$(s+\delta)^m - s_m,$$

dans laquelle les exposants de s devront être regardés comme de véritables indices, et le coefficient de δ^m sera s_0, qui est évidemment égal au nombre n des termes de la progression. On pourra donc, avec ces conventions, écrire l'équation symbolique très-simple :

$$(s+\delta)^m - s_m = (l+\delta)^m - a^m,$$

et comme $l = a + (n-1)\delta$, on aura $l + \delta = a + n\delta$, et

$$(s+\delta)^m - s_m = (a+n\delta)^m - a^m.$$

S'il s'agit de la progression des nombres naturels, $a=1$, $\delta=1$, et la formule devient :

$$(s+1)^m - s_m = (1+n)^m - 1.$$

Soit fait $m=3$, la formule devient en développant :

$$3s_2 + 3s_1 + s_0 = 3n + 3n^2 + n^3;$$

mais $$s_0 = n;\quad s_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2};$$

donc $$6s_2 + 3n^2 + 3n + 2n = 6n + 6n^2 + 2n^3,$$

$$s_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$

QUESTION 147.

Trouver la développée de $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2+y^2)^2$.

PAR M. DE PERRODIL,

élève du collége de la Flèche.

Voici un calcul qui conduit au résultat indiqué.

$$a^2xdx + b^2ydy - 2(x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0$$

$$a^2dx^2 + b^2dy^2 + b^2yd^2y - 4(xdx+ydy)^2 -$$
$$- 2(x^2+y^2)(dx^2+dy^2+yd^2y) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2x - 2(x^2+y^2)x}{b^2y - 2(x^2+y^2)y} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x}{\beta y};$$

en posant, pour abréger, $$a^2 - 2(x^2+y^2) = \alpha,$$ $$b^2 - 2(x^2+y^2) = \beta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^2\beta^2(\alpha^2-4x^2) + x^2\alpha^2(\beta-4y^2) + 8x^2y^2\alpha\beta}{y^3\beta^3} =$$

$$= \frac{+\alpha\beta(a^2x^2+b^2y^2) + 4x^2y^2c^4}{y^3\beta^3}.$$

Donc $$R = \frac{(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4}.$$

Soient X et Y les coordonnées courantes du lieu, on sait qu'on a :

$$X = x + R\cos a, \quad Y = y + R\sin a;$$

$$\cos a = \frac{\alpha x}{(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin a = \frac{\beta y}{(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$X = \frac{\alpha\beta x(a^2x^2 + b^2y^2) + 4x^3y^2c^4 + \alpha x(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2)}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4},$$

$$X = \frac{4x^3y^2\beta^2 + \alpha^2x^3(c^2 + 4y^2) - 8x^3y^2\alpha\beta}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4} =$$

$$= \frac{x^3[4y^2\beta(\beta - 2\alpha) + \alpha^2(c^2 + 4y^2)]}{\alpha\beta(x^2+y^2) + 4x^2y^2c^4};$$

$$X = \frac{x^3(-4y^2\beta c^2 + 4y^2\alpha c^2 + c^2\alpha^2)}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4} = \frac{c^2x^3(\alpha^2 + 4y^2c^2)}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4};$$

$$X = \frac{c^2a^4x^3}{\alpha\beta(x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2c^4}.$$

Remplaçant α et β par leurs valeurs, le dénominateur devient :

$$(x^2+y^2)\,[(2a^2 - b^2)\,a^2x^2 + (2b^2 - a^2)\,b^2y^2].$$

On a donc les deux équations :

$$X = \frac{c^2a^4x^3}{(x^2+y^2)[(2a^2 - b^2)\,a^2x^2 + (2b^2 - a^2)\,b^2y^2]},$$

$$Y = \frac{c^2b^4y^3}{(x^2+y^2)[(2a^2 - b^2)\,a^2x^2 + (2b^2 - a^2)\,b^2y^2]},$$

la valeur de Y se déduisant de celle de X en changeant a en b, x en y, et réciproquement.

Je multiplie la première par b, la seconde par a, et je les élève à la puissance $\frac{2}{3}$; il vient alors :

$$(1)\quad b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} = \left\{\frac{c^2ab}{(x^2+y^2)[(2a^2-b^2)a^2x^2+(2b^2-a^2)b^2y^2]}\right\}^{\frac{2}{3}} a^2x^2,$$

$$a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = \left\{\frac{c^2ab}{(x^2+y^2)[(2a^2-b^2)a^2x^2+(2b^2-a^2)b^2y^2]}\right\}^{\frac{2}{3}} b^2y^2.$$

Ajoutant, et prenant la racine des deux membres, il vient :

$$(2)\ \sqrt{a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}}=\left\{\frac{c^2ab}{(x^2+y^2)[(2a^2-b^2)a^2x^2+(2b^2-a^2)b^2y^2]}\right\}^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2).$$

Si l'on avait multiplié l'équation (1) par $(2a^2-b^2)$, et la suivante par $(2b^2-a^2)$, on aurait trouvé en ajoutant :

$$(3)\qquad (2b^2-a^2)a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}+(2a^2-b^2)b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}=$$
$$=\left\{\frac{c^2ab}{(x^2+y^2)[(2a^2-b^2)a^2x^2+(2b^2-a^2)b^2y^2]}\right\}^{\frac{2}{3}}$$
$$(2a^2-b^2)a^2x^2+(2b^2-a^2)a^2y^2.$$

Enfin, si l'on multiplie l'équation (2) par l'équation (3), on trouve :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}}\left\{(2b^2-a^2)a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}+(2a^2-b^2)b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}\right\}=(a^2-b^2).ab$$

L'énoncé de cette question doit renfermer une faute d'impression. Voici le résultat indiqué :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\left\{(2b^2-a^2)a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}+(2a^2-b^2)b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}\right\}=ab(a^2-b^2).$$

Il diffère du précédent en ce que dans la parenthèse il y a :

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}},\quad b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad \text{au lieu de}\quad a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}.$$

Observation. J'ai copié l'énoncé tel qu'il m'a été adressé.

Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Résolution de quelques questions conduisant à des équations qui peuvent se ramener à celles du second degré, par un choix convenable d'inconnues auxiliaires. (t. V, p. 389.)

PAR M. HUET,
Régent de mathématiques spéciales au collége de Toulon, licencié ès sciences mathématiques.

I.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens, et la somme c des cubes des quatre termes.

En appelant x, y, z, t les quatre nombres cherchés, on a à résoudre le système de 4 équations :

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + t = a \quad (2)$$

$$y + z = b \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = c \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 = a^3$$

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = b^3$$

donc $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 3xt(x+t) + 3yz(y+z) = a^3 + b^3$;

ou en ayant égard à (1), (2), (3), (4)

$$3xt(a+b) = a^3 + b^3 - c,$$

d'où
$$xt = \frac{a^3 + b^3 - c}{3(a+b)}. \quad (5)$$

En combinant maintenant (2) et (5), on aura les valeurs de x et t; puis en combinant (3) et (5), on aura celles de y et z.

II.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens, et la somme c des quatrièmes puissances des quatre termes.

On a immédiatement les équations :

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + t = a \quad (2)$$

$$y + z = b \quad (3)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = c \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4 = a^4$$

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 = b^4$$

donc

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xt(2x^2+3xt+2t^2)+2yz(2y^2+3yz+2z^2)=a^4+b^4;$$

ou à cause de (1) et (4)

$$4xt(x^2+y^2+z^2+t^2+3xt)=a^4+b^4-c;$$

mais (2) et (3) donnent :

$$x^2+t^2=a^2-2xt,$$
$$y^2+z^2=b^2-2yz;$$

donc $$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2+b^2-4xt;$$

et par suite on a :

$$4xt(a^2+b^2-xt)=a^4+b^4-c$$

d'où $$x^2t^2-(a^2+b^2)xt+\frac{a^4+b^4-c}{4}=0,$$

équation du deuxième degré en xt, et qui donnera :

$$xt=yz=\mathrm{M} \qquad (5)$$

et $$xt=yz=\mathrm{M}' \qquad (6)$$

En combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura les valeurs de x et t.

Enfin en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura les valeurs de y et z.

III.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens, et la somme c des cinquièmes puissances des quatre termes.

On a à résoudre le système :

$$xt=yz \qquad (1)$$
$$x+t=a \qquad (2)$$
$$y+z=b \qquad (3)$$
$$x^5+y^5+z^5+t^5=c \qquad (4)$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^5+5x^4t+10x^3t^2+10x^2t^3+5xt^4+t^5=a^5$$
$$y^5+5y^4z+10y^3z^2+10y^2z^3+5yz^4+z^5=b^5$$

donc

$$x^5+y^5+z^5+t^5+5xt\,(x^3+t^3+2x^2t+2xt^2)+5yz\,(y^3+z^3+2y^2z+$$
$$+2yz^2)=a^5+b^5\,;$$

ou en ayant égard à (1) et (4)

$$5xt\,[x^3+y^3+z^3+t^3+2xt\,(x+t+y+z)]=a^5+b^5-c.$$

Mais (2) et (3) donnent :

$$x^3+3x^2t+3xt^2+t^3=a^3$$
$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=b^3\,;$$

d'où

$$x^3+y^3+z^3+t^3=a^3+b^3-3xt\,(x+t)-3yz(y+z)=a^3+b^3-$$
$$-3xt\,(a+b)\,;$$

par suite

$$5xt\,[a^3+b^3-xt\,(a+b)]=a^5+b^5-c\,;$$

d'où $$x^2t^2-\frac{a^3+b^3}{a+b}\,xt+\frac{a^5+b^5-c}{5(a+b)}=0,$$

équation du deuxième degré en xt qui donnera :

$$xt=yz=\mathrm{M} \qquad (5)$$
$$xt=yz=\mathrm{M}' \qquad (6)$$

Alors, en combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura les valeurs de x et t; et en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura celles de y et z.

IV.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme a, celle de leurs carrés b, et celle de leurs cubes c.

On a à résoudre le système :

$$xy=yz \qquad (1)$$
$$x+y+z+t=a \qquad (2)$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=b \qquad (3)$$
$$x^3+y^3+z^3+t^3=c \qquad (4)$$

Posons $x+t=x'$ (5), $y+z=y'$ (6). Il en résulte $y'+x'=a$ (7).

Les équations (5) et (6) donnent

$$x^2+t^2=x'^2-2xt$$
$$y^2+z^2=y'^2-2yz;$$

donc $\quad x^2+y^2+z^2+t^2=x'^2+y'^2-2xt-2yz,$

ou en ayant égard à (1) et (3)

$$4xt=x'^2+y'^2-b.$$

Mais (7) donne $x'^2+y'^2=a^2-2x'y'$;

donc
$$xt=\frac{a^2-b-2x'y'}{4}. \tag{8}$$

De même (5) et (6) donnent

$$x^3+t^3=x'^3-2x^2t-3xt^2,$$
$$y^3+z^3=y'^3-3y^2z-3yz^2,$$

d'où

$$x^3+y^3+z^3+t^3=x'^3+y'^3-3xt(x+t)-3yz(y+z),$$

et par suite de (1), (2), (4),

$$xt=\frac{x'^3+y'^3-c}{3a}.$$

Mais (7) donne

$$x'^3+y'^3=a^3-3x'^2y'-3x'y'^2=$$
$$=a^3-3x'y'(x'+y')=a^3-3ax'y';$$

donc

$$xt=\frac{a^3-c-3ax'y'}{3a}. \tag{9}$$

Des équations (8) et (9) on déduit

$$\frac{a^2-b-2x'y'}{4}=\frac{a^3-c-3ax'y'}{3a},$$

et par suite

$$x'y'=\frac{a^3+ab-4c}{6a}. \tag{10}$$

En combinant ensuite (7) et (10), on a les valeurs de x' et y'. La question est alors ramenée au problème I, et par suite elle est résolue.

V.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme *a* deux nombres, la somme *b* de leurs carrés, et la somme *c* de leurs quatrièmes puissances.

On a les quatre équations

$$xt = yz \qquad (1)$$

$$x + y + z + t = a \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b \qquad (3)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = c. \qquad (4)$$

Posons

$$x + t = x' \qquad (5)$$

$$y + z = y', \qquad (6)$$

il en résulte

$$x' + y' = a. \qquad (7)$$

Les équations (5) et (6) donnent, comme dans le problème IV,

$$xt = \frac{a^2 - b - 2x'y'}{4}. \qquad (8)$$

Ces mêmes équations donnent encore

$$x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4 = x'^4$$

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 = y'^4;$$

d'où

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xt(2x^2+2t^2+3xt)+2yz(2y^2+2z^2+3yz) = x'^4+y'^4$$

ou à cause de (4) et (1)

$$4xt(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xt) = x'^4 + y'^4 - c,$$

et à cause de (3)

$$4xt(b + 3xt) = x'^4 + y'^4 - c. \qquad (9)$$

Mais de l'équation (7) on tire

$$x'^4 + y'^4 = a^4 - 2x'y'(2x'^2 + 2y'^2 + 3x'y'),$$

ou à cause de

$$2(x'^2 + y'^2) = 2a^2 - 4x'y'$$

$$x'^4 + y'^4 = a^4 - 2x'y'(2a^2 - x'y');$$

par conséquent l'équation (9) devient

$$4xt(b+3xt)=a^4-2x'y'(2a^2-x'y')-c.$$

Si dans cette équation on remplace xt par sa valeur (8), on obtient une équation du deuxième degré en $x'y'$, qui donnera $x'y'=\text{M}$ (10) et $x'y'=\text{M}'$ (11).

En combinant alors (10) et (7), puis (11) et (7), on obtiendra les valeurs de x' et y'. La question est alors ramenée au problème II, et par suite elle est résolue.

VI.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme a, la somme b de leurs cubes, et la somme c de leurs quatrièmes puissances.

On a à résoudre

$$xt=yz \qquad (1)$$

$$x+y+z+t=a \qquad (2)$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3=b \qquad (3)$$

$$x^4+y^4+z^4+t^4=c. \qquad (4)$$

Posons

$$x+t=x' \qquad (5)$$

$$y+z=y', \qquad (6)$$

on en déduit

$$x'+y'=a. \qquad (7)$$

On tire de (5) et (6), comme dans le problème IV,

$$xt=\frac{a^3-b-3ax'y'}{3a}. \qquad (8)$$

On trouve d'ailleurs, comme dans le problème V,

$$4xt(x^2+y^2+z^2+t^2+3xt)=x'^4+y'^4-c; \qquad (9)$$

mais

$$x'^4+y'^4=a^4-2x'y'(2a^2-x'y'),$$

et les équations (5) et (6) donnent

$$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2-2x'y'-4tx.$$

En remplaçant ces valeurs dans (9), on a

$$4xt(a^2-2x'y'+3xt)=a^4-2x'y'(2a^2-x'y')-c.$$

Si maintenant on substitue dans cette équation la valeur de xt (8), on obtient une équation du deuxième degré en $x'y'$ qui donne $x'y'=\mathrm{M}$ (10) et $x'y'=\mathrm{M}'$ (11).

Combinant (7) et (10), puis (7) et (11), on connaîtra x' et y', et par suite la question sera ramenée à la question I ou à la question II, et par suite elle sera résolue.

VII.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme a, la somme b de leurs cubes, et la somme c de leurs cinquièmes puissances.

On a à résoudre les équations

$$xt=yz \tag{1}$$

$$x+y+z+t=a \tag{2}$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3=b \tag{3}$$

$$x^5+y^5+z^5+t^5=c. \tag{4}$$

Posons toujours

$$x+t=x' \tag{5}$$

$$y+z=y', \tag{6}$$

d'où

$$x'+y'=a, \tag{7}$$

comme dans le problème IV, on trouve

$$xt=\frac{a^3-b-3ax'y'}{3a}. \tag{8}$$

Les équations (5) et (6) donnent

$$x^5+5x^4t+10x^3t^2+10x^2t^3+5xt^4+t^5=x^5$$

$$y^5+5y^4z+10y^3z^2+10y^2z^3+5yz^4+z^5=y^5,$$

d'où

$$5xt[x^3+y^3+z^3+t^3+2xt(x+y+z+t)]=x'^5+y'^5-c,$$

ou bien à cause de (3) et (2)

$$5xt(b+2axt)=x'^5+y'^5-c; \qquad (9)$$

d'ailleurs de (7) on tire

$$x'^5+y'^5=a^5-5x'y'[x'^3+y'^3-2x'y'(x'+y')],$$

ou à cause de

$$x'^3+y'^3=a^3-3ax'y'$$
$$x'^5+y'^5=a^5-5x'y'(a^3-5ax'y').$$

Substituant cette valeur dans (9), on a

$$5xt(b+2axt)=a^5-5x'y'(a^3-5ax'y')-c.$$

Si maintenant on substitue au premier membre de cette équation la valeur de xt (8), on obtiendra une équation du deuxième degré en $x'y'$ qui donnera $x'y'=\mathrm{M}$ (10), $x'y'=\mathrm{M}'$ (11).

Alors, en combinant (7) et (10), puis (7) et (11), on aura les valeurs de x' et y', et la question sera ramenée au problème III.

VIII.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme a des extrêmes, celle b des moyens, et l'excès c de la somme des cinquièmes puissances des extrêmes sur la somme des cinquièmes puissances des moyens.

On a les équations

$$xt=yz \qquad (1)$$
$$x+t=a \qquad (2)$$
$$y+z=b \qquad (3)$$
$$x^5+t^5-y^5-z^5=c. \qquad (4)$$

On tire de (2) et (3)

$$x^5+5x^4t+10x^3t^2+10x^2t^3+5xt^4+t^5=a^5$$
$$y^5+5y^4z+10y^3z^2+10y^2z^3+5yz^4+z^5=b^5;$$

d'où

$$x^5+t^5-y^5-z^5+5xt(x^3+2x^2t+2xt^2+t^3)$$
$$-5yz(y^3+2y^2z+2yz^2+z^3)=a^5-b^5.$$

Mais on a

$$x^3+2x^2t+2xt^2+t^3=(x+t)^3-x^2t-xt^2$$

et

$$y^3+2y^2z+2yz^2+z^2=(y+z)^3-y^2z-yz^2;$$

donc à cause des équations (2), (3) et (4), on a

$$5xt(a^3-x^2t-xt^2)-5yz(b^3-y^2z-yz^2)=a^5-b^5-c,$$

ou

$$5xt[a^3-xt(x+t)]-5yz[b^3-yz(y+z)]=a^5-b^5-c,$$

ou encore, à cause de (2), (3) et (1),

$$5xt[a^3-b^3+xt(b-a)]=a^5-b^5-c,$$

équation du deuxième degré en xt qui donnera

$$xt=yz=\mathrm{M} \qquad (5)$$

et

$$xt=yz=\mathrm{M}'. \qquad (6)$$

Alors, en combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura x et t; et en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura y et z.

On trouverait de même quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme des extrêmes, celle des moyens, et l'excès de la somme de cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens, ou l'excès de la somme des quatrièmes puissances des extrêmes sur la somme des quatrièmes puissances de moyens.

Il existe un grand nombre de questions qu'on peut ramener au deuxième degré par des artifices de calcul semblables aux précédents.

RECTIFICATION D'UN ARC DE CERCLE.

PAR M. J.-G. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathémathiques.

1. Lemme. Soit ABC un triangle rectangle en C, AD la bissectrice de l'angle BAC, DE une perpendiculaire à la bissectrice AC interceptée entre cette bissectrice et l'hypoténuse AB; faisons $AB=a$, $AC=b$, $AE=a_1$ $AD=b_1$, on a

$$a_1=\frac{2ab}{a+b};\ b_1=\sqrt{a_1b}=\sqrt{\frac{2ab^2}{a+b}};\ (a+b)(a_1^2-b_1^2)=$$
$$=b_1^2(a-b);\ a_1-b_1<\frac{1}{4}(a-b).$$

Limites de l'arc du cercle.

2. Théorème (*). *Lorsqu'on mène aux extrémités d'un arc* AC (*fig.* 42), *moindre qu'une demi-circonférence, la tangente* AB *et la droite* CB *perpendiculaire à la corde, qu'on tire la bissectrice* AD *de l'angle* BHC, *et* DE *perpendiculaire sur* AD, *puis la bissectrice* AF *de l'angle* BAD, *et* FG *perpendiculaire sur* AF, *et ainsi de suite; la longueur de l'arc* AC *est comprise entre les longueurs des côtés issus du sommet* A, *dans chacun des triangles rectangles* ABC, ADE, AEG...

Par le milieu de la corde AC élevons la perpendiculaire IH; cette droite passe par le centre O et par les milieux de l'arc AHC et des lignes AD, AB; joignons KC.

On a $AK=KC$; par suite $BK=KC$; donc

$$\text{corde AC} < \text{arc AHC} < \text{tang AB}.$$

(*) Cet énoncé est extrait du *Traité de Géométrie* de Prosz, professeur à Stuttgard, page 167. Stuttgard, chez F.-H. Koehler. 1842. J. G. D.

Ensuite les angles CAD, DAB ont pour mesures respectives la moitié des arcs CH, AH; or ces angles sont égaux; donc la bissectrice AD passe par le milieu de l'arc AHC, et y est divisée en parties égales.

Cela étant, menons la droite Hh perpendiculaire sur AD; elle passe par le milieu de AD, et par suite par le milieu de AE. On prouve comme précédemment que

$$\text{corde AH} < \text{arc ALH} < \text{tang A}h.$$

Multipliant par 2, il vient

$$2\text{AH} < 2\text{ALH} < 2\text{A}h,$$

ou

$$\text{bissect AD} < \text{arc AHC} < \text{segment AE},$$

et ainsi de suite.

3. *Évaluation approchée de l'arc de cercle.*

3. Théorème. *On peut assigner une ligne droite, dont la différence avec un arc quelconque* AHC *soit moindre que toute ligne donnée.*

En effet, la différence entre AE et AD est moindre que le quart de la différence entre AB et AC (1); de même la différence entre AG et AF est moindre que le quart de celle entre AE et AD, ou moindre que $\frac{1}{16}$ de la différence entre AB et AC, etc. Donc, si l'on continue les bissections des semi-divisions successives de l'angle BAC, on pourra trouver une bissectrice, dont la différence avec le segment de AB, dont elle est la projection, soit une fraction aussi petite qu'on voudra de la différence AB—AC, ou une fraction plus petite que la grandeur de toute ligne donnée. Donc cette bissectrice et le segment correspondant de AB, qui comprennent l'arc AHC, différeront chacun de l'arc AHC d'une quantité moindre que toute ligne donnée.

4. *Remarque* I. Si l'on veut avoir la longueur de l'arc AHC à moins de $\frac{1}{10^m}$ près, et que n représente l'ordre de la bissectrice à laquelle il faut s'arrêter, ou qui satisfait à cette condition, on déterminera cette limite n de la manière suivante.

On observera d'abord que (1)

$$a_1 - b_1 < \frac{1}{4}(a - b),$$

$$a_2 - b_2 < \frac{1}{4}(a_1 - b_1),$$

$$a_3 - b_3 < \frac{1}{4}(a_2 - b_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} - b_{n-1} < \frac{1}{4}(a_{n-2} - b_{n-2}),$$

$$a_n - b_n < \frac{1}{4}(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

Multipliant toutes ces inégalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'inégalité résultante, on trouve

$$a_n - b_n < \frac{1}{4^n}\ a - b.$$

Or l'arc AHC est compris entre a_n et b_n (3) ; donc sa différence avec chacune de ces deux lignes sera inférieure à $\frac{1}{10^m}$, si l'on a

$$a_n - b_n \overset{=}{<} \frac{1}{10^m},$$

ce qui aura lieu *à fortiori*, si

$$\frac{1}{4^n}(a - b) \overset{=}{<} \frac{1}{10^m}.$$

On en déduit, en prenant les logarithmes,

$$m+\log(a-b) \overset{=}{<} n\log 4\,;$$

par suite

$$n \overset{=}{>} \frac{m+\log(a-b)}{\log 4}\,;$$

c'est la valeur de la limite cherchée (*).

5. *Remarque* II. Les valeurs de a_1 et b_1, a_2 et b_2... se déterminent à l'aide des formules $a_1=\frac{2ab}{a+b}$, $b_1=\sqrt{a_1 b}$. On peut simplifier le calcul en transformant ces formules en deux autres, dont l'emploi est plus facile. A cet effet, on posera

$$a=\frac{1}{c}\,,\; b=\frac{1}{d},\quad a_1=\frac{1}{c_1},\; b_1=\frac{1}{d_1}.$$

La substitution de ces valeurs inverses dans les relations du § 1er les change dans les suivantes :

$$c_1=\frac{1}{2}(c+d),\; d_1=\sqrt{c_1 d}. \qquad (f')$$

A l'aide de ces formules on calcule les valeurs de c_1 et d_1, puis celles de c_2 et d_2..., jusqu'à celles de c_n et d_n ; les inverses de c_n et d_n seront a_n et b_n.

L'inspection des formules fait voir que *la valeur inverse de l'arc* AHC *a pour limite une suite de nombres, dont les deux premiers sont les inverses de* AE *et* AD, *et dont les suivants sont alternativement moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui les précèdent* (**).

6. Corollaire. *La différence de* d_1-c_1 *est* aussi *moindre que le quart de la différence* $d-c$.

(*) Voir tome IV de ces Annales, page 159. J.-G. D.

(**) C'est la méthode d'Archimède. Voir Nouvelles Annales, t. III, p. 588. Tm.

Car, puisque la moyenne différentielle $\frac{1}{2}(c_1+d_1) > \sqrt{c_1 d} = d_1$,
on peut poser

$$d_1 < \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}d,$$

ou, en retranchant c_1 de part et d'autre,

$$d_1 - c_1 < \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c_1\,;$$

mettant à la place de $\frac{1}{2}c_1$ sa valeur $\frac{1}{4}(c+d)$, il vient

$$d_1 - c_1 < \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d, \text{ ou } d_1 - c_1 < \frac{1}{4}(d-c).$$

Rapport de la circonférence au diamètre.

7. Théorème. *Lorsque l'arc* AHC (*fig.* 42) *est une partie aliquote de la circonférence, les droites* AC, AB *sont les côtés de polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit; et les droites* AD, AE *sont le double des côtés des polygones semblables inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.*

En effet, si l'arc AHC est la n^e partie de la circonférence, l'arc AH en sera la $2n^e$ partie; les cordes AC, AH seront les côtés des polygones réguliers inscrits de n et $2n$ côtés; et les tangentes AK, AM seront les demi-côtés des polygones réguliers circonscrits de n et $2n$ côtés. On peut donc écrire, d'après une notation facile à saisir,

$$\text{AB} = c_n = \frac{1}{n}p_n,\quad \text{AK} = \frac{1}{2}\text{C}_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\text{P}_n,$$

$$\text{AH} = c_{2n} = \frac{1}{2n}p_{2n},\quad \text{AM} = \frac{1}{2}\text{C}_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\text{P}_{2n}.$$

Or $\quad$ AK = KB, AH = HD, AM = Mh = Ah = hE.

Donc

$$\left.\begin{aligned} b &= AC = c_n = \frac{1}{n}p_n, \\ a &= AB = C_n = \frac{1}{n}P_n, \\ b_1 &= AD = 2c_{2n} = \frac{1}{n}p_{2n}, \\ a_1 &= AE = 2C_{2n} = \frac{1}{n}P_{2n}. \end{aligned}\right\} [A]$$

8. **Problème I.** *Exprimer les valeurs des périmètres des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit de* 2n *côtés en fonction des valeurs des périmètres des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit de* n *côtés.*

Si l'on substitue les valeurs [A] dans les formules (1), on trouvera les relations

$$P_{2n} = \frac{2P_n \cdot p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n}\, p_n}, \quad [F]$$

qui mèneront aux valeurs cherchées.

9. *Corollaire.* Les formules (F), ou la substitution des valeurs [A] dans l'inégalité $a_1 - b_1 < \frac{1}{4}(a-b)$, feront facilement trouver que la différence

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{4}(P_n - p_n).$$

10. *Remarque.* Si l'on substitue dans les relations (F), à la place de P_{2n}, p_{2n}, P_n, p_n, leurs valeurs inverses Q_{2n}, q_{2n}, Q_n, q_n, on trouvera les formules plus simples

$$Q_{2n} = \frac{1}{2}(Q_n + q_n), \quad q_{2n} = \sqrt{Q_{2n} \cdot q_n}, \quad [F']$$

qui conduiront plus facilement au même but.

Ces formules donneront, comme celles de nº 6,

$$q_{2n} - Q_{2n} < \frac{1}{4}(q_n - Q_n).$$

11. PROBLÈME II. *Calculer la valeur approchée de la circonférence au diamètre.*

Voir Géométrie de M. Cirodde, 2me édit., p. 174.
Géométrie de M. Lionnet, 3me édit., p. 162.
Géométrie de M. Finck, 3me édit., p. 97 et suiv.
Géométrie de M. Catalan, p. 133 et 145.

FORMATION

des nombres premiers les uns par les autres, d'après M. le professeur Scherk (Crelle, X, p. 201, 1833).

—

Soit la suite naturelle des nombres premiers, l'unité omise,

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\ \ldots\ldots p_n.$$

p_n désignant le $n^{ème}$ terme de cette suite, on a :

pour n impair, $p_n = 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots\ldots - p_{n-2} + 2p_{n-1}$;
pour n pair, $p_n = 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots\ldots + p_{n-2} + p_{n-1}$.

Ainsi, tous les nombres premiers qui précèdent p se trouvent dans p_n, l'unité toujours avec le signe $+$ ainsi que le dernier, qui est $+$ pris deux fois lorsque n est impair, et une fois lorsque n est pair ; quant aux signes, on peut toujours faire que les derniers termes soient positifs pour n pair, et ensuite un même nombre de termes positifs et négatifs pour les autres ; et quand n est impair, on peut faire que l'avant-dernier terme soit négatif, et ensuite autant de termes positifs que négatifs.

Exemples :

$$2 = +2,$$
$$3 = +1 + 2,$$
$$5 = +1 - 2 + 2.3;$$

$$7 = +1 - 2 + 3 + 5,$$
$$11 = +1 - 2 + 3 - 5 + 2.7,$$
$$13 = +1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11,$$
$$17 = +1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2.13.$$

Cette loi de formation n'est fondée que sur l'*observation*, et a été vérifiée jusqu'au nombre premier 499.

Il est d'ailleurs facile de voir que cette loi des nombres premiers de rang pair ne saurait appartenir aux nombres premiers de rang impair ; car un nombre premier de rang pair est précédé de nombre impair de nombres premiers, parmi lesquels est le nombre 2. De quelque manière qu'on les combine pour addition et soustraction, on aura toujours un résultat pair. Donc, etc.

GRAND CONCOURS DE 1847. (*Voir* t. V, p. 447.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques spéciales.

Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle ABC, dont les sommets A, B, C sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle, on mène au cercle les tangentes Aa, Bb, Cc, qui rencontrent respectivement en a, b, c, les côtés opposés à ces sommets. On demande de prouver que ces trois points a, b, c sont en ligne droite. On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle inscrit, on prend une section conique quelconque tangente aux trois côtés du triangle PQR (*).

(*) Au moment de mettre sous presse, nous recevons une lettre de M. le professeur J. A. Serret, où se trouve une solution très-simple de ce problème. Nous en enrichirons le prochain numéro des Annales.

Mathématiques élémentaires.

Soit donné dans un cercle une corde KK′ et le diamètre DD′ perpendiculaire à cette corde ;

D'un point O de la circonférence, on mène deux lignes aux extrémités du diamètre et deux lignes aux extrémités de la corde ;

Il s'agit de prouver que la somme des projections des deux premières lignes sur l'une OK des deux autres, est égale à cette même ligne OK, et que la différence des mêmes projections est égale à l'autre ligne OK′, c'est-à-dire que d et d' étant les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités du diamètre sur la droite OK ; on a

$$Od + Od' = OK$$

et

$$Od - Od' = OK'.$$

SUR L'ÉLIMINATION

par les fonctions symétriques, d'après M. Liouville. (Journal de mathématiques, t. XII, p. 68, 1847.)

—

1. Euler, car on revient toujours à ce nom-là, a fondé l'élimination sur la *communauté* de racines entre deux équations ; c'est ce qui a donné naissance au procédé du *plus grand commun diviseur.* Au moyen des équations qui précèdent l'équation finale, ce procédé fait connaître les groupes de valeurs qui satisfont aux équations données, ce qu'on ne pouvait obtenir jusqu'aujourd'hui par la méthode des fonctions symétriques. Toutefois cet avantage de la méthode des *divisions* est racheté par de graves inconvénients. D'abord la longueur de calculs pénibles à exécuter, et qu'il faut recommencer pour chaque exemple ; on a ensuite l'embarras des solutions étrangères, que Bret, il est vrai, nous

a appris à écarter, mais qui donnent encore lieu à des discussions épineuses, comme nous le voyons dans un mémoire publié récemment sur cette discussion, et dont l'analyse, hérisée de formidables formules, ne semblerait pas proportionnée à l'importance de l'objet, si le savant auteur n'avait eu en vue d'autres conséquences. Par contre, l'équation finale s'obtient, dans la seconde méthode, sans calcul pour ainsi dire, par une simple *transcription*, puisque Warring a donné les formules pour écrire immédiatement toute fonction symétrique des racines en fonctions des coefficients. Bien plus, Vandermonde a calculé et réduit en tables toutes ces fonctions, depuis la puissance de 2 jusqu'à la puissance de 10, ce qui dépasse de beaucoup tous les besoins de la pratique. Nous nous proposons de reproduire dans notre recueil ces tables d'une extrême utilité dans l'analyse appliquée; elles permettent, sans avoir besoin d'effectuer l'élimination, de connaître le degré d'un lieu géométrique. Il était donc à désirer qu'on pût, au moyen de l'équation finale relative à une inconnue, calculer les valeurs correspondantes de la seconde inconnue. C'est ce nouveau service que M. Liouville vient de rendre à la science, en se servant d'un moyen ingénieux imaginé par Poisson.

2. Soient $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, (1) deux équations algébriques à deux inconnues. On suppose qu'il n'y a pas de solutions infinies, qu'on peut d'ailleurs trouver directement, Posons $x=t-\alpha y$, t et x étant deux nouvelles inconnues. Substituant cette valeur de x dans les équations (1), on a deux équations entre les trois inconnues y, t, α, et éliminant y, on obtient une équation entre t et α, que l'on peut concevoir ordonnée suivant les puissances de α; de sorte qu'on aura $\psi(t,\alpha)=\psi t+\alpha\psi_1 t+\alpha^2\psi_2 t+\alpha^3\psi_3 t+ - - =0$; $\psi_1 t, \psi_2 t$ sont des fonctions connues de t. Prenant les dérivées par rapport à α, on a

$$\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{dx}=0\,;$$

d'où

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{d\psi}{dx}:\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\psi_1 t+2\alpha\psi_2 t+3\alpha^2\psi_3 t+---}{\psi' t+\alpha\psi_1' t+3\alpha^2\psi_3' t-}. \quad (2)$$

ψ_1', etc., indiquent les dérivées de ψ, ψ_1, pris par rapport à t.

Faisant $\alpha=0$, on a généralement parlant $t=x$; donc $\psi(x)=0$ n'est autre chose que l'équation qu'on obtiendrait en éliminant y entre les équations (1). Soient x_1 une des racines de cette équation, et y_1 la valeur correspondante de y_1, on a donc $x_1=t-\alpha y_1$; et pour ces valeurs $\dfrac{dt}{dx}=y_1$, quelle que soit la valeur de α. Faisant donc $\alpha=0$, l'équation (2) donne :

$$y_1=-\frac{\psi_1(x_1)}{\psi'(x_1)};$$

or $\psi_1(x)$ et $\psi'(x)$ sont des fonctions connues ; donc cette valeur de x fait connaître celle de y, et ainsi des autres.

Observation. On voit donc que dans $\psi(t,\alpha)$ il n'est besoin de calculer que les deux premiers termes ψt et $\alpha\psi_1 t$.

3. Si l'équation $\psi(x)=0$ a deux racines égales à x, alors $\psi'(x_1)=0$, et comme y n'est pas infini, il faut donc que l'on ait aussi $\psi_1(x_1)=0$; pour avoir la valeur de y, passons à la dérivée seconde de l'équation prise par rapport à α de $\psi(x,t)=0$, on a :

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}+\frac{2d^2\psi}{d\alpha dt}\frac{dt}{dx}+\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}=0, \text{ faisant } \alpha=0\,;$$

alors

$$\frac{dt}{d\alpha}=y_1;\ \frac{d^2t}{dx^2}=0\,;$$

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}=2\psi_2(x_1);\ \frac{d^2\psi}{d\alpha dt}=\psi_1'(x_1);\ \frac{d^2\psi}{dt^2}=\psi''(x_1).$$

Donc $2\psi_2(x_1) + 2\psi_1'(x_1)y_1 + \psi''(x_1)y_1^2 = 0$; x_1 entre donc dans deux groupes avec deux valeurs généralement différentes de y. Si $\psi(x) = 0$ a trois racines égales à x_1, on a recours à la dérivée troisième, et ainsi de suite.

4. Soient maintenant trois équations à trois inconnues :

$f(x,y,z)=0, F(x,y,z)=0, \varphi(x,y,z)=0$; faisons $x = t - \alpha y - \beta z$. α, β et t étant trois quantités arbitraires; éliminant x, y, z entre les quatre équations, et ordonnant l'équation résultante par rapport à α et β, on a :

$$\begin{aligned}\psi(t,\alpha,\beta) = \psi t + \alpha\psi_1 t + \alpha^2\psi_3 t + -&\\ \beta\psi_2 t + \alpha\beta\psi_4 t&\\ \beta^2\psi_5 t;&\end{aligned}$$

de plus

$$\frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = 0;\ \frac{d\psi}{d\beta} + \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{d\beta} = 0;\ \frac{dt}{d\alpha} = y;\ \frac{dt}{d\beta} = z;$$

et faisant $\alpha = \beta = 0$, $t = x$ et $\psi t = \psi(x)$; alors

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \psi_1 x;\ \frac{d\psi}{d\beta} = \psi_2(x);$$

donc

$$\psi_1(x) + \frac{d\psi}{dx}y = 0;\ \psi_2(x) + \frac{d\psi}{dx}z = 0;$$

ainsi y et z sont connues dès qu'on connaîtra x.

Observation. Il suffit donc de calculer les trois premiers termes de $\psi(t,\alpha,\beta)$.

5. On pouvait aussi poser $x = t - \alpha y - \alpha^2 z$; éliminant x, y, z, on obtient une équation à deux inconnues t, α; et raisonnant de la même manière, on voit qu'il faut aussi calculer les termes en α^2.

6. Lorsque l'équation finale en x ayant des racines égales, il y correspond des valeurs égales de y, alors les deux courbes représentées par les équations données ont pour point d'in-

tersection un point de contact, d'un ordre indiqué par la multiplicité des racines; si les valeurs de y sont inégales, alors la parallèle à l'axe de x est au point d'intersection tangente à l'une de ces courbes seulement, et selon la multiplication des racines, ce point est aussi d'inflexion visible ou invisible.

7. La méthode des fonctions symétriques fournit l'équation finale, mais pas *immédiatement* ordonnée suivant les puissances de l'inconnue; tandis que la méthode d'Euler donne de prime abord l'équation ordonnée; avantage précieux dans les questions où il s'agit seulement de connaître certains coefficients de l'équation finale ordonnée. *L'équation somme* de Bezout jouit aussi de cet avantage, et encore d'un autre dont les deux précédentes méthodes sont complétement privées; elle s'applique à toute espèce de solutions infinies, et donne l'équation de condition qui entraîne un abaissement de degré dans l'équation finale, relative à une des inconnues, sans que cet abaissement ait lieu pour l'autre inconnue. Dans les procédés d'Euler et de Waring, le coefficient du terme le plus élevé est le même pour chacune des équations finales, soit en x, soit en y. Ce coefficient égalé à zéro est la condition pour que les deux équations s'abaissent *simultanément* d'une unité; mais si l'on veut que l'une s'abaisse sans l'autre, aucun des deux procédés n'en fournit le moyen, tandis que le procédé Bezout a un *facteur* spécial qui satisfait à cette condition. Voici comme s'exprime à ce sujet l'illustre analyste : « Si c'est donc une perfection dans une méthode d'élimination, de ne point donner de facteur qui accroisse le » degré général, il faut convenir que ce n'est pas la seule » qui soit à désirer pour les besoins, et même pour la certi- » tude de l'analyse. Il ne faut pas toujours se proposer d'é- » viter les facteurs que l'analyse présente : quand l'analyse » est appliquée comme il convient à une question, elle ne

» donne rien qui n'ait quelque rapport à la question. Si, » outre l'objet qu'on a particulièrement en vue, elle donne » certains facteurs que l'on ne prévoyait pas, ces facteurs » énoncent quelque chose de relatif à la question. En les » omettant, en les prévenant, on court le risque d'omettre » des connaissances utiles à la question, et même d'admettre » des conséquences qu'elle rejette. C'est ainsi que nous » verrons que faute de connaître le facteur qui est le symp- » tôme de la dépression de l'équation finale, on serait exposé » à admettre des racines qui n'appartiennent nullement aux » équations proposées.

» Ce n'est donc un vice dans une méthode d'élimination, » de donner des facteurs à l'équation finale, que lorsque ces » facteurs n'ont aucun rapport à la question. Mais c'en serait » un dans l'analyse de ne pas faire connaître tout ce qui peut » appartenir à la question. » (*Théorie générale des équations*, p. 224).

Ces judicieuses réflexions auraient dû faire accorder la préférence à la méthode du célèbre examinateur (*), la plus *analytique* qu'on ait présentée; elle obtiendrait cette préférence, si l'on pouvait la délivrer des longueurs dont elle est embarrassée, et qui rendent si pénible la lecture de la *théorie générale*; ouvrage qui est encore resté aujourd'hui le plus complet, le plus satisfaisant sur la matière, et dont on ne saurait trop recommander l'étude aux jeunes professeurs qui cultivent la science pour elle-même.

Ceci nous rappelle le distique de Schiller, *Die Wissenschaft*:

Einem ist sie die hohe, himmlische Göttinn, Dem Andern,
Eine tüchtige Kuhe, die ihn mit Butter versorgt.

(*) On voit son tombeau dans l'église du village d'Avon, qui est au bout du parc de Fontainebleau. Il repose à côté de Daubenton et de Monaldeschi.

Voici une première traduction que nous devons à M. le colonel d'artillerie de Bressolles :

Pour l'adepte qui la révère
La science est du ciel un lumineux reflet;
Quand pour le sectateur vulgaire
Elle n'est qu'une vache à lait.

Et une seconde, aussi en quatrain, du même :

Au seuil du temple auguste où trône la science
Deux flots de pèlerins se pressent tour à tour,
Ceux-ci pour s'imprégner de sa divine essence,
Ceux-là pour demander le pain de chaque jour.

Et enfin une troisième en distique, par M. le colonel d'artillerie Nancy.

La science :
Pour l'un c'est de Dieu même un sublime reflet,
C'est pour l'autre une vache à lait.

Nous citons ces traductions, pour montrer qu'on sait encore faire des vers français en France.

NOTE

sur la question proposée au concours général. Spéciales, **1847.**

PAR J. A. SERRET.

Extrait d'une lettre à M. Terquem.

Un triangle PQR *étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle* ABC *dont les sommets* A, B, C *soient les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle on mène au cercle les tangentes* Aa, Bb, Cc *qui rencontrent en* a, b, c *les côtés opposés à ces sommets; on demande de prouver que ces trois points* a, b, c *sont en ligne droite. On verra si le théorème a également lieu lorsqu'à la place du*

cercle inscrit on prend une section conique tangente aux trois côtés du triangle **PQR.**

Lemme. Soient (*fig.* 48) O le point où le côté RQ touche la circonférence, et H celui où la tangente Aa coupe le côté PQ, les triangles semblables BHa et ACa donnent la proportion :

$$\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AC}},$$

ou en désignant par a, b, c les côtés du triangle PQR qui ont respectivement pour milieux les points A, B, C, et par $\frac{a}{2}$, b' et c' ceux du triangle AQH,

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a}=\frac{2b'-b}{b}.$$

Cela posé, les deux triangles PQR et HQA étant circonscrits au même cercle sont entre eux comme leurs périmètres ; ils ont d'ailleurs l'angle Q commun ; ils sont donc entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle, c'est-à-dire :: $ab : \frac{a}{2}b'$, d'où il suit que l'on aura :

$$(2)\qquad \frac{a+2b'+2c'}{a+b+c}=\frac{b'}{b}.$$

En second lieu, QO s'exprime aisément, comme on sait, à l'aide des côtés de chacun des deux triangles PQR, HQA circonscrits au cercle ; en égalant ces deux valeurs de QO, on a :

$$2\mathrm{QO}=a+b-c=\frac{a}{2}+b'-c',$$

d'où

$$(3)\qquad 2c'=2b'+2c-2b-a\ ;$$

portant cette valeur de $2c'$ dans l'égalité (2), on aura la valeur de b', savoir :

$$b'=\frac{2b(c-b)}{a+c-3b};$$

enfin l'égalité (1) donnera :

$$\frac{Ba}{Ca}=\frac{3c-a-b}{a+c-3b}. \tag{4}$$

1[re] *remarque.* Il pourrait arriver que le point a ne tombât pas entre les points B et C ; dans ce cas, il faudra changer le signe du second membre de l'équation (1) ; en outre, on devra changer le signe de c' dans les équations (2) et (3), ce qui n'occasionnera en définitive que le changement de signe du second membre de l'équation (4) ; d'où il suit que le rapport $\frac{Ba}{Ca}$ est toujours égal à la valeur absolue de $\frac{a+b-3c}{a+c-3b}$.

2[e] *remarque.* Les mêmes choses subsisteraient si on remplaçait le cercle inscrit par l'un des cercles exinscrits; il suffirait en effet de changer le signe des nombres qui représentent les côtés dont les *prolongements* touchent la circonférence.

Démonstration du théorème.

Les trois rapports $\frac{Ba}{Ca}$, $\frac{Cb}{Ab}$, $\frac{Ac}{Bc}$ étant les valeurs absolues des fractions

$$\frac{a+b-3c}{a+c-3b},\quad \frac{b+c-3a}{a+b-3c},\quad \frac{a+c-3b}{b+c-3a},$$

dont le produit est l'unité, on aura :

$$Ba\,.\,Cb\,.\,Ac=Ca\,.\,Ab\,.\,Bc.$$

D'ailleurs les points a, b, c sont respectivement sur les côtés du triangle ABC, et les droites Aa, Bb, Cc ne peuvent jamais se couper en un même point, puisque alors on pourrait mener par ce point trois tangentes au cercle ; donc, par un théorème connu, les trois points a, b, c sont en ligne droite.

Remarque. D'après l'une des remarques précédentes, la conclusion sera la même, si l'on substitue au cercle inscrit l'un quelconque des trois cercles exinscrits au triangle.

Extension du théorème aux coniques.

Si l'on substitue au cercle une conique quelconque, le théorème subsistera. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse ; on la placera sur un cylindre droit à base circulaire convenablement choisi ; le triangle PQR se projettera sur le plan de la base du cylindre suivant un triangle P'Q'R' circonscrit au cercle de base, et dont les côtés auront pour milieux les projections A,B,C' des points A, B, C; les projections a', b', c' des points a, b, c seront en ligne droite; donc les points a, b, c le seront aussi.

Le théorème sera également vrai pour une parabole, puisque celle-ci peut être considérée comme limite d'une série d'ellipses.

Enfin, des considérations fort simples l'étendent, comme on va voir, à l'hyperbole. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, son équation sera

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1.$$

L'équation de la droite ab devra être satisfaite par les coordonnées du point c, et cela identiquement, en sorte que cette identité ne sera pas troublée si l'on remplace partout q par $q\sqrt{-1}$; d'où il suit clairement que le théorème subsistera pour l'hyperbole.

Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible d'une autre extension. Il a encore lieu, en effet, si l'on prend pour A,B,C, non plus les milieux des côtés du triangle PQR, mais trois points quelconques sur les côtés, tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés se coupent en un même point.

Soient donc PQR un triangle dont les côtés touchent une conique quelconque, et A,B,C trois points pris sur ces côtés et tels que les droites PA, RB, QC se coupent en un même point; soient aussi a,b,c, les points où les tangentes respectivement menées à la conique par les sommets du triangle ABC rencontrent les côtés opposés.

Joignons les différents points de cette figure à un point quelconque pris hors de son plan, et coupons les rayons ainsi obtenus par un certain plan; on aura sur ce plan une projection de la figure primitive, et si l'on représente la projection d'un point par la lettre accentuée qui désigne ce point, on verra aisément que les droites P'A', R'B', Q'C' se couperont en un même point. Or on peut faire en sorte que deux des trois points A'B'C' soient les milieux des côtés du triangle P'Q'R' sur lesquels ils se trouvent; donc il en sera de même du troisième. Il suit de là que d'après ce qui a été démontré plus haut, les points a',b',c' seront en ligne droite, donc les points a,b,c le seront également.

DIVISEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ.

PAR M. ABEL TRANSON.

—

L'objet de cette note est de faciliter la pratique de la méthode exposée par feu M. Durville (*Nouv. Ann.*, t. IV, p. 329).

I. Soit $F(x) = 0$ l'équation proposée. Si on divise $F(x)$ par $x^2 + px - q$, on aura l'identité

$$F(x) = (x^2 + px - q)\,Q + Mx + N\,,$$

dans laquelle M et N sont des fonctions rationnelles et entières de p et q.

Pour que $x^2 + px - q$ soit diviseur de $F(x)$, on doit avoir $M = 0$, $N = 0$, équations en p et q dont les finales seront du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, si m est le degré de $F(x) = 0$. Mais, eu égard à la recherche des diviseurs commensurables, on peut éviter l'élimination. En effet, premièrement le nombre q ne pouvant être que l'un des diviseurs du terme tout connu de $F(x) = 0$, puisqu'on réduit la recherche actuelle au cas des *diviseurs entiers*, il ne reste qu'à associer à un tel nombre q quelque détermination convenable du nombre p. Imaginons donc que les deux équations $M = 0$ et $N = 0$ aient été ordonnées par rapport à p ; de plus, représentons par G et H les parties indépendantes de cette lettre d'ordre, dans M et N respectivement. G et H sont des polynômes entiers en q, et le caractère d'une valeur de q appartenant à un diviseur commensurable et entier, $x^2 + px - q$, c'est que, substituée dans les polynômes G et H, elle donne pour résultat deux nombres g et h ayant, parmi leurs communs diviseurs, la valeur correspondante de p. C'est sur cette remarque ingénieuse qu'est fondée la méthode de M. Durville.

II. La première observation propre à faciliter cette méthode, c'est que les polynômes G et H peuvent à leur tour être formés presque sans calcul. C'est à eux, en effet, que se réduisent respectivement M et N, dans la supposition de $p = 0$; or l'identité

$$F(x) = (x^2 + px - q)\,Q + Mx + N$$

devient, dans cette même supposition :

$$F(x) = (x^2 - q)\,Q_1 + Gx + H.$$

Et alors on voit que G est l'ensemble des termes qui contiennent $\sqrt{q}$ dans $F(\sqrt{q})$; H est en même temps l'ensemble des termes rationnels.

Pour fixer les idées, je suppose que le degré de $F(x)$ soit impair, de la forme $2n+1$; on modifiera aisément les résultats pour la forme paire.

Soit donc l'équation proposée

$$F(x) = A_0 x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} + \ldots\ldots A_{2n} x + A_{2n+1} = 0.$$

On posera immédiatement :

$$G = A_0 q^n + A_2 q^{n-1} + A_4 q^{n-2} + \ldots\ldots + A_{2n},$$
$$H = A_1 q^n + A_3 q^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2n+1}.$$

Et c'est dans ces deux polynômes qu'on devra substituer pour q un diviseur quelconque de A_{2n+1}, positif ou négatif. Mais, comme après une telle substitution, le nombre q devient nécessairement diviseur de H, s'il arrive que ce même nombre q ait un diviseur commun avec A_{2n}, ce diviseur commun devra être essayé (dans le sens positif ou négatif) pour valeur de p. C'est pourquoi, dans la recherche actuelle, on devra, avant tout, *déterminer le plus grand commun diviseur des deux derniers coefficients* A_{2n} *et* A_{2n+1}. *Soit* D *ce plus grand commun diviseur. Avec* q *diviseur de* A_{2n+1}, *on essayera pour* p *tout diviseur commun à* D *et* q.

Ces premiers essais accomplis, et en supposant l'équation débarrassée de tout diviseur du second degré correspondant, on pourra sans inconvénient considérer les valeurs g et h que prennent pour un même nombre q les polynômes G et $\frac{H}{q}$.

III. Soit donc p un commun diviseur de g et h. Il y a, dans l'essai des nombres p et q, indépendamment des caractères d'exclusion qu'on tire des deux conditions :

$$\frac{F(1)}{1+p-q} = (\textit{entier})\,; \quad \frac{F(-1)}{1-p-q} = (\textit{entier})\,;$$

il y a, dis-je, une précaution à observer qui procurera souvent une grande simplification dans le calcul. C'est qu'il ne faudra entreprendre la division de $F(x)$ par x^2+px-q, qu'après avoir ordonné le dividende et le diviseur *suivant les puissances croissantes de* x, comme déjà MM. Thibault (*Nouv. Annales*, II, 517) et Finck (*Traité d'Algèbre*, 2e édit.) le pratiquent pour la recherche des diviseurs rationnels et entiers du premier degré. On aura ainsi l'avantage d'être souvent averti de l'impossibilité d'un diviseur, bien avant d'avoir poussé la division jusqu'au dernier terme du quotient.

On peut d'ailleurs obtenir un nouveau caractère d'exclusion comme il suit. Si M et N ont été ordonnées par rapport à la lettre q; soient I et L les parties indépendantes de la lettre d'ordre, respectivement dans M et N. Toute valeur convenable de p étant substituée dans I et L donnera deux résultats i et l, multiples de la valeur correspondante du nombre q. Or I et L résultent dans M et N de la supposition $q=0$; et l'identité

$$F(x)=(x^2+px-q)Q+Mx+N$$

donne, dans cette supposition :

$$F(x)=(x^2+px)Q_2+Ix+L;$$

d'après quoi on voit aisément que l est le même que $F(0)$ ou A_{2n+1}; de plus, on a $-ip+l=F(-p)$; d'où résulte :

$$i=A_0p^{2n-1}-A_1p^{2n-2}+\ldots\ldots-A_{2n}.$$

Or il est clair que A_{2n+1} est multiple de q; mais la condition

$$A_0p^{2n}-A_1p^{2n-1}+\ldots\ldots-A_{2n}=m(q)$$

donnera pour p un caractère utile.

Enfin, on pourra encore s'aider des remarques suivantes qui ne sont, à vrai dire, qu'une application aux diviseurs du second degré x^2+px-q des moyens proposés par M. Durville pour ceux de degré supérieur.

IV. La question étant réduite à trouver les diviseurs communs qu'acquièrent les polynômes G et H, lorsqu'on y substitue certains nombres à la lettre d'ordre q, il sera aisé de remplacer dans cette recherche le système [G, H] par des systèmes plus simples ; et cela à l'aide d'un calcul analogue à celui de l'élimination par la méthode du plus grand commun diviseur.

Observez premièrement, d'après la valeur ci-dessus des polynômes G et H, que leurs coefficients ne sauraient avoir un diviseur commun.

Mais les coefficients de G pourraient admettre un commun diviseur g ; et ceux de H un autre commun diviseur h, et alors on pourra substituer au système proposé les trois systèmes suivants :

$$1^\circ \quad g \text{ avec } \frac{H}{h};$$

$$2^\circ \quad h \text{ avec } \frac{G}{g};$$

$$3^\circ \quad \frac{G}{g} \text{ avec } \frac{H}{h}.$$

Et d'abord, un système tel que g avec $\frac{H}{h}$, ou bien h avec $\frac{G}{g}$, sera bien facile à résoudre ; car, pour le premier, par exemple, on substituera toutes les valeurs de q dans $\frac{H}{h}$, et on reconnaîtra à chaque fois les diviseurs que le résultat acquiert en commun avec g ; ainsi on n'aura à faire de substitution *que dans un seul polynôme.* Et c'est à cela que nous ramènerons le calcul pour le troisième système, que nous représenterons encore par [G, H] ; mais en supposant qu'aucun des deux polynômes G et H n'admette un facteur numérique.

Soit divisé G par H, et le résultat de la division représenté par
$$aG=HQ+R_1r_1,$$
a est le plus petit nombre par lequel il a fallu multiplier G pour obtenir un quotient et un reste entiers ; r_1 est le facteur numérique commun à tous les termes du reste.

Dès lors on prouvera aisément que a et r_1 sont premiers entre eux, et que G et H ne peuvent acquérir par la substitution d'une valeur de q aucun autre facteur commun que ceux qui seront acquis en même temps aux systèmes
$$[H, r_1] \text{ et } [H, R_1].$$
On divisera H par R_1, et en appliquant ici le beau théorème de Labatie, on remplacera de nouveau le système de $[H, R_1]$ par deux autres plus simples :
$$[R_1, r_2] \text{ et } [R_1, R_2],$$
et ainsi de suite.

V. *Application.* Soit l'équation
$$x^4-6x^3+19x^2-30x+24=0,$$
donnée en exemple par M. Finck (p. 358 du *Traité d'Algèbre*, 2e édition). On a ici :
$$G=-6q-30, \quad H=q^2+19q+24.$$

Ce système, en adoptant une notation déjà admise dans la théorie de l'élimination, sera remplacé par le suivant :
$$[H, 6]+[q+5, 46],$$
ou même par
$$[H, 6]+[q+5, 2],$$
puisque aucun diviseur de 24, substitué à q dans $q+5$, ne peut lui faire acquérir le diviseur premier 23.

Étudions donc premièrement le système $[q+5, 2]$, lequel n'admet évidemment pour q que des nombres impairs.

Et comme on suppose qu'on ait préalablement essayé les diviseurs dans lesquels p et q sont ± 1, on voit que q ne peut avoir ici que les valeurs ± 3, avec lesquelles on pourra essayer $p=\pm 2$.

Examinons donc les quatre formes :

$$x^2+2x+3\,;$$
$$x^2+2x-3\,;$$
$$x^2-2x+3\,;$$
$$x^2-2x-3\,;$$

or les valeurs $f(1)=8$ et $f(-1)=80$ font exclure immédiatement la première et la troisième.

J'essaye ensuite par la division les seconde et troisième, en ordonnant selon les puissances croissantes, et l'impossibilité se manifeste dès les seconds termes des quotients.

Dès lors les essais doivent se porter sur le système

$$[q^2+19\,q+24,\ 6],$$

et comme 6 est diviseur de 24, on doit essayer premièrement, avec chaque valeur de q multiple de 6, les valeurs de p qui en sont diviseurs. Pour commencer par les formes les plus simples, $q=\pm 6$ avec $p=\pm 1$; elles se trouveront exclues immédiatement par la simple considération de $f(+1)$ et $f(-1)$.

On passera donc à $q=\pm 6$ avec $p=\pm 3$, d'où les formes

$$x^2+3x+6$$
$$x^2+3x-6$$
$$x^2-3x+6$$
$$x^2-3x-6.$$

La première s'exclut par la même considération de $f(1)$ ou $f(-1)$; la seconde ne permet pas de pousser la division au delà du second terme, et la troisième réussit.

PROBLÈME SUR LES POLAIRES.

PAR M. JOACHIMSTHAL,
Professeur agrégé à l'Université de Berlin.

Problème. Étant donnés un point (o) et sa polaire par rapport à une conique, dont les intersections avec la polaire soient (f) et (g) (*), trouver le point de rencontre (R) des deux normales sans se servir des points (f) et (g).

Solution. 1. Soient cp, cq les directions des axes principaux, et c le centre de la conique; menez co qui rencontre la polaire de o en r, prenez $or = rs$, alors le point demandé sera dans la perpendiculaire st, abaissée du point s sur la droite pq (*fig.* 49).

2. Construisez le rectangle cpc_1q; joignez c_1 et o, et le point demandé sera dans la perpendiculaire cd abaissée du centre c sur c_1o.

Par conséquent, le point R, où les lignes cd, st se coupent, sera en même temps le point de rencontre des deux normales.

La construction ne subit que des changements légers, en supposant le point o dans l'intérieur du triangle pcq.

Si pq devient une tangente à la conique, les trois points o, r, s coïncident, et on obtient une nouvelle construction du centre de courbure.

Si la ligne pq devient une sécante idéale, la construction subsiste encore sans avoir la même signification que pour le cas des deux normales réelles.

(*) Les deux points f et g ne sont pas indiqués dans la figure.

DÉFINITIONS PRÉCISES ARITHMÉTIQUES

des racines et des logarithmes incommensurables.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

—

1. Qu'est-ce que la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait? Qu'est-ce que $\sqrt{2}$, par exemple? Dans la géométrie, on rencontre ce nombre et on conçoit parfaitement son existence ; c'est pour nous alors un nombre bien déterminé. Mais ne serait-il pas bon de définir arithmétiquement, d'une manière précise, indépendamment de toute application, ce qu'on entend par $\sqrt{2}$? C'est ce que nous allons essayer de faire (*).

2. Nous avons remarqué que le calcul de $\sqrt{2}$, à des approximations décimales de plus en plus grandes, effectué d'après la définition et la règle données en arithmétique, conduisait à des nombres qui, s'ils ne croissaient pas toujours nécessairement, au moins ne décroissaient jamais. Nous nous sommes demandé si cela était particulier aux approximations décimales, surtout en voyant que le calcul de cette même racine de 2 à moins de $\frac{1}{5}$, de $\frac{1}{6}$, de $\frac{1}{7}$, de $\frac{1}{8}$, était loin de conduire au même résultat ; car la première racine approchée est plus grande que chacune des trois autres.

L'examen de la question nous a conduit à formuler cette proposition générale : *Si l'on prend successivement la racine*

(*) *Voir* t. VI, p. 110.

carrée d'un même nombre, $\sqrt{2}$ *par exemple*, *à moins de deux fractions* $\frac{1}{m}$ *et* $\frac{1}{n}$, *telles que* n *soit multiple de* m, *la seconde racine approchée n'est jamais moindre que la première.* Par exemple, la racine de 2 à $\frac{1}{15}$ près ne saurait être moindre que $\sqrt{2}$ calculée à $\frac{1}{5}$ près.

En effet, soient $\frac{a}{5}$ et $\frac{b}{15}$ les deux racines approchées. Si $\frac{a}{5}$ était plus grand que $\frac{b}{15}$, on aurait $\frac{3a}{15} > \frac{b}{15}$. Mais le carré de $\frac{a}{5}$ ou de $\frac{3a}{15}$ est moindre que 2, et contenu dans 2. Donc $\frac{b}{15}$ ne serait pas le plus grand nombre de quinzièmes dont le carré soit contenu dans 2, ne serait pas la racine de 2 à $\frac{1}{15}$ près; ce qui serait contraire à l'hypothèse.

En calculant $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ près, on trouve des nombres égaux à $\frac{7}{5}$ qui est la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5}$. Cela peut-il toujours continuer ainsi ? Il est évident que non. Mais quand la valeur approchée sera-t-elle plus grande que $\frac{7}{5}$? Pour le savoir, partons du calcul de notre racine, à $\frac{1}{5}$ près : on a multiplié 2 par 5^2, extrait la racine du produit 2×5^2 à moins d'une unité, ce qui a donné 7. Désignons, pour généraliser, le reste de cette opération par r (ici $r = 1$). Nous avons $2 \times 5^2 = 7^2 + r$. Multiplions les deux membres de cette égalité par le carré d'un nombre entier indéterminé n; nous avons :

$$2 \times 5^2 \times n^2 = 7^2 \times n^2 + r \times n^2. \qquad (1)$$

Nous voyons déjà que la racine carrée de $2 \times 5^2 \times n^2$ à moins d'une unité sera au moins $7 \times n$, et la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5 \times n}$, au moins de $\frac{7 \times n}{5 \times n} = \frac{7}{5}$; ce qui démontre autrement la proposition énoncée plus haut. Continuons : pour que la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5 \times n}$ surpasse $\frac{7 \times n}{5 \times n}$, il suffit que le deuxième membre de l'égalité (1) soit au moins égal à $(7 \times n + 1)^2$; car la racine approchée sera alors $\frac{7 \times n + 1}{5 \times n}$. Mais $(7 \times n + 1)^2 = 7^2 \times n^2 + 2 \times 7 \times n + 1$. Comparant à l'égalité (1), on voit qu'il suffit pour notre but que l'on ait $r \times n^2 > 2 \times 7 \times n$ ou bien $r \times n > 2 \times 7$, ou enfin $n > \frac{2 \times 7}{r}$. En prenant pour n le nombre entier immédiatement supérieur à ce quotient, on sera certain que $\sqrt{2}$ calculée à moins de $\frac{1}{5 \times n}$ sera un nombre plus grand que $\sqrt{2}$, à $\frac{1}{5}$ près. Dans notre exemple, $r = 1$. Il faut prendre $r > 14$; prenant $r = 15$, nous cherchons la racine à moins de $\frac{1}{5 \times 15} = \frac{1}{75}$. On trouve $\frac{106}{75}$, tandis que $\frac{7}{5} = \frac{105}{75}$. En prenant un quelconque des multiples de 5 inférieurs à 5×15 pour dénominateur de la fraction d'approximation, l'approximation n'avance pas. Ce n'est pas à dire qu'il en serait ainsi pour tout dénominateur inférieur à 75. On voit de plus que $\frac{1}{75}$ est une limite inférieure de la différence entre $\sqrt{2}$ et $\frac{7}{5}$, en ce sens que $\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{75}\right)^2$ est inférieur à 2 aussi bien que $\left(\frac{7}{5}\right)^2$ lui-même.

4. Maintenant que nous avons un moyen assuré d'avoir

des racines approchées croissantes, revenons à notre sujet principal. Qu'est-ce que $\sqrt{2}$?

Calculons $\sqrt{2}$ à des approximations décimales successives poussées aussi loin que l'on voudra. Écrivons sur deux colonnes : 1° les racines approchées par défaut ; 2° les racines correspondantes approchées par excès, lesquelles ne sont autre chose que les premières augmentées chacune d'une unité décimale du dernier ordre. Voici le commencement des deux suites.

1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
1,41421	1,41422
. . . . . .	. . . . . .
. . . . . .	. . . . . .

Deux nombres correspondants des deux suites, à partir des seconds nombres, sont compris entre les deux nombres immédiatement supérieurs : 1,41 et 1,42, par exemple, sont compris entre 1,4 et 1,5. Un nombre de gauche peut être quelquefois égal à son supérieur ; le nombre de droite, *d'autres fois*, égal au sien.

Supposons que l'un de ces cas se présentant, deux ou plusieurs nombres consécutifs de la colonne de gauche étant égaux, on ne conserve, chaque fois, que l'un de ces nombres, en supprimant tous les autres, ainsi que leurs correspondants de droite. Cela fait, nous pouvons certainement établir les conséquences suivantes : Les nombres de la colonne de gauche forment une suite croissante ; ces nombres ont cependant une limite supérieure, car aucun d'eux ne peut dépasser un quelconque des nombres de la colonne à droite. Les nombres de cette colonne de droite forment une suite décroissante ; ils ont une limite inférieure, car aucun d'eux ne peut être inférieur à un nombre quelconque de la colonne de gauche. Les deux limites dont nous parlons sont, par leur nature même, comprises entre deux nombres correspondants quelconques des deux colonnes. Or on peut trouver deux nombres correspondants dont la différence soit une unité décimale aussi petite que l'on voudra. Donc la différence entre les deux limites en question est moindre que tout nombre assignable; donc ces deux limites sont un seul et même nombre. Cette limite commune est ce qu'on appelle $\sqrt{2}$.

Pourquoi? C'est que 2 est la limite des carrés des nombres de gauche, aussi bien que des carrés des nombres de droite; limite supérieure pour les uns, inférieure pour les autres. On sait, en effet, que les carrés des nombres de gauche sont tous inférieurs à 2; les carrés des nombres de droite tous plus grands que 2. Ce nombre 2 est donc compris entre les carrés de deux nombres correspondants quelconques. Par cela même que la différence entre deux de ces nombres correspondants, a et $a+\delta$, décroît au-dessous de tout nombre assignable, il en est de même de la différence de leurs carrés (*). Il arrivera donc alors que la différence entre 2 et chacun de ces carrés sera moindre que tout nombre assignable, quand ces nombres approcheront de leur limite. 2 est évidemment le carré de la limite de ces nombres, et on a bien fait d'appeler cette limite, $\sqrt{2}$.

Mais, d'après ce qu'on a dit précédemment, n étant un nombre entier quelconque, nous pouvons, en prenant des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n\times p}$, $\frac{1}{n\times p\times q}$, ... ou

(*) $(a+\delta)^2-a^2=2a\delta+\delta^2=\delta(2a+\delta)=\delta(a+a+\delta)$ Or $a+a+\delta$ est moindre que le double de $a+\delta$, c'est-à-dire du plus grand nombre; or $a+\delta$ est moindre que 1,5 le premier des nombres de droite. $2\times 1{,}5\times\delta$ ou 3δ est donc une limite supérieure de la différence des carrés.

plus simplement, à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{4n}$, $\frac{1}{8n}$, former deux colonnes pareilles aux précédentes, et arriver aux mêmes conséquences pour les limites des nombres écrits dans ces deux colonnes. Nous serons tout aussi fondés à appeler $\sqrt{2}$ la limite commune des nombres de nos deux nouvelles colonnes. Cependant, à ne voir que les deux tableaux, il ne paraît pas évident que les deux limites soient les mêmes pour les nombres décimaux du tableau que nous avons écrit, et les nombres du tableau que nous venons d'indiquer sans l'écrire. Ne peut-on pas croire à deux limites différentes, l et l', à deux définitions pour $\sqrt{2}$, qui n'en aurait alors aucune ?

Non ; car l'une et l'autre définition sont fondées sur cette proposition : 2 est la limite des carrés des nombres de chaque suite décimale ; 2 est la limite des carrés des nombres des deux nouvelles suites obtenues en changeant la fraction primitive qui marquait l'approximation ; supposons, comme il est dit plus haut, deux limites différentes, l et l', pour les racines approchées des deux tableaux ; prenons deux nombres à l'extrême voisinage de chaque limite dans les suites correspondantes, l'un inférieur à l, l'autre supérieur à l' ; la différence entre ces deux nombres aurait une valeur déterminée plus grande que $l-l'$; la différence entre leurs carrés, qui comprennent le nombre 2, aurait aussi une valeur déterminée (*). L'un de ces carrés, au moins, aurait avec 2 une différence qui ne pourrait être moindre qu'un nombre assigné quelconque, comme cela doit être cependant pour les nombres des deux tableaux, quand on approche suffisamment de la

(*) Cette différence entre les carrés serait au moins égale à $2(1,4)\times(l-l')$, ou bien à $2\times\alpha\times(l-l')$, en appelant α le plus petit nombre de la suite de gauche, deuxième tableau. On tire cette limite de la formule $2a\delta+\delta^2=(2a+\delta)\delta$; 1,4 ou α étant moindres l'un où l'autre que a.

limite de chacun. On peut faire, au lieu de la démonstration précédente, celle que nous faisons plus loin à propos de logarithmes, pour prouver l'identité de toutes les limites. Tout ce que nous venons de dire s'applique évidemment à la racine carrée d'un nombre quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable, mais bien déterminé. Cela s'applique même à une racine quelconque.

n étant d'ailleurs un nombre entier quelconque, on voit que l'on arrive à la même limite, quelle que soit la fraction primitive marquant l'approximation. On peut employer le même raisonnement à l'égard d'autres nombres appelés incommensurables, pour les définir au point de vue purement arithmétique.

Faisons-le pour les logarithmes.

Sur la définition des logarithmes incommensurables.

Considérons le système de logarithmes dont la base est 10. Écrivons les deux progressions :

$$(1) \qquad \begin{cases} \div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \ldots\ldots \\ : 0.\ \ 1.\ \ 2.\ \ \ 3.\ \ \ \ 4.\ \ \ \ \ 5.\ \ldots\ldots \end{cases}$$

et faisons quelques remarques préliminaires. Quand on insère entre les termes de la progression géométrique considérés 2 à 2 un nombre indéterminé m de moyens, on a pour raison nouvelle $q = \sqrt[m+1]{10}$; q étant plus grand que 1, car $q^{m+1} = 10$, tous les termes de la nouvelle progression vont en croissant et peuvent dépasser toute limite donnée. On sait de plus que l'on peut toujours choisir m assez grand pour que deux termes consécutifs de grandeur finie, pris dans la nouvelle progression, aient entre eux une différence aussi petite que l'on veut. La formule générale d'un terme de cette nouvelle progression est $q^n = \sqrt[m+1]{10^n}$.

Considérons deux progressions géométriques ainsi obtenues, en prenant deux valeurs différentes, m et m', de m; prenons un terme dans chacune d'elles, et comparons entre eux ces deux termes $q^n = \sqrt[m+1]{10^n}$ et $q'^{n'} = \sqrt[m'+1]{10^{n'}}$. Pour savoir quel est le plus grand des deux, il suffit de comparer les deux fractions $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n'}{m'+1}$ Si, par exemple, $\frac{n}{m+1}$ est plus grande que $\frac{n'}{m'+1}$, il est certain que $\sqrt[m+1]{10^n}$ est plus grand que $\sqrt[m'+1]{10^{n'}}$; en effet, on peut réduire ces fractions $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n'}{m'+1}$ au même dénominateur D. Soient $\frac{N}{D}$ et $\frac{N'}{D}$ les deux résultats. On voit facilement que $\sqrt[m+1]{10^n} = \sqrt[D]{10^N}$ et $\sqrt[m'+1]{10^N} = \sqrt[D]{10^{N'}}$ (*). On sait que $\frac{N}{D}$ est plus grand que $\frac{N'}{D}$, ou N plus grand que N'. Donc $10^N > 10^{N'}$, et $\sqrt[D]{10^N}$ plus grand que $\sqrt[D]{10^{N'}}$, ce qu'il fallait prouver.

Écrivons la progression géométrique pour les cas de $m+1=10$; insérons le même nombre m de moyens entre les termes de la progression arithmétique (1); nous aurons ainsi les deux nouvelles progressions

$$(2)\quad \begin{cases} 1 : \sqrt[10]{10} : \sqrt[10]{10^2} : \sqrt[10]{10^3} \ldots \sqrt[10]{10^{10}} : \sqrt[10]{10^{11}} : \sqrt[10]{10^{12}} \ldots\ldots \\ 0 \;.\; \frac{1}{10} \;.\; \frac{2}{10} \;.\; \frac{3}{10} \ldots \frac{10}{10} \;.\; \frac{11}{10} \;.\; \frac{12}{10} \ldots\ldots \end{cases}$$

(*) L'égalité $\sqrt[m+1]{10^n} = \sqrt[D]{10^N}$, revient à celle-ci, $10^{n \times D} = 10^{N(m+1)}$. Or $\frac{n+1}{m}$ étant égal à $\frac{N}{D}$, $n \times D = N \times (m+1)$. Donc l'égalité précédente est vraie, et la première aussi.

Si nous faisons la même chose dans le cas de $m+1=100$, nous aurons un troisième système :

$$(3)\quad \begin{cases} \div\!\div 1 : \sqrt[100]{10} : \sqrt[100]{10^2} : \sqrt[100]{10^3} \ldots\ldots \sqrt[100]{10^{100}} : \sqrt[100]{10^{101}} \ldots\ldots \\ : 0 . \dfrac{1}{100} . \dfrac{2}{100} . \dfrac{3}{100} \ldots\ldots \dfrac{100}{100} . \dfrac{101}{100} \ldots\ldots \end{cases}$$

et ainsi de suite indéfiniment.

De même que tous les termes des progressions (1) font partie des progressions (2), tous les termes des progressions (2) font partie des progressions (3). On peut considérer le système (3) comme obtenu en insérant neuf moyens entre les termes, pris deux à deux de chacune des quatre progressions (2). Si on écrit le système (4) pour $m+1=1000$, on verra de même que ce système (4) se déduit de (3), de la même manière que (3) de (2). $m+1$ croissant indéfiniment, deux termes consécutifs d'une progression géométrique pourront différer aussi peu que l'on voudra ; de même pour la progression arithmétique correspondante.

Tout cela posé, considérons un nombre quelconque, 7 par exemple. Il est compris entre deux termes de la progression géométrique (2), comme entre deux termes de la progression géométrique (3), et ainsi de suite. On ne saurait d'ailleurs avoir $\sqrt[m+1]{10^n}=7$ pour des valeurs entières de $m+1$ et n, car il en résulterait $7^{m+1}=10^n$, égalité impossible. Pour avoir les nombres qui comprennent 7 dans une progression quelconque, on observe qu'on doit avoir

$$\sqrt[m+1]{10^n} < 7 < \sqrt[m+1]{10^{n+1}},$$

d'où

$$10^m < 7^{m+1} < 10^{n+1}.$$

$m+1$ étant un nombre donné, et n un nombre cherché. On élèvera 7 à la puissance $m+1$, on comptera les chiffres du nombre obtenu ; si on trouve p chiffres, 7^{m+1} sera compris en 10^{p-1} et 10^{p} ; $n=p-1$; n étant ainsi trouvé, on aura, à la fois, les deux nombres $\sqrt[m+1]{10^n}$ et $\sqrt[m+1]{10^{n+1}}$, qui comprennent 7 dans chaque progression géométrique, et les deux nombres $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n+1}{m+1}$, écrits sous ceux-là dans la progression arithmétique correspondante.

Il nous sera donc possible de former le tableau suivant : En suivant l'ordre des progressions géométriques tel qu'il est indiqué ci-dessus, nous écrivons sur deux colonnes verticales, 1° les termes immédiatement inférieurs à 7 ; 2° les termes immédiatement supérieurs, en mettant à côté l'un de l'autre les deux nombres qui comprennent 7 dans une même progression géométrique. Sur deux autres colonnes verticales, que nous faisons correspondre aux précédentes, terme à terme, nous mettons les nombres qui dans les progressions arithmétiques correspondent aux termes des progressions géométriques que nous venons d'écrire. Voici le commencement de ces suites :

(a)	(b)	(a')	(b')
1	10	0	1
$\sqrt[10]{10^8}$	$\sqrt[10]{10^9}$	0,8	0,9
$\sqrt[100]{10^{84}}$	$\sqrt[100]{10^{85}}$	0,84	0,85
$\sqrt[1000]{10^{845}}$	$\sqrt[1000]{10^{846}}$	0,845	0,846
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . .
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . .

Deux termes correspondants des colonnes (a) et (b), à partir de la deuxième ligne horizontale, sont compris entre les correspondants supérieurs ; il en est de même de deux termes correspondants quelconques des colonnes (a') et (b'). Par exemple : $\sqrt[100]{10^{84}}$ et $\sqrt[100]{10^{85}}$ ne peuvent être moindres que $\sqrt[10]{10^8}$, ni plus grands que $\sqrt[10]{10^9}$. En effet, 7 étant compris entre $\sqrt[10]{10^8}$ et $\sqrt[10]{10^9}$, qui correspondent aux termes 0,8, 0,9 de la progression arithmétique (2), si l'on cherche les termes qui comprennent (7) dans la progression géométrique (3), on doit trouver deux des termes qui s'intercalent entre $\sqrt[10]{10^8}$ et $\sqrt[10]{10^9}$ quand on passe des progressions (2) aux progressions (3). Les deux termes correspondants de la progression arithmétique (3) seront deux des termes intercalés entre 0,8 et 0,9 ; l'un de ces termes pouvant être 0,8 ou 0,9.

Après tout ce que nous venons de dire, on pourra répéter mot pour mot, au sujet des colonnes (a) et (b), ce qui a été dit des deux colonnes verticales formées à propos de $\sqrt{2}$. Seulement, pour la conclusion dernière, observant que 7 est constamment compris entre deux termes correspondants de ces colonnes (a) et (b), on conclura que la limite commune des nombres de ces colonnes est 7.

En répétant de nouveau, et mot à mot, ledit raisonnement cité, on conclura que les nombres des colonnes (a') et (b') ont une limite commune vers laquelle ils tendent indéfiniment en *correspondant toujours dans les progressions successives aux nombres des colonnes* (a) *et* (b). Concevant donc continuée indéfiniment la comparaison des progressions telles que (2), (3), (4) ....., on trouve des nombres différant de (7) d'une quantité aussi petite que l'on veut, correspondant à des nombres des colonnes (a') et (b) continuées suffisamment loin. On est donc fondé à établir cette définition : Le logarithme de 7 n'est autre chose que la limite des nombres (a') et (b'), limite dont nous avons prouvé l'existence.

6. Il y a une infinité de manières d'arriver à cette limite qu'on appelle logarithme de 7.

Au lieu de faire $m+1=10$, on peut lui donner une valeur quelconque p; puis, pour continuer, une valeur multiple quelconque de p; $m+1=p\times q$; puis encore une valeur multiple $p\times q\times r$, et ainsi de suite. Tout ce que nous avons dit sera vrai. Tous les termes de la progression géométrique obtenue pour $m+1=p$ feront partie de la progression obtenue pour $m+1=p\times q$. On passera évidemment de la progression $(m+1=p)$ à la progression $m+1=(p\times q)$, en insérant $q-1$ moyens entre les termes pris deux à deux de la première de ces progressions. D'ailleurs, $m+1$ croissant et pouvant croître au delà de toute limite, de cette manière-là aussi bien que si $m+1$ égalait 10^n, deux termes consécutifs d'une progression géométrique obtenue pourront différer aussi peu que l'on voudra. D'ailleurs $\dfrac{1}{p\times q\times r\ldots.}$ peut décroître indéfiniment. On peut donc, pour nos hypothèses actuelles, recommencer tout le raisonnement précédent, et arriver à former un tableau semblable à celui que composent les colonnes (a), (b), (a'), (b'). On arrivera à cette même conclusion que le logarithme de (7) est la limite des nombres des colonnes remplaçant (a') et (b'). Ce qu'il faudrait faire voir, c'est que cette nouvelle limite, quels que soient $p\times q\times r\ldots.$, ne saurait différer de celle qui existe pour les nombres (a') et (b'). Admettons que ces deux limites diffèrent; soient l la limite de la suite décimale, et l' la limite de la suite nouvelle, que j'appellerai suite fractionnaire. Supposons l plus grand que l'. Puisque la différence $l-l'$ existe, on peut la regarder comme étant plus grande qu'un certain nombre commensurable $\dfrac{1}{H}$, H pouvant être un nombre très-grand. Dans la suite fractionnaire des nombres inférieurs à l', on peut prendre un nombre $\frac{A}{N}$ dont le dénominateur N soit plus grand que H. Alors $\frac{1}{N}$ est moindre que $\frac{1}{H}$.

$\frac{A}{N}$ inférieur à l' est inférieur à l, et diffère de l d'une quantité plus grande que $l - l'$, plus grande que $\frac{1}{H}$, et encore plus grande que $\frac{1}{N}$. Il résulte de là que $\frac{A+1}{N}$, terme de la deuxième suite fractionnaire correspondant à $\frac{A}{N}$ est encore moindre que l d'une certaine quantité que nous désignerons par k. Mais on peut prendre dans la suite décimale des nombres inférieurs à l, un nombre qui en diffère d'une valeur moindre que k. Soit $\frac{A'}{10^{k'}}$ le nombre ainsi choisi. On aurait $\frac{A'}{10^{k'}} > \frac{A+1}{N}$. Par suite, $\sqrt[10^{k'}]{10^{A'}} > \sqrt[N]{10^{A+1}}$, ce qui est absurde; car, d'après nos raisonnements, $\sqrt[10^{k'}]{10^{A'}}$ est moindre que 7, et $\sqrt[N]{10^{A+1}}$ plus grand que 7. On voit donc que log. 7 est un nombre bien déterminé; qu'on arrivera à la même valeur pour ce logarithme, quel que soit le mode d'approximation adopté.

7. Nous avons donné quelque étendue aux considérations précédentes. Elles sont fondées sur cette remarque générale : le plus grand nombre de $n^{\text{ièmes}}$ contenu dans la valeur d'un nombre incommensurable A, n'est jamais moindre que le plus grand nombre de $p^{\text{ièmes}}$ contenus dans ce nombre A, si p est un multiple de n; ce qui se démontre comme on l'a fait pour $\frac{a}{5}$ et $\frac{b}{15}$, valeurs approchées de $\sqrt{2}$. Pour em-

ployer les considérations précédentes afin de définir arithmétiquement un nombre incommensurable A, il suffira donc qu'on ait le moyen de déterminer le plus grand nombre de $n^{\text{ièmes}}$ contenus dans A, n étant quelconque; et on le peut, dès qu'on a, pour détermnier A, une méthode d'approximation quelconque, le développement en fraction continue, par exemple.

COMPOSITIONS ÉCRITES

Des sept séries dans lesquelles on a partagé les candidats à l'École polytechnique, à Paris, en 1847. (Voir t. V, p. 702.)

—

I.

Discuter le lieu de l'équation $x^m + y^m = a^m$.

Trouver l'équation de sa tangente.

Calculer, à un millième près, l'expression $x = \dfrac{5+\sqrt{7}}{8+\sqrt{11}}$.

Thermomètre; attractions et répulsions magnétiques; dispersion de la lumière.

II.

Discuter le lieu de l'équation polaire $\rho = a \sin\theta \cos\theta$ (v. 263).

Trouver l'équation de sa tangente.

Continuité des fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques.

Machine pneumatique; chaleurs spécifiques.

III.

Discuter le lieu de l'équation $y = a \operatorname{tang}\left(\dfrac{x}{b}\right)$.

Trouver l'équation de sa tangente.

Extraire, avec une approximation donnée, les racines des nombres quelconques entiers ou fractionnaires et des quantités imaginaires de la forme $a \pm b \sqrt{-1}$.

Machine pneumatique ; chaleurs spécifiques.

IV.

Discuter le lieu de l'équation $y = x + a \sin\left(\frac{x}{b}\right)$.

Trouver l'équation de sa tangente.

Conditions d'équilibre d'une baguette homogène s'appuyant à ses deux extrémités sur deux droites fixes, ayant une position quelconque dans l'espace.

Tension des vapeurs ; condensateur électrique ; paratonnerre.

V.

Du sommet A de l'angle droit BAC on mène une droite quelconque ; des points B, C on abaisse sur cette droite les perpendiculaires BP, CQ ; trouver le lieu des points M de ces droites pour lesquels $\overline{AM}^2 = AP \times AQ$.

Théorie de l'homogénéité.

Généralisation des formules trigonométriques.

Machine pneumatique ; poids spécifiques et instruments propres à les déterminer.

VI.

Trouver la longueur d'une corde divisant la surface d'un cercle donné dans un rapport donné.

Construire géométriquement l'équation à laquelle on arrive.

Discuter le lieu de l'équation $y = \frac{a}{\sin\left(\frac{x}{b}\right)}$.

Trouver l'équation de sa tangente.

Baromètre ; loi de Mariotte ; bouteille de Leyde.

VII.

Trouver le lieu de l'équation $\rho = a - b\theta$, et celui de l'équation $\rho = \frac{a}{\theta - b}$.

Trouver l'équation de la tangente de chacun de ces deux lieux.

Trouver le lieu des projections d'un sommet d'une section conique sur toutes ses tangentes.

Électrophore; hygromètre à cheveu; variations de l'intensité de la lumière à raison de la distance et de l'inclinaison des surfaces.

QUESTION.

—

164. A, B, C, D étant quatre points pris sur une ellipse, tels que les normales en ces points convergent vers le même point; $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ étant l'équation de l'ellipse, les cordes AB, CD sont conjuguées relativement à l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$; axes rectangulaires.

RECTIFICATION

Relative à un théorème sur les foyers.

—

Le théorème IV de la page 533, tome II, doit être ainsi énoncé: « Le produit des distances d'un point de la courbe » aux deux foyers divisé par le produit des distances de ce » même point aux deux directrices, donne un quotient con- » stant. »

Nous devons cette importante correction, qui devait être faite depuis longtemps, à l'amitié de M. Catalan. Tm.

UNIVERSITÉ DE DUBLIN; 1846 (*V.* t. V, p. 515).

Programme d'agrégation (*Socius*, — 1847) (*).

MATHÉMATIQUES.

M. Graves, professeur.

1. Donner une méthode géométrique pour mener une tangente à une ligne plane du troisième ordre par un point pris sur la courbe.

2. La même construction donne le cercle osculateur.

3. On peut faire les mêmes constructions pour une courbe plane d'ordre quelconque.

4. On peut déterminer de la même manière, pour une surface d'ordre quelconque, et le plan tangent et le cercle qui oscule les lignes de courbure en un point quelconque.

5. Propriété remarquable des cordes menées d'un point donné aux points où le cercle osculateur rencontre la courbe.

6. Un théorème quelconque sur les asymptotes rectilignes des courbes du $n^{ième}$ ordre étant démontré, il en résulte de suite un théorème plus général sur les tangentes dont les points de contact sont en ligne droite : par exemple, on sait que toutes les hyperboles qui ont à l'infini quatre points de contact avec une ligne du troisième ordre, ont le même centre, et que les trois centres répondant aux trois asymptotes sont sur une même droite. Quelle est la propriété générale analogue des tangentes?

(*) Programme en latin; cette agrégation correspond probablement à notre agrégation pour les facultés et dont le programme doit paraître en 1848.

7. Dans les courbes sphériques, la distinction entre les branches hyperboliques et paraboliques n'existe pas.

8. Étant donnée l'équation d'une courbe en coordonnées rectilignes, comment cherche-t-on la nature du point singulier situé à une distance infinie?

9. ξ et η étant les segments *réciproques* qu'une tangente à une courbe fait sur les axes rectangulaires, l'équation du $n^{ième}$ degré entre ξ et η est une courbe de la $n^{ième}$ classe, c'est-à-dire une courbe qui est la polaire réciproque d'une courbe de $n^{ième}$ degré.

10. Cette équation peut généralement se mettre sous la forme $PQR... + \mu\Omega_{n-2} = 0$; ou les fonctions $PQR...$ en nombre n sont du 1^er^ degré; Ω_{n-2} est une fonction de l'ordre $n - 2$ et μ une constante.

11. Interprétation géométrique des équations $P = 0$; $Q = 0$; $R = 0$; etc. $\Omega_{n-2} = 0$.

12. Étant donnée l'équation d'une courbe de troisième classe sous la forme $PQR + \mu S^3 = 0$, on demande l'interprétation géométrique des équations $P = 0$; $Q = 0$; $R = 0$; $S = 0$.

13. Le théorème remarquable de Cotes sur les transversales coupant une ligne du $n^{ième}$ ordre dérive de la considération des derniers termes de l'équation entre les coordonnées rectilignes; un théorème analogue existe pour les lignes de la $n^{ième}$ classe.

14. Dans un triangle sphérique, on donne la base et l'angle opposé; quelle relation existe entre les variations des côtés?

15. Le même théorème existe pour un triangle formé sur une surface quelconque par trois lignes géodésiques (les plus courtes).

16 Mêmes données; quelle est la relation entre les variations des angles à la base?

17. Déduire de la relation entre les variations des côtés la

formule fondamentale pour la comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce.

18. Mêmes données; quelle relation existe entre les variations des côtés et la variation de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base ?

19. De ce théorème, on déduit de suite la relation fondamentale entre trois fonctions elliptiques de la seconde espèce.

20. Interprétation géométrique de cette formule par des arcs elliptiques. Que signifie le terme $c^2 \sin \mu \sin \varphi \sin . \psi$?

21. φ et ψ étant les amplitudes des deux arcs complémentaires dans l'ellipse, on demande la relation entre les diamètres de l'ellipse qui font des angles φ et ψ avec le petit axe.

22. La fonction $\sin am\ (u)$ est périodique, que u soit réel ou imaginaire.

23. De là, les fonctions elliptiques sont douées d'une double périodicité, une réelle et l'autre imaginaire, pourvu que le module soit réel.

24. On sait que les fonctions complètes de troisième espèce dépendent des deux autres espèces. On peut déduire de là, sans peine, le théorème de Legendre sur les fonctions complètes de première et deuxième espèce qui ont des modules conjugués.

25. Les fonctions de troisième espèce, à paramètres logarithmiques, peuvent être réduites à des fonctions à deux arguments.

26. Développement en série de la fonction Θ.

27. Développement en série de la fonction $F(c,\varphi)$, suivant les sinus des multiples de φ.

28. Développement de $F(c)$, suivant les puissances du module.

29. Qu'y a-t-il de remarquable dans l'équation différentielle entre $F(c)$ et b?

30. Quelle courbe est vulgairement proposée pour représenter les fonctions elliptiques de première espèce?

31. Quelle est la courbe sphérique dont l'arc représente une fonction de troisième espèce?

32. Quel doit être le cône pour que l'arc de la courbe sphérique représente une fonction de première espèce?

33. Ou une fonction de seconde espèce?

34. Quelle sera la courbe sphérique si l'axe principal intérieur du cône est un diamètre de la sphère? quelle fonction elliptique représente-t-elle?

35. L'une et l'autre courbe peuvent facilement se déduire de la section sphéro-conique.

36. Deux surfaces confocales du second ordre se coupent orthogonalement; quelle est la propriété corrélative des surfaces ayant le même centre et les mêmes plans directeurs?

37. Suivant quelles lignes se coupent de telles surfaces?

38. Dans quelles surfaces du second degré les lignes de courbure sont-elles planes?

39. Quelle que soit la surface, si la ligne de courbure est plane, l'angle entre ce plan et un plan tangent, mené par un point de la ligne, est invariable.

40. La détermination de la ligne géodésique sur la surface de l'ellipsoïde dépend d'une équation différentielle du second ordre. Quelle est l'interprétation géométrique de l'intégrale première?

41. Toutes les lignes géodésiques partant d'un ombilic convergent vers l'ombilic opposé.

42. Tous les arcs géodésiques joignant deux ombilics opposés sont de même longueur.

43. La somme ou la différence de deux arcs géodésiques partant de deux ombilics vers un point quelconque d'une même ligne de courbure est invariable.

44. Il existe un théorème général pour des lignes géodé-

siques menées d'un point quelconque à une ligne de courbure donnée et rencontrant une seconde ligne de courbure.

45. Deux arcs géodésiques touchent des lignes de courbures données et se coupent orthogonalement; quel est le lieu du point d'intersection?

46. Si on développe $f(x)$ dans une série procédant suivant les sinus ou cosinus des multiples de x, comment faut-il former les coefficients?

47. Quel développement doit-on choisir pour qu'il soit vrai pour des valeurs de x comprises entre π et $-\pi$?

48. Ce développement subsiste-il encore lorsque $f(x)$ devient discontinue pour une valeur particulière $x = a$?

49. Comment peut-on connaître les caractères de la convergence de cette série?

50. Quelle est la limite de l'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{\sin(i\omega)}{\sin\omega} d\omega$, i croissant indéfiniment?

51. De là, la valeur ultime de l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\omega) \frac{\sin i\omega}{\sin\omega} d\omega$.

52. Quelle est la valeur de cette intégrale lorsque $f(\omega)$ devient discontinue pour $\omega = 0$?

53. Quelle est la position d'une courbe dont l'ordonnée est égale à une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de x?

54. Comment faut-il transformer la formule pour une série procédant suivant les sinus et cosinus de x multiple, quand on adopte les limites $-l$ et $+l$?

55. On peut déduire des mêmes formules une expression triple de $f(x)$ sous forme d'intégrale double.

56. L'ordonnée d'une ligne brisée peut s'exprimer en fonction de l'abscisse.

57. En cherchant la fonction de la variable x qui est comprise entre les limites

$$x = -1\,;\quad x = +1,$$

nous tombons sur une intégrale définie digne de remarque.

58. Donner la démonstration de la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kf(a)da}{k^2+(a-x)^2}=f(x)$$

qui a lieu k diminuant indéfiniment.

59. Déduire de là le théorème de Fourrier.

60. Le théorème de Fourrier peut s'étendre aux fonctions à plusieurs variables.

61. Dans la transformation de l'intégrale double, que devons-nous substituer à la place de l'élément $dxdy$?

62. Donner une explication géométrique de ce changement.

63. Usage des intégrales définies dans la solution de l'équation différentielle du $n^{ième}$ ordre.

64. La solution d'une telle équation différentielle peut s'écrire sous forme d'une intégrale multiple.

65. Si les coefficients sont constants, l'intégrale multiple peut se transformer dans une somme d'intégrales simples.

66. Si les constantes sont les coefficients d'une équation algébrique ayant des racines égales, comment faut-il changer la forme de l'une et de l'autre solution?

Note. On voit, d'après ce programme, que dans la savante université irlandaise, les études analytiques et géométriques sont portées à la hauteur du niveau actuel; en effet, l'analyse et la géométrie sont pour ainsi dire les deux yeux de la science, et c'est l'éborgner que de vouloir l'emploi exclusif d'une de ces méthodes; mais nous comprenons, sous le nom de géométrie, non pas celle qui est emprisonnée depuis tant de siècles dans le système cellulaire des coniques, mais la science qui s'occupe des propriétés générales de l'espace, telle qu'elle est enseignée aujourd'hui en Sorbonne, sous le nom de géométrie *supérieure*, par un de ses plus célèbres promoteurs.

On regrette de ne trouver ici aucune question sur une théorie acquérant de jour en jour plus d'importance, sur la théorie des nombres. C'est une lacune qui, on peut l'espérer, ne subsistera pas toujours.

PHYSIQUE (*).

M. Mac Cullagh, professeur.

1. Donner l'expression de l'action du soleil et de la lune sur la mer dans un lieu donné.

2. Par quel calcul Newton détermine-t-il la hauteur de la mer par la théorie dite de l'équilibre?

3. Déterminer la hauteur de l'eau, ayant égard à sa densité.

4. Comment le coefficient de la hauteur de l'eau dépend-il de la densité de l'eau?

5. Par quelle expérience connaît-on la densité moyenne de la terre? Décrire l'expérience de Cavendish et donner les éléments du calcul.

6. Exprimer la hauteur totale de l'eau dans la théorie de l'équilibre, en coordonnées astronomiques.

7. Trois espèces de termes à remarquer dans cette expression; quelles oscillations ces termes déterminent-ils?

8. Expression de l'oscillation semi-diurne.

9. Pourquoi le *retard* des marées de jour en jour, diminue-t-il des syzygies aux quadratures, et augmente-t-il des quadratures aux syzygies?

10. Dans la théorie dynamique de Laplace, quelle est l'hypothèse sur la forme et la profondeur de la mer? D'où vient la nécessité de cette hypothèse?

(*) Sous ce nom, on comprend la mécanique et l'astronomie.

11. Comment, dans cette hypothèse, faut-il former les équations du mouvement des eaux?

12. Intégrales particulières données par Laplace.

13. Quelle est l'oscillation diurne en hauteur? Dans quel cas est-elle nulle?

14. Quel est l'effet des marées sur la précession des équinoxes?

15. Comment faut-il calculer la précession des équinoxes?

16. Si les trois moments principaux d'un corps sont égaux, son mouvement de rotation n'est pas sensiblement changé par l'attraction d'un corps éloigné.

17. D'après quelle loi la vitesse de rotation change-t-elle, si le corps se refroidit ou s'échauffe?

18. L'équation générale d'équilibre d'un système de points, telle qu'elle est donnée par Lagrange, combien comprend-t-elle de conditions?

19. Quel sens Lagrange attribue-t-il aux facteurs dans cette équation?

20. Si le corps est continu, il y a deux espèces de conditions et deux espèces de forces appliquées.

21. Équation générale de l'équilibre en ce cas.

22. Comment faut-il traiter cette équation, si elle renferme des conditions différentielles?

23. Combien peut-on se donner de conditions indéterminées?

24. Dans les problèmes de mécanique et dans les problèmes de géométrie qui dépendent du calcul de variation, on fait usage de *multiplicateurs*; sont-ils de même nature dans l'un et l'autre cas?

25. En quoi diffèrent les variations des coordonnées dans ces deux genres de questions?

26. Combien y a-t-il d'équations finales indéfinies dans les questions de mécanique? Combien en géométrie?

27. Quelle est l'équation d'équilibre d'un fil flexible ou inflexible d'après Lagrange?

28. Que signifie le *facteur* dans cette équation?

29. Si ce fil est appliqué contre une surface donnée, comment faut-il traiter la question?

30. Déterminer dans ce cas la réaction de la surface,

31. Quelle est l'équation d'équilibre d'un fluide incompressible d'après Lagrange?

32. Comment en déduit-on les équations ordinaires de l'équilibre d'un fluide?

33. Comment Navier emploie-t-il l'équation générale de la dynamique pour exprimer l'équilibre d'un corps solide, homogène, élastique?

34. Dans cette équation, le moment des forces internes du solide élastique est une fonction de six quantités différentielles (intégrale sextuple).

35. Le changement de distances entre les particules voisines dépend de ces six quantités.

36. L'expression du moment des forces internes est-elle la même lorsque le corps n'a pas la même élasticité dans toutes les directions?

37. Dans un corps solide homogène, peuvent se propager deux espèces de vibrations. Quelle est la relation entre les vitesses de ces propagations?

38. L'éther lumineux dans un corps cristallisé étant troublé, trouver le moment δV des forces internes; quelle est la forme générale de V?

39. Définition des axes principaux d'un cristal.

40. Une onde plane se propageant dans un cristal, trouver la loi de propagation.

41. Démontrer que les vibrations se font dans le plan de l'onde.

42. Comment détermine-t-on analytiquement la direction des vibrations dans le plan de l'onde?

43. Que signifie cette condition, géométriquement? Existe-t-il deux directions?

44. Quelle est la vitesse de propagation dans l'une et l'autre direction?

45. En quoi ces lois s'accordent-elles avec la théorie de Fresnel? en quoi en diffèrent-elles?

46. D'où Fresnel conclut-il que les vibrations du rayon polarisé sont normales au plan de polarisation? Au vrai, ne sont-elles pas parallèles à ce plan?

47. Les vibrations sont toujours perpendiculaires au rayon dans la théorie dynamique, et pas de même dans la théorie de Fresnel.

48. Comment faut-il définir la surface des ondes?

49. Comment Huyghens démontre-t-il la loi de Snellius (*)?

50. Quelle est la loi de la réfraction dans un milieu cristallisé? comment la démontre-t-on?

51. Ces lois peuvent se déduire de la forme des intégrales particulières.

52. Comment la loi de Snellius est-elle démontrée par Newton? Quelle est la vitesse de propagation selon Newton?

53. Comment Newton explique-t-il le phénomène de la réflexion totale?

54. Dans ce cas comment, dans la théorie ondulatoire, démontre-t-on l'absence de tout rayon réfracté?

55. Quel est ainsi le mouvement propagé dans le second milieu? En chercher les lois.

56. Trouver les conditions à observer dans la surface commune aux deux milieux.

(*) Loi de réfraction de Descartes.

57. Ces conditions peuvent s'énoncer brièvement.

58. Il existe encore une autre condition, mais qui est renfermée dans celle-là.

59. D'après ces conditions, il résulte que la *phase* n'est pas changée, s'il existe un rayon réfracté.

60. Si la réflexion est totale, la *phase* est-elle changée par la réflexion ?

UNIVERSITÉ DE FRANCE.

Concours d'agrégation pour les sciences mathématiques, année 1847 (*voir* t. V, p. 513) (*).

—

Composition d'analyse.

1° Lorsqu'un cercle roule sur une ligne droite de manière qu'un point de la circonférence décrive une cycloïde ordinaire, tout point situé dans le plan du cercle décrit une courbe analogue à la cycloïde et dont on demande l'équation.

On fera voir que les courbes ainsi décrites se confondent avec celles qu'on a appelées cycloïdes allongées ou raccourcies, et qui seraient décrites par un point de la circonférence du cercle mobile, mais dans l'hypothèse où l'espace rectiligne parcouru par le centre du cercle, au lieu d'être justement égal à la longueur de l'arc dont les parties sont venues successivement s'appliquer dans le même temps sur la droite fixe, serait plus grand ou plus petit.

2° On donnera les formules pour la quadrature des cycloïdes allongées ou raccourcies, et l'on dira dans quel cas on peut les couper par des parallèles à la droite sur laquelle

---

(*) Agrégation pour les colléges.

s'appuie la circonférence du cercle mobile, de manière que les segments retranchés soient équivalents à des carrés que l'on puisse construire géométriquement, c'est-à-dire avec la règle et le compas, au moyen des données de la figure.

3° On donnera les formules pour la rectification de ces mêmes courbes, et l'on démontrera le théorème de Pascal qui revient à assigner les axes d'une ellipse de laquelle dépend la rectification de la cycloïde allongée ou raccourcie.

4° On saura gré aux candidats des recherches qu'ils pourront faire, si le temps le leur permet, pour déterminer les tangentes, les rayons de courbure, les développées des courbes dont il s'agit, et pour montrer ce que deviennent les propriétés les plus saillantes de la cycloïde ordinaire quand on passe à la cycloïde allongée ou raccourcie.

Composition de mécanique.

1re *Question.* Montrer succinctement comment on trouve la variation de la vitesse angulaire, produite par des forces continues qui agissent sur un corps.

2e *Question.* Une sphère homogène se meut sur un plan horizontal, à l'origine du mouvement; le centre de la sphère a une vitesse connue dirigée parallèlement au plan, et l'on connaît pareillement le mouvement initial de rotation de la sphère autour de son centre; la sphère éprouve de la part du plan une résistance horizontale appliquée au point de contact et de sens contraire à la vitesse absolue de ce point. Tout cela posé, on demande.

1° De donner les équations différentielles du mouvement et de démontrer que la résistance horizontale reste constamment parallèle à une même droite pendant la durée du mouvement, quelle que soit la loi suivant laquelle elle varie d'intensité;

2° De donner complétement les lois du mouvement dans le cas particulier où l'intensité de la résistance horizontale est constante.

Composition du jury d'examen.

MM. Cournot, inspecteur général de l'Université, président ;

Lebesgue, professeur à la faculté de Bordeaux ;

Briot, professeur à la faculté de Lyon ;

Sonnet, docteur ès sciences, agrégé ès sciences ;

Vernier, professeur de mathématiques spéciales au collége royal Henri IV.

Note. On peut consulter pour la deuxième question de mécanique, deux mémoires de M. Cournot, sur le mouvement d'un corps sur un plan fixe, ayant égard au frottement. (Crelle, t. V et VIII, 1830 et 1832, en français.) Tm.

JOURNAL DE CRELLE. — 1846 (*).

PREMIER CAHIER.

1. Sur les substitutions du premier ordre et sur la transformation des intégrales elliptiques dans la forme normale; par le professeur H. Richelot, à Königsberg. 1-29.

(L'auteur donne une méthode uniforme pour transformer l'intégrale $\frac{dy}{\sqrt{A+\ldots+Cy^4}}$ dans la forme normale $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, au moyen de la forme du premier ordre $y=\frac{p+qx}{r+sx}$.)

(*) Ce sont les quatre derniers cahiers qui aient paru; nous donnerons de même le contenu des cahiers à paraître, et en rétrogradant nous reviendrons sur les années précédentes de cette précieuse collection, unique en son genre.

2. **Recherches sur l'élimination et la théorie des courbes**; par A. Cayley, de Cambridge. 30-45. (En français.)

(Théorie analytique du nombre de points d'inflexion, de tangentes multiples, etc., et autres théorèmes sur les courbes en général et sur la théorie des fonctions rendues homogènes, due à M. Hesse; progrès considérable de la géométrie cartésienne, et qui paraît être complétement ignoré en France. Nous en parlerons prochainement.)

3. In solutionem æquationum algebraicarum disquisitio; auctore C. J. Malmsten, prof. Upsal. 46-74.

(L'auteur démontre ce théorème, qu'Abel a énoncé, et dont il a esquissé la démonstration : Si une équation irréductible de degré μ (μ nombre premier) est résoluble algébriquement, les racines ont cette forme $x = A + R_1^{\frac{1}{\mu}} + R_2^{\frac{1}{\mu}} + \ldots R_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}$; A est rationnel, et R_1, $R_2 \ldots R_{\mu-1}$ sont racines d'une équation du $\mu - 1^{\text{ième}}$ degré, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation donnée; de là on déduit l'impossibilité de résoudre l'équation du 5^e^ degré, et par conséquent les équations de degré supérieur.)

4. Sur la formule de Lagrange et son application à la formation des séries; par J. Dienger, professeur à Sinsheim, près Heidelberg. 75-100.

Fac-simile d'un manuscrit de Ferrari.

DEUXIÈME CAHIER.

5. Addizione alla memoria intitolata : Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubature de' solidi, inscritta nel tomo 31 di questo giornale, p. 12, dal sig. D. Barnaba Tortolini, prof. di mat. trasc. all' Università di Roma. 101-121.

(Première surface engendrée par les projections du centre d'une ellipsoïde sur ses plans tangents; seconde surface engendrée de la même manière par le moyen de la première, et ainsi de suite; et ensuite surface enveloppe des plans perpendiculaires aux rayons vecteurs d'une surface donnée. Tout est ramené à des intégrales elliptiques.)

6. Sur la dispersion de la lumière dans l'atmosphère; par le candidat R. Claudius, à Berlin. 122-147.

(C'est l'essai d'une théorie mathématique de la lumière diffuse. On y discute les idées photométriques de Lambert.)

7. Note sur les hyperdéterminants; par M. A. Cayley, de Cambridge. 148-152. En français.

(La théorie des hyperdéterminants a été donnée par l'auteur au tome XXX, cahier 1.)

8. Recherches sur le calcul des probabilités; par M. Öttinger, prof. à l'Université de Fribourg en Brisgau. 153-191.

(C'est une continuation. Une urne contient n boules, portant les nombres $1, 2, 3 \ldots n$; on tire une boule et on la remet, et ainsi plusieurs fois de suite; quelle est la probabilité qu'il sortira k fois consécutivement, une boule comprise dans la série r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+m-1$, r et m étant des nombres donnés.)

Fac-simile d'un manuscrit de Ferroni.

TROISIÈME CAHIER.

9. Résolution algébrique des équations du 9e degré, jouissant de la propriété qu'une certaine fonction rationnelle et symétrique donnée de deux racines, est égale à une troisième racine, par exemple $F(x_m, x_n) = x_p$, et aussi $F(x_p, x_m) = x_n$, $F(x_p, x_n) = x^m$; par M. Otto Hesse, professeur extraordinaire (*) à l'Université de Königsberg. 193-208.

(*) Autorisé, mais non titulaire.

(Cette solution, indiquée par M. Jacobi, est suivie de considérations géométriques, et l'on démontre que toute ligne d'ordre n à $3n(n-2)$ points d'inflexions ; et ensuite le théorème de M. Poncelet : Lorsqu'une droite passe par deux points d'inflexion d'une ligne du troisième ordre, elle passe aussi par un troisième point d'inflexion.)

10. Sur les séries infinies et leur représentation en expressions finies ; par J. Dienger, professeur à Sinzheim, près Heidelberg. 209-243.

(Formation de diverses séries convergentes.)

11. De criteriis quibus cognoscatur an æquatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit ; auctore Eduardo Luthero, phil. doct. Regiomont. 244-254.

(L'auteur démontre que lorsque l'équation est résoluble, la *résolvante* est toujours décomposable en facteurs rationnels, et lorsqu'un des facteurs est du premier degré, l'autre du cinquième degré irréductible est toujours résoluble algébriquement.)

12. Quelques problèmes de la théorie combinatoire ; par le professeur Weiss, à Munich. 255-269.

(Nombre de termes et divers genres de combinaisons.)

13. Sur quelques théorèmes de la géométrie de position ; par M. A. Cayley. Suite du mémoire, tome XXXI, p. 213 (en français).

(Sur les vingt points donnés par les soixante droites, dans le théorème de Pascal.) Théorème de M. Steiner.

14. Cas analytique particulier dans la théorie de la manivelle ; par l'éditeur. 276-279.

15. Deux problèmes de géométrie avec les solutions. 280-284.

1° Par quatre points dans un plan, mener quatre droites de manière qu'elles forment un carré ; 2° par n points donnés dans un plan, mener n droite de telle sorte qu'elles forment un polygone de n côtés, dont les angles soient donnés et dont l'aire soit donnée (ce dernier problème est résolu par l'éditeur). Fac-simile d'un manuscrit de Fontana.

QUATRIÈME CAHIER.

16. Recherches sur la série

$$1+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2+\ldots$$

par E. Heine, professeur particulier (privat-docent) à l'Université de Bonn. 285-328.

(Se rattache au travaux d'Euler et de Gauss sur les courbes hypergéométriques.)

17. Sur les courbes du troisième ordre : démonstration analytique ; par M. Plücker, à Bonn. 329-336.

(Démonstration analytique *intuitive* des théorèmes de géométrie énoncés par M. Steiner au tome XXX ; l'auteur fait usage d'un système de symboles au moyen desquels, pour ainsi dire, il *écrit les figures.*)

18. Note sur le théorème de Pascal ; par M. Plücker. 337-340. En français.

(Théorème des vingt points de M. Steiner, rectifié et démontré.)

19. Géométrie analytique des courbes tracées sur les surfaces de second ordre et classe : on entend par ces mots les deux surfaces hyperboloïdes ; par M. Plücker. 341-356.

Voici l'énoncé de divers théorèmes :

I. Toutes les propriétés des droites dans un plan peuvent se transporter sur des courbes planes tracées sur un hyperboloïde, et passant par un même point.

II. Si dans une courbe plane tracée sur une surface du second degré, on inscrit un hexagone formé de courbes planes passant par le même point fixe, les côtés opposés se coupent respectivement en trois points dans le même plan que le point fixe. — Si l'hexagone est circonscrit, les trois courbes planes passent respectivement par le point fixe et par deux sommets opposés se coupent encore en un même second point; et divers théorèmes sur la projection stéréographique de ces courbes.

20. Sur une nouvelle génération mécanique des surfaces de second ordre et seconde classe; par M. Plücker. 357-359.

21. Observation sur la dissertation: géométrie analytique, etc. (v. 89); par M. Plücker. 360-376. (Propriété stéréographique.)

Fac-simile d'un manuscrit de Paoli.

PROBLÈME DE MALFATTI.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Démonstration de la solution du problème de Malfatti, donnée par M. Steiner, p. 178 du tome I, cah. II (*Crelle*); *par M. Zornow, professeur au collége de Kneiphof, à Kœnigsberg.* (Crelle, X, p. 300, 1833, en français.)

On trouve dans le tome I de ce journal une construction très-remarquable du problème suivant, connu sous le nom du problème de Malfatti : A un triangle donné quelconque, inscrire trois cercles de manière que chacun d'eux touche extérieurement les deux autres, et deux côtés du triangle. Cette construction, également distinguée par sa simplicité et son élégance, n'a pas été démontrée par son auteur, et à ce que je sache, nulle démonstration n'en a été publiée depuis ce temps-là. C'est ce qui me fournit l'occasion de communiquer aux géomètres la démonstration suivante, qui me paraît assez simple pour mériter leur indulgence.

Commençons par quelques considérations connues.

1. Soient (*fig.* 50) a et b deux cercles (*) qui se touchent extérieurement par leur point de contact z; menons une tangente commune $z\,w''$. Soit $u''\,v''$ une autre tangente, qui rencontre la première au point w'', on aura :

$$w''\,u'' = w''\,v'' = w''\,z = \sqrt{(a\,b)}.$$

2. Étant mené par u'' et v'' un troisième cercle quelconque c_1 (**), qui coupe a et b dans deux autres points y et x, la droite $c_1\,w''$ sera perpendiculaire à la droite $u''v''$. En même temps la droite $u''y$ sera perpendiculaire à la droite $a\,c_1$, qui joint les centres des deux cercles a et c_1.

3. Les cercles a et b peuvent être touchés dans les points y et x par un même cercle c.

4. Soit A' le point de rencontre des deux droites $a\,c_1$ et $u''\,v''$ prolongées convenablement, la droite A'y touchera le cercle a au point y, et par suite aussi le cercle c dans le même point.

5. Soit décrit du centre c_1 un second cercle, qui touche $u''\,v''$ au point w'' (***). Le point A' sera le point de similitude extérieur des deux cercles a et c_1, donc la droite A'y touchera aussi le cercle c_1.

6. Réciproquement la tangente $y\,t$ commune aux cercles a et c_1 menée par leur point de contact y, touche le cercle c_1. De la même manière, on prouve que la tangente $x\,s$, com-

(*) Nous désignerons, pour abréger, le cercle, son centre et son rayon par la même lettre de l'alphabet.

(**) Ce cercle n'est pas construit dans la figure, pour ne pas la rendre trop compliquée.

(***) C'est ce cercle et son rayon c_1w'', que nous désignerons désormais par c_1.

mune aux cercles b et c, menée par leur point de contact x, touche le cercle c_1.

7. Les droites $z\,w''$, $x\,s$, $y\,t$ se coupent dans un point unique P, que l'on peut regarder comme le centre du cercle inscrit au triangle $a\,b\,c$. D'où suit :

$$zP = xP = yP = \sqrt{\left(\frac{a\,b\,c}{a+b+c}\right)}.$$

8. Le point P étant le point de similitude intérieur des deux cercles c_1 et c, les trois points c_1, P, c, sont sur une même droite, et par suite les deux triangles cPx et c_1Ps sont semblables. On tire de là :

9. $Px : sx = c : c_1 + c$; ou $\sqrt{\left(\frac{a\,b\,c}{a+b+c}\right)} : \sqrt{(ab)} = c : c_1 + c$;

d'où vient : $c_1 + c = \sqrt{c\,(a+b+c)}$, ou bien $c_1^2 = c\,(a+b-2c_1)$.

10. Soit as' la tangente menée du point a au cercle c_1, on a :

$$(a\,s')^2 = (a\,c_1)^2 - c_1^2 = (a - c_1)^2 + a\,b - c_1^2 = a\,(a + b - 2c_1) = \frac{a}{c}\,c_1^2.$$

11. Soit $u'\,v'$ une tangente extérieure commune aux cercles a et c, et qui ne rencontre pas le troisième b; si elle coupe la droite Py au point w', on a, comme ci-dessus (1) : $w'\,u' = w'\,v' = w'\,y = \sqrt{(a\,c)}$, et par conséquent :

$$\frac{c_1\,s'}{a\,s'} = \frac{u'\,w'}{u'\,a} = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

On voit par là que les deux triangles rectangles $c_1\,a\,s'$ et $w'\,a\,u'$ sont semblables, d'où suit : $\angle c_1\,a\,s' = \angle w'\,a\,u'$.

12. Soit A le point de rencontre des deux droites $u'v'$, $u''v''$, le cercle a étant inscrit au triangle $AA'\,w'$, on a toujours :

$$\angle w'\,a\,u' + \angle A\,a\,A' = 2R.$$

On aura donc aussi :

$$\angle A'\,a\,s' + \angle A\,a\,A' = 2R.$$

On voit par là que les droites Aa et as' se confondent en une droite unique, c'est-à-dire : la droite Aa, qui divise en deux parties égales l'angle A formé par les deux droites $u'v'$ et $u''v''$, touche en même temps le cercle c_1.

13. Soit de plus uV tangente commune extérieure aux cercles b et c, et qui ne rencontre pas le troisième cercle a; soient B et C ses points de rencontre avec les droites $u''v''$ et $u'v'$, on prouve de la même manière que la droite BC touche le cercle c. Donc un triangle ABC étant circonscrit aux trois cercles a, b, c, de manière que chacun de ses côtés touche extérieurement deux de ces cercles, si l'on partage les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO, le cercle c_1 sera inscrit au triangle ABO.

14. Réciproquement le cercle c_1 inscrit au triangle ABO, est touché de deux des trois tangentes aP, yP, zP, menées aux cercles a, b, c par leurs points de contact communs a, y, z, et touche en même temps le côté AB au même point w'', auquel il est rencontré par la troisième tangente Pz.

15. Soient de plus a_1 et b_1 les cercles inscrits aux deux autres triangles BCO et CAO, on prouve de la même manière qu'ils sont touchés respectivement des droites yP, zP, et des droites zP, xP. Donc du point w'', auquel le cercle c_1 touche le côté AB, on peut mener une tangente Pz commune aux quatre cercles a, b, a_1, b_1, et qui touche en même temps les deux premiers à leur point de contact commun.

16. Étant donné le triangle ABC, si l'on cherche les trois cercles a, b, c, déterminés de manière que chacun d'eux touche les deux autres et en même temps deux des côtés du triangle ABC, on partagera en premier lieu les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO; après cela étant inscrits aux triangles BCO, CAO, ABO les cercles a_1, b_1, c_1 dont le dernier touche AB au point w'', si l'on mène

du point w' une tangente au cercle a_1 tellement choisie qu'elle touche en même temps le cercle b_1, ce qui est toujours possible, elle touchera aussi deux des cercles cherchés a et b, qui sont par là entièrement déterminés. Par une construction semblable on trouve le troisième cercle c.

La construction précédente du problème de Malfatti est précisément celle qui a été donnée par M. Steiner à l'endroit cité.

Kœnigsberg, le 30 octobre 1832.

Note. M. Plücker a donné aussi une solution synthétique de ce problème (*Crelle*, XI, p. 117, 1834) et même une solution de ce problème général, résolu d'abord par M. Steiner : étant donnés trois cercles, décrire trois nouveaux cercles dont chacun touche les deux autres et deux des trois cercles donnés (*Crelle*, XI, p. 356). Il serait à désirer que M. Finck voulût bien nous faire connaître complétement la méthode si féconde du symbolisme et des coefficients indéterminés appliqués à la géométrie et dont M. Plücker a déduit de si beaux théorèmes (*Voir* t. III, p. 147, 401, 573, et t. V, p. 60).

VÉRIFICATION ANALYTIQUE

de la formule, question 69. (II.327).

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

—

I. Soient a, b, c, trois quantités positives, rangées par ordre de grandeur ($a < b < c$). L'équation

$$abc = x\left\{a\sqrt{4x^2-a^2} + b\sqrt{4x^2-b^2} \pm c\sqrt{4x^2-c^2}\right\} \qquad (a)$$

où le signe supérieur est pour $a^2+b^2>c^2$ ou $=c^2$, et l'inférieur pour $a^2+b^2<c^2$, est satisfaite par

$$x=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}=\frac{abc}{\sqrt{\mathrm{U}}}.$$

Les quatre radicaux étant pris positivement.

La division par x^3 réduit la première équation à celle-ci :

$$\frac{a}{x}.\frac{b}{x}.\frac{c}{x}=\frac{a}{x}\sqrt{4-\frac{a^2}{x^2}}+\frac{b}{x}\sqrt{4-\frac{c^2}{x^2}}\pm\frac{c}{x}\sqrt{4-\frac{c^2}{x^2}}.\ (b)$$

Or on a :

$$\mathrm{U}=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$\{(b+c)^2-a^2\}\ \{a^2-(b^2-c)^2\}=$$
$$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\ \{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$$
$$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)=$$
$$=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$$

De là on tire :

1° $4-\frac{\mathrm{U}}{b^2c^2}=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)^2=4-\frac{a^2}{x^2}$ à cause de $\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{bc}$,

de même

2° $4-\frac{\mathrm{U}}{a^2b^2}=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\right)^2=4-\frac{b^2}{x^2}$ à cause de $\frac{b}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ac}$,

3° $4-\frac{\mathrm{U}}{a^2b^2}=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right)^2=4-\frac{c^2}{x^2}$ à cause de $\frac{c}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ab}$.

Ces valeurs réduisent l'équation (a) à celle-ci :

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{U}}}{a^2b^2c^2}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{bc}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)+\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ac}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\right)\pm\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ab}\left(\pm\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right),$$

ce qui revient à :

$$\mathrm{U}=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$$

N. B. Pour $a^2+b^2-c^2=0$; $\mathrm{U}=4a^2b^2$, $x=\frac{c}{2}$, $\sqrt{4x^2-c^2}=0$.

Le troisième terme du deuxième membre de l'équation (a) disparaît.

II. Quand les trois nombres a, b, c peuvent être regardés comme les trois côtés d'un triangle, voici la signification géométrique de l'équation (a). Soit x le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et O le centre. On a :

$$\text{ABC} = \text{BOC} + \text{AOC} \pm \text{AOB},$$

selon que le centre est intérieur ou extérieur au triangle.

$$\text{AOB devient nul pour } x = \frac{c}{2}.$$

Or :

$$\text{BOC} = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{4}a\sqrt{4x^2 - a^2}, \quad \text{AOC} = \frac{1}{4}b\sqrt{4x^2 - b^2}$$

$$\text{AOB} = \frac{1}{4}c\sqrt{4x^2 - c^2}; \quad \text{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\text{C}; \quad \sin\text{C} = \frac{1}{2}\frac{\text{C}}{x};$$

d'où $\text{ABC} = \frac{1}{4}\frac{abc}{x}$, de là l'équation

$$\frac{abc}{4x} = \frac{1}{4}a\sqrt{4x^2 - a^2} + \frac{1}{4}b\sqrt{4x^2 - b^2} \pm \frac{1}{4}c\sqrt{4x^2 - c^2},$$

qui revient à l'équation (a).

Comme on a aussi :

$$\text{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4},$$

il en résulte :

$$x = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Ainsi cette valeur de x satisfait à l'équation (a).

III. L'équation (b) est satisfaite par $x = \infty$, c'est le cas de $\text{U} = 0$; $a + b = c$. Il n'y a pas triangle.

L'équation (b) est satisfaite par $a + b < c$, il n'y a plus de triangle, U est négatif, et x imaginaire.

La démonstration algébrique embrasse tous les cas.

Prouver que l'on a :

$$4\sin A \sin B \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C. \qquad (c)$$

quand $A + B + C = 2$ quad.

L'équation (c) revient à l'équation (b).

SOLUTION DE LA QUESTION 46 (t. I, p. 517).

Théorème de géométrie sur les pyramides.

PAR E. CATALAN.

—

De toutes les pyramides ayant même angle polyèdre au sommet et même hauteur, la plus petite en volume a pour centre de gravité de sa base le pied de sa hauteur.

La base est déterminée par un plan tangent à une sphère ayant pour centre le sommet de la pyramide, et pour rayon la hauteur, que nous adoptons pour unité.

Prenons le sommet pour origine des coordonnées rectangulaires ; chaque arête sera déterminée par les angles qu'elle forme avec les trois axes.

Soient x, y, z les coordonnées du point où le plan de la base touche la sphère, nous aurons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \qquad (1)$$

Soient ensuite α_1, β_1, γ_1 les angles que forme, avec les axes, la première arête, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point où cette droite perce le plan tangent, nous aurons encore :

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1\,; \quad \frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z_1}{\cos\gamma_1} = \frac{1}{l_1} \qquad (2)$$

en posant :

$$l_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1. \qquad (3)$$

x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du premier sommet de la base, et il est facile de voir que l_1 représente la longueur de l'arête qui répond à ce sommet.

On aurait des équations de même forme pour les autres sommets.

Projetons, sur le plan des xy, la base de la pyramide, et soit 2C l'aire de cette projection, nous aurons, par une formule due à *de Stainville :*

$$2C = \Sigma(x_1y_2 - x_2y_1). \qquad (4)$$

Menons, de l'origine des coordonnées, des rayons vecteurs δ_1, δ_2... aux différents sommets du polygone situé sur le plan des xy ; soient θ_1, θ_2... les angles formés par ces droites avec la partie positive de l'axe des x, nous aurons :

$$x_1 = \delta_1\cos\theta_1,\quad x_2 = \delta_2\cos\theta_2 \ldots$$
$$y_1 = \delta_1\sin\theta_1,\quad y_2 = \delta_2\sin\theta_2 \ldots ;$$

donc

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \delta_1\delta_2\sin(\theta_2 - \theta_1),$$

et comme

$$\delta_1 = l_1\sin\gamma_1,\quad \delta_2 = l_2\sin\gamma_2,\ldots,$$

la formule (4) devient :

$$2C = \Sigma l_1l_2\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin(\theta_2 - \theta_1). \qquad (5)$$

Actuellement l'angle que forme la base de la pyramide avec le plan des xy, a pour cosinus z ; donc, en représentant par 2P l'aire de cette base,

$$2P = \frac{1}{z}\Sigma l_1l_2\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin(\theta_2 - \theta_1). \qquad (6)$$

Dans cette dernière équation, l_1, l_2, l_3... sont des fonctions de

x, y, z; les autres quantités sont indépendantes de ces variables : d'ailleurs, comme le *minimum* du volume répond évidemment au *minimum* de la base, la question est ramenée à un problème de calcul différentiel.

Posons $\Sigma l_1 l_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \mathrm{F}(x, y, z)$; en différenciant la formule (6), par rapport aux trois variables, et égalant à zéro cette différentielle, nous aurons :

$$z^2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy + \frac{d\mathrm{F}}{dz}dz\right) - zdz\mathrm{F}(x, y, z) = 0.$$

A cause de l'équation (1), on a $xdx + ydy + zdz = 0$; donc l'équation précédente devient :

$$z^2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy\right) + \left(\mathrm{F} - z\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)(xdx + ydy) = 0.$$

Actuellement x et y sont des variables indépendantes, donc

$$z^2\frac{d\mathrm{F}}{dx} + x\left(\mathrm{F} - z\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right) = 0, \quad z^2\frac{d\mathrm{F}}{dy} + y\left(\mathrm{F} - z\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right) = 0.$$

Je multiplie la première équation par y, la seconde par x, et je retranche; ce qui me donne simplement :

$$y\frac{d\mathrm{F}}{dx} = x\frac{d\mathrm{F}}{dy}. \qquad (7)$$

Développons cette formule ; on a :

$$\frac{d.l_1 l_2}{dx} = l_1\frac{dl_2}{dx} + l_2\frac{dl'}{dx} = l_1\cos\alpha_2 + l_2\cos\alpha_1 = + l_1 l_2(x_1 + x_2);$$

le premier membre de l'équation (7) équivaut donc à

$$y\Sigma l_1 l_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1).(x_1 + x_2) = y\Sigma \delta_1\delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1).(x_1 + x_2).$$

$\delta_1\delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ est le double du triangle ayant pour côtés les deux rayons vecteurs δ_1 et δ_2; $x_1 + x_2$ est le double de l'abscisse du milieu de sa base; appelons t_1 l'aire de ce triangle élémentaire, et g_1 l'abscisse de son centre de gravité, nous aurons :

$$\Sigma\delta_1\delta_2\sin(\theta_2-\theta_1).(x_1+x_2)=6\Sigma t_1g_1=12\mathrm{CX}.$$

En désignant par X l'abscisse du centre de gravité de la base, l'équation (7) devient donc :

$$\frac{x}{\mathrm{X}}=\frac{y}{\mathrm{Y}}; \qquad (8)$$

ainsi les coordonnées du point de contact cherché sont proportionnelles à celles du centre de gravité de la base : ce qui démontre le théorème. (Août 1840.)

THÉORÈMES

sur les polygones inscrits dans une conique, et solutions des questions 108, 109 *et* 110. (*Voir* p. 112.)

PAR M. PAUL SERRET,
Élève d'Avignon.

—

1. Théorème I. Soient deux quadrilatères ABCD, *abcd* inscrits dans la même conique : si l'on prend successivement chaque côté AB du premier quadrilatère, qu'on cherche les deux points de rencontre $\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{ab}$, $\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{cd}$ de ce côté, avec le côté homologue *ab* et son opposé *cd* du second quadrilatère, on obtiendra huit points de rencontre, qui seront situés sur une même conique (*).

Démonstration. Prenons les deux côtés homologues AB et *ab* pour axes des y et des x.

Soit (1) $\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}y+\mathrm{E}x+\mathrm{F}=0$,

(*) On est prié de faire les figures.

l'équation de la conique. Les systèmes des droites AD,BC ; *ad*, *bc* seront représentés par les équations suivantes :

(2) $Ay^2 + B'xy + C'x^2 + Dy + E'x + F = 0$. [AD, BC].
(3) $A''y^2 + B''xy + Cx^2 + D''y + Ex + F = 0$. [*ad*, *bc*].

Cela posé, retranchons successivement (2) et (3) de (1), nous obtiendrons ainsi les équations des droites CD, *cd*.

$$\text{CD},\ (a);\ (B-B')y + (C-C')x + E - E' = 0.$$
$$cd,\ (b);\ (A-A'')y + (B-B'')x + D - D'' = 0.$$

Retranchons (3) de (2), l'équation résultante :

$$(c)\ (A-A'')y^2 + (B'-B'')xy + (C'-C)x^2 + (D-D'')y + \\ + (E'-E)x = 0;$$

sera satisfaite par les coordonnées des cinq points, $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$; $\overline{AD}\cdot\overline{ad}$; $\overline{AD}\cdot\overline{bc}$; $\overline{BC}\cdot\overline{ad}$; $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$; la conique qu'elle représente passera donc par ces cinq points. Démontrons de plus que cette même conique (*c*) passe par les trois points $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$; $\overline{CD}\cdot\overline{ab}$, $\overline{cd}\cdot\overline{AB}$.

1° Elle passe par $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$; car si x et y désignent spécialement dans (*a*) et (*b*) les coordonnées du point $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$, en multipliant (*a*) par x, et (*b*) par y, on aura les deux égalités :

$$(B-B')xy + (C-C')x^2 + (E-E')x = 0,$$
et
$$(A-A'')y^2 + (B-B'')xy + (D-D'')y = 0.$$

Par suite, en retranchant la première de la seconde, on aura l'égalité

$$(A-A'')y^2 + (B'-B'')xy + (C'-C)x^2 + (D-D'')y + (E'-E) = 0,$$

égalité qui n'est autre chose que l'équation de la conique (*c*), dans laquelle x et y sont remplacés par les coordonnées du point $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$; donc, etc...

2° Elle passe par $\overline{AB}\cdot\overline{cd}$. Faisant en effet $x = 0$, dans (*b*) et (c), on arrive dans l'une et l'autre équation, à la relation $(A-A'')y+D-D''=0$.

3° Elle passe par $\overline{ab}\cdot\overline{CD}$. Faisant de même $y=0$, dans (a) et (c), on arrive pour l'une et l'autre équation à la relation $(C-C')x+(E-E')=0$.

La proposition est donc démontrée.

Conséquences.

2. Le théorème de M. Plücker, qui fait l'objet de la question 108 (tom. V, p. 112), n'est, *dans le cas général*, qu'une conséquence du théorème précédent, et même qu'une conséquence restreinte. On peut en effet énoncer *généralement* le théorème suivant :

Théorème II. Soient deux quadrilatères ABCD, *abcd* inscrits dans la même conique.

Si les trois points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$, $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$, sont sur une même droite XY. Généralement : 1° le point $\overline{AD}\cdot\overline{ad}$ sera sur la même droite XY ; 2° les quatre points

$$\overline{AB}\cdot\overline{cd},\ \overline{BC}\cdot\overline{ad},\ \overline{CD}\cdot\overline{ab},\ \overline{AD}\cdot\overline{bc},$$

seront sur une seconde droite xy.

Démonstration. Dans le cas ordinaire, les huit points sont sur une même conique ; donc, comme une conique ne peut être coupée en plus de deux points par une droite, et trois de ces points sont sur une même droite XY, la conique, lieu des huit points, sera remplacée par un système de deux droites XY, xy. Donc, déjà, les huit points seront répartis sur deux droites.

Or, 1° je dis que dans le cas général, $\overline{AD}\cdot\overline{ad}$ sera sur la droite XY, qui contient déjà les trois points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$, $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$.

En effet, dans le cas général, aucun des trois points $\overline{AB}\cdot\overline{cd}$, $\overline{BC}\cdot\overline{ad}$, $\overline{CD}\cdot\overline{ab}$, ne se trouve sur XY ; car si, par exemple, $\overline{AB}\cdot\overline{cd}$ était sur XY, comme $\overline{BA}\cdot\overline{ba}$ s'y trouve déjà, il ne pourrait arriver que deux choses : 1° ou bien ab et cd rencontreraient la droite AB en deux points différents, et alors la droite AB serait la droite XY elle-même, ce qui est un cas très-particulier, et que l'on doit même rejeter, car alors la droite bc passerait par le point B, ce qui amènerait ou une absurdité, ou l'hypothèse que les deux quadrilatères auraient un sommet commun ; 2° ou bien ab et cd se rencontreraient au même point de AB, c'est-à-dire au point O, ce qui est encore un cas particulier.

Ainsi donc *généralement* les trois points $\overline{AB}\cdot\overline{cd}$, $\overline{BC}\cdot\overline{ad}$, $\overline{CD}\cdot\overline{ab}$ sont sur xy ; et je dis que $\overline{AD}\cdot\overline{ad}$ ne saurait être sur xy. Car, comme $\overline{BC}\cdot\overline{ad}$ est déjà sur cette droite, on retomberait dans les cas particuliers de tout à l'heure. De même $\overline{AD}\cdot\overline{bc}$ ne peut être sur XY. Donc enfin, *généralement*, etc...

Note. J'ai cherché à déduire directement des considérations précédentes, les modifications que peut subir le théorème dans les cas particuliers qui peuvent se présenter, je n'y ai pas réussi. Dans ce qui suit, je supposerai le théorème de M. Plücker, démontré pour tous les cas.

Généralisation du théorème de M. Plücker.

3. Théorème III. Soient deux polygones ABCD. . . . . KL, *abcd*. . . . . *kl* d'un nombre pair $2n$ de côtés, inscrits à la même conique ; les côtés homologues AB,*ab*.... donnent $2n$ points d'intersection ; si $2n-1$ de ces points sont sur une même droite XY, le point restant sera sur la même droite.

Soit en effet le théorème vrai pour les polygones de quatre et de $2n$ côtés, je dis qu'il sera vrai aussi pour les polygones de $2(n+1)$ côtés.

Soient en effet ABCD....HKLMN, *abcd....hklmn*, deux polygones inscrits de $2n+2$ côtés; menons les diagonales AL, *al*. Par hypothèse les $2n+1$ points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$,... $\overline{HK}\cdot\overline{hk}$, $\overline{KL}\cdot\overline{kl}$; $\overline{LM}\cdot\overline{lm}$, $\overline{MN}\cdot\overline{mn}$ sont sur une droite XY; et il faut prouver que $\overline{AN}\cdot\overline{an}$ est aussi sur XY.

Or les diagonales AL, *al* décomposent chaque polygone total en un quadrilatère, et un polygone de $2n$ côtés inscrits l'un et l'autre.

Dans les deux polygones de $2n$ côtés ABCD......HKL, *abcd......hkl*, par hypothèse les $2n-1$ points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$...... $\overline{HK}\cdot\overline{hk}$, $\overline{KL}\cdot\overline{kl}$ sont sur XY; donc $\overline{AL}\cdot\overline{al}$ est sur XY.

Dans les deux quadrilatères ALMN, *almn*, les deux points $\overline{LM}\cdot\overline{lm}$, $\overline{MN}\cdot\overline{mn}$ sont sur XY; mais $\overline{AL}\cdot\overline{al}$ est sur XY; donc le théorème étant vrai pour les quadrilatères, $\overline{AN}\cdot\overline{an}$ sera aussi sur XY.

Donc, le théorème étant vrai pour les quadrilatères, le sera pour les hexagones, les octogones, etc., c'est-à-dire ponr tous les polygones inscrits d'un nombre pair de côtés.

Corollaire I. Pour un système de deux polygones inscrits dans la même conique d'un nombre impair quelconque, $2n+1$, de côtés on aura un théorème analogue à celui du § 3, en prenant pour $\overline{2n+2}^{\text{ième}}$ côté, les tangentes et des sommets homologues. Ainsi, soient ABC....HKL, *abc....hkl* deux polygones inscrits de $2n+1$ côtés, désignons par TA et *ta* les tangentes aux points A et *a*; si les $2n+1$ points de concours des côtés homologues des deux polygones, sont sur une même droite XY, le point $\overline{TA}\cdot\overline{ta}$ sera sur XY; de même $\overline{TB}\cdot\overline{tb}$ sera sur XY, et ainsi de suite; on a donc ce théorème :

Théorème : Soient deux polygones ABC....KL, *abc....kl* de $2n+1$ côtés inscrits à la même conique ; si les $2n+1$ points de concours des côtés homologues sont sur une même droite XY, les $2n+1$ points de concours des tangentes menées par les sommets homologues seront sur la même droite XY.

Corollaire II. Par la théorie des polygones polaires réciproques, on arrive à un théorème général pour les polygones circonscrits aux coniques, analogue au théorème généralisé de M. Plücker, et que j'énoncerai pour deux quadrilatères.

Théorème IV. Soient ABCD, *abcd* deux quadrilatères circonscrits à la même conique, si les trois droites A*a*, B*b*, C*c* se coupent en un même point O, la droite D*d* passera aussi par ce point.

Corollaire III. Le théorème généralisé de M. Plücker, énoncé sous une autre forme, donne un théorème qui n'est autre que celui de M. Finck. (Question 53), dans lequel on remplace le système des *n* droites concourantes, par une conique, théorème que voici :

Théorème V. Soient $2n-1$ points X_1, X_2....X_{2n-1} sur la même droite; soient pris un nombre quelconque de points A_1, B_1, C_1.... sur une conique située dans le même plan que la droite; en les joignant au point X_1, les droites résultantes coupent la conique en de nouveaux points A_2, B_2, C_2..., qui joints eux-mêmes au point X_2, donnent des droites qui déterminent sur la conique de nouveaux points A_3, B_3, C_3..., et ainsi de suite. Soient ainsi A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}... les points déterminés sur la conique par les droites joignant le point X_{2n-1} aux points A_{2n-1}, B_{2n-1}, C_{2n-1}.... ; les droites A_1A_{2n}, B_1B_{2n}, C_1C_{2n}.... concourront en un même point X_{2n}, situé sur la droite X_1X_{2n-1}.

Pour démontrer la proposition, il suffit de considérer les polygones de $2n$ côtés inscrits dans la même conique $A_1A_2A_3\ldots A_{2n-1}A_{2n}$, et $B_1B_2B_3\ldots B_{2n-1}B_{2n}$.

Par hypothèse, les $2n-1$ points $\overline{A_1A_2}\cdot\overline{B_1B_2}$, $\overline{A_2A_3}\cdot\overline{B_2B_3}\ldots$ $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\cdot\overline{B_{2n-1}B_{2n}}$; ou ce qui revient au même, les points X_1, $X_2\ldots X_{2n-1}$, sont sur une même droite, donc, d'après le théorème généralisé, le point restant $\overline{A_1A_{2n}}\cdot\overline{B_1B_{2n}}$, sera aussi sur la droite X_1X_{2n-1}; ou en d'autres termes, les droites A_1A_{2n}, B_1B_{2n} concourront en un même point de la droite $X_1\ldots X_{2n-1}$. Il est d'ailleurs évident qu'il suffit de considérer le cas où l'on prend deux points A_1, B_1 sur la conique.

4. De la combinaison du théorème généralisé de M. Plücker, avec le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, se déduit une démonstration très-simple de la question 109, la question 110 se déduisant elle-même de cette dernière. Voici l'énoncé de cette question.

Théorème VI. Soit un polygone de $4m+2$ côtés inscrit à une conique; les côtés opposés donnent $2m+1$ points de rencontre; si $2m$ de ces points sont sur une même droite, le point restant sera aussi sur cette droite.

Ce théorème est comme on voit une généralisation de celui de Pascal.

Démonstration. Soit pris par exemple un polygone de dix côtés ABCDE $abcde$; les quatre points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$, $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$, $\overline{DE}\cdot\overline{de}$ sont sur une même droite XY; le point $\overline{Ea}\cdot\overline{Ae}$ sera aussi sur XY.

Menons les diagonales Ac, aC.

Nous décomposons ainsi le décagone en un hexagone ABCabc, et les deux quadrilatères opposés Acde, aCDE.

Par hypothèse $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$ sont deux points sur XY, donc le point $\overline{Ac}\cdot\overline{Ca}$ est aussi sur XY.

Considérons les deux quadrilatères, et appliquons le théo-

rème de M. Plücker, les trois points $\overline{Ac} \cdot \overline{aC}$, $\overline{cd} \cdot \overline{CD}$, $\overline{de} \cdot \overline{DE}$ sont sur XY, donc $\overline{Ae} \cdot \overline{aE}$ est aussi sur XY.

Maintenant supposons qu'au lieu d'être des quadrilatères, les figures opposées aCDE, Acde soient des polygones d'un nombre pair quelconque de côtés aCDE....KL, Acde....kl, le théorème de M. Plücker servira pour ces polygones, c'est-à-dire que, puisque par hypothèse $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$, $\overline{DE} \cdot \overline{de}$.... $\overline{KL} \cdot \overline{kl}$ sont sur la droite XY, que d'ailleurs $\overline{Ac} \cdot \overline{Ca}$ est aussi sur XY, le point $\overline{Al} \cdot \overline{aL}$ sera aussi sur XY. Mais alors le polygone ABC....KLabc....kl aura $4 + 4m - 2 = 4m + 2$ côtés. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. Par la théorie des polygones polaires réciproques, on déduira sans peine du théorème précédent la démonstration de la question 110, ou du théorème suivant.

Théorème VII. Soit un polygone de $4m + 2$ côtés circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés forment $2m + 1$ diagonales ; si $2m$ d'entre elles se coupent au même point, la diagonale restante passera aussi par le même point.

5. *Scholie.* Tous les théorèmes précédents sont applicables aux polygones inscrits ou circonscrits aux lignes cono-sphériques, ainsi que nous le verrons dans un prochain article sur la démonstration des questions 116 et 117, relatives à ces lignes.

QUESTION 160 (t. VI, p. 271).

PAR M. JULES MOUTIER,

élève du collége de Versailles.

—

1° Soient $2p$ le paramètre d'une parabole, r, r' les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités de la corde normale à la courbe au point correspondant à r, on a la relation

$$\left[r-\frac{p}{2}\right]\left[r'-\frac{p}{2}\right]=\left[r+\frac{p}{2}\right]^2.$$

2° α étant l'angle de la normale avec l'axe de la parabole

$$\cos^2\alpha=\frac{p}{2r}.$$

3° d étant la distance du foyer à la normale :

$$d^2=r\left(r-\frac{p}{2}\right).$$

(Georges Ritt.)

Solution 1. x', y' étant les coordonnées du point correspondant à r, l'équation de la normale en ce point est

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x'). \qquad (1)$$

Les abscisses x', x'' des points d'intersection de la normale avec la courbe, sont données par l'équation

$$\left[y'-\frac{y'}{p}(x-x')\right]^2=2px,$$

dans laquelle les produit des racines

$$x'x''=(p+x')^2 ;$$

or

$$r=x'+\frac{p}{2}; \quad r'=x''+\frac{p}{2};$$

donc

$$\left(r-\frac{p}{2}\right)\left(r'-\frac{p}{2}\right)=\left(r+\frac{p}{2}\right)^2.$$

2. D'après l'équation (1)

$$tg\alpha=-\frac{y'}{p}; \quad \cos^2\alpha=\frac{p^2}{p^2+y'^2}=\frac{p}{p+2x'}=\frac{p}{2r}.$$

3. Le carré de la distance du foyer à la normale,

$$y-y'+\frac{y'}{p}(x-x')=0$$

est, d'après une formule connue,

$$d^2=y'^2\frac{(p+2x')^2}{4(y'^2+p^2)}=x'\left(x'+\frac{p}{2}\right)=\left(r+\frac{p}{2}\right)r. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

QUESTION 158 (t. VI, p. 271).

PAR M. JULES MOUTIER,

élève du collége de Versailles.

—

Si $tg\alpha=\pm\sqrt{-1}$, on aura aussi $tg(a+b)=\pm\sqrt{-1}$, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de tgb.

Posons $tgb=\alpha+\beta\sqrt{-1}$; α, β pouvant être nuls, positifs ou négatifs :

$$tg(a+b)=\frac{\pm\sqrt{-1}+\alpha+\beta\sqrt{-1}}{1\mp(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=\frac{\alpha+(\beta\pm1)\sqrt{-1}}{1\pm\beta\mp\alpha\sqrt{-1}}.$$

Le module de cette expression étant l'unité, nous poserons

$$\frac{\alpha+(\beta\pm1)\sqrt{-1}}{1\pm\beta\mp\alpha\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1};$$

$$\alpha+(\beta\pm1)\sqrt{-1}=(1\pm\beta)\cos\varphi+\sin\varphi(1\pm\beta)\sqrt{-1}\mp\alpha\cos\varphi\sqrt{-1}\pm\alpha\sin\varphi,$$

ce qui revient aux deux équations :

$$\alpha=(1\pm\beta)\cos\varphi\pm\alpha\sin\varphi,$$
$$\beta\pm1=(1\pm\beta)\sin\varphi\mp\alpha\cos\varphi.$$

En éliminant $\sin\varphi$, il vient $\cos\varphi=0$; donc

$$\varphi=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\sin\varphi = \pm 1;$$

donc enfin

$$tg(a+b) = \pm\sqrt{-1}.$$

QUESTION 159 (t. VI, p. 271).

PAR M. JULES MOUTIER,
élève du collége de Versailles.

—

Si, par le foyer d'une conique, on conçoit analytiquement deux tangentes à la conique, les coefficients angulaires de ces tangentes par rapport à une droite quelconque prise pour axes, sont représentés par $\pm\sqrt{-1}$; les axes étant rectangulaires. Soit, par exemple, une ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

l'équation générale des tangentes à cette courbe est

$$y = \alpha x + \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2},$$

pour la tangente passant au foyer

$$\alpha c + \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} = 0,$$

d'où

$$\alpha = \pm\sqrt{-1}.$$

Soit maintenant une droite $y = \gamma x + \delta$, si V est l'angle qu'elle forme avec les tangentes passant par le foyer,

$$tg\mathrm{V} = \pm\frac{\pm\sqrt{-1} - \gamma}{1 \pm \gamma\sqrt{-1}},$$

et d'après le théorème précédent

$$tg\mathrm{V} = \pm\sqrt{-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SOLUTION DE LA QUESTION 149.

PAR M. DE PERRODIL,
élève du collége de la Flèche.

---

(1) $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, étant l'équation de la courbe; α, β les coordonnées du point de concours des quatre normales, les quatre points donnés sont situés sur la courbe

(2) $$c^2xy-a^2\alpha y+b^2\beta x=0.$$

Éliminons y entre (1) et (2).

(A) $$c^4x^4-2a^2c^2\alpha x^3+a^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)x^2+2a^4c^2\alpha x-a^6\alpha^2=0.$$

Soit (3) $(y-q)^2+(x-p)^2=r^2$, le cercle qui passe par trois points quelconque des points donnés. Éliminons y entre (1) et (3).

(B) $$c^4x^4-4a^2c^2px^3+2a^2(2a^2p^2+2b^2q^2+R^2c^2)x^2-4a^4R^2px+ \\ +a^4R^4-4a^4b^2q^2=0.$$

Dans cette dernière équation

$$R^2=p^2+q^2+b^2-r^2.$$

Il reste à démontrer que pour des valeurs convenables de p, q et R, les équations (A) et (B) ont les mêmes racines au signe près de l'une d'elles. Supposons donc que p, q, R soient des valeurs réellement capables de remplir ces conditions. Ajoutons (A) et (B), les derniers termes se détruiront, et l'on pourra diviser par x.

(C) $$2c^4x^3-2a^2c^2(2p+\alpha)x^2+a^2\left\{\begin{matrix}4a^2p^2+4b^2q^2+2c^2R^2 \\ +a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4\end{matrix}\right\}x+ \\ +2a^4(c^2\alpha-2R^2p)=0.$$

Retranchons (B) de (A), nous aurons une équation qui devra être identique avec la précédente.

$$(\mathrm{D})\quad 2c^2(2p-\alpha)x^3+\left\{\begin{matrix} a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4 \\ -4a^2p^2-4b^2q^2-2c^2\mathrm{R}^2\end{matrix}\right\}x^2+$$
$$+2a^2(c^2\alpha+2\mathrm{R}^2p)x-a^2(\mathrm{R}^4-4b^2q^2+a^2\alpha^2)=0.$$

Les équations de condition d'identité seront, en y joignant celle qui indique que les derniers termes de A et de B sont de signes contraires :

$$(1)\quad 4a^2p^2+4b^2q^2+2c^2\mathrm{R}^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)=2a^2(4p^2-\alpha^2),$$
$$(2)\quad 4a^2p^2+4b^2q^2+2c^2\mathrm{R}^2+(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)=\frac{2c^2(c^2\alpha+2\mathrm{R}^2p)}{2p-\alpha}.$$
$$(3)\quad \ldots\; 2a^2(2\mathrm{R}^2p-c^2\alpha)(2p-\alpha)=c^2(\mathrm{R}^4-4b^2q^2+a^2\alpha^2).$$
$$(4)\quad \ldots\ldots\; \mathrm{R}^4=4b^2q^2+a^2\alpha^2.$$

Je dis qu'effectivement (1) est conséquence des trois autres.

Substituant R^4 tirée de (4) dans le second membre de l'équation (3), et réduisant, il vient : $\mathrm{R}^2(2p-\alpha)=c^2\alpha$.

Substituant dans le second membre de l'équation (2), il devient :

$$[2c^2+2(\mathrm{R}^2+c^2)]\frac{c^2\alpha}{2p-\alpha}\quad \text{ou}\quad \mathrm{R}^2(2c^2+2\mathrm{R}^2+2c^2).$$

Par conséquent l'équation (2) devient, en remplaçant R^4 :

$$2a^2\alpha^2+2.4b^2q^2+2\mathrm{R}^2c^2=4a^2p^2+4b^2q^2+(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4);$$

ou bien, ajoutant $4a^2p^2$ aux deux membres,

$$4a^2p^2+4b^2q^2+2c^2\mathrm{R}^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)=2a^2(4p^2-\alpha^2).$$

Résultat parfaitement identique avec (1).

ANNONCE.

—

L'arithmétique de M. Lionnet et celle de M. Guilmin viennent de paraître. On en rendra compte.

SOLUTION DE LA QUESTION 150.

PAR M. DE PERRODIL,
élève du collége de la Flèche.

Soient p et q les coordonnées du point a; sa polaire aura pour équation

$$(1)\quad A^2py + B^2qx - A^2B^2 = 0;$$

la droite qui joint les pieds des coordonnées du point a diamétralement opposé, sera

$$(2)\quad qy + px + pq = 0.$$

Multiplions ces équations l'une par l'autre, nous aurons un lieu qui contiendra les quatre points b, c, b', c', savoir :

$$pq(A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2) + (A^2p^2q - A^2B^2q)y + B^2p(q^2 - A^2)x = 0.$$

La combinaison de cette équation avec celle de l'ellipse, donnera un lieu passant encore par les quatre points b, c, b', c'.

Or, en vertu de l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 = 0$, l'équation précédente se réduit à

$$(2)\quad (A^2p^2 + B^2q^2)xy + A^2q(p^2 - B^2)y + B^2p(q^2 - A^2)x = 0,$$

qu'on peut rendre identique avec

$$(A^2 - B^2)xy + B^2\alpha y - A^2\beta x = 0;$$

or l'intersection de ce lieu avec l'ellipse donne quatre points, où les normales concourent au point $[\alpha, \beta]$, donc aussi les quatre points d'intersection de l'hyperbole (2) jouissent de la même propriété. D'ailleurs les conditions d'identité, savoir :

$$\frac{A^2\beta}{A^2 - B^2} = \frac{(A^2 - q^2)B^2p}{A^2p^2 + B^2q^2};\quad \frac{B^2\alpha}{A^2 - B^2} = \frac{(p^2 - B^2)A^2q}{A^2p^2 + B^2q^2}$$

donnent immédiatement les coordonnées α, β du point de concours.

SOLUTION DES QUESTIONS 149 (p. 241), 163 (p. 272) et 164 (p. 328).

PAR M. MENTION,
élève du collége Louis le Grand.

Je m'appuierai sur ce théorème bien connu :

« Si quatre points d'une ellipse sont sur un même cercle, les côtés opposés du quadrilatère qu'ils forment sont également inclinés sur les axes. » La réciproque est vraie. (*Voyez* Géométrie de Bobilier, lignes courbes, première section, prop. 6.)

Je vais en effet prouver que les droites AB et CD sont également inclinées sur les axes, toutefois après avoir établi quelques lemmes préliminaires.

I. Équations donnant les coordonnées des pieds des normales.

Les résultats de l'élimination de x, puis de y entre les deux équations $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $b^2\beta x-a^2\alpha y+c^2xy=0$, sont :

$$c^4y^4+2b^2\beta y^3+b^2y^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-c^4)-2b^4c^2\beta y-b^6\beta^2=0,$$
$$c^4x^4-2a^2\alpha x^3+a^2x^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-c^4)-2a^4c^2\alpha x-a^6\alpha^2=0,$$

résultats qui mettent en évidence la dernière partie des propriétés énoncées (Question 163). La première partie est mise en évidence par l'équation $b^2\beta x-a^2xy+c^2xy=0$; car de ces équations on tire que les coordonnées du centre des moyennes distances sont

$$-\frac{b^2\beta}{2c^2},\ \frac{a^2\alpha}{2c^2}.$$

D'ailleurs celles du centre de l'hyperbole équilatère sont

$$-\frac{b^2\beta}{c^2}, \frac{a^2\alpha}{c^2}, \text{ etc., etc.}$$

II. Coefficient angulaire d'une corde de l'hyperbole équilatère.

$(x'y')$ $(x''y'')$ étant les extrémités de cette corde, le coefficient est

$$\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''}.$$

Si les points sont des pieds de normales, on a la relation

$$\frac{-b^2}{a^2}\frac{x'+x''}{y'+y''}=\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''}.$$

III. Actuellement soient $(x'_1\overset{A}{}y')$ $(x''\overset{B}{}y'')$ $(x_1\overset{C}{}y_1)$ $(x_2\overset{D}{}y_2)$ les pieds des normales, il s'agit de prouver que les coefficients de AB et CD sont égaux et de signes contraires, et que

$$-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=+\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1+x_2)}{y_1+y_2} \text{ ou } \frac{x'+x''}{y'+y''}=-\frac{x_1-x_2}{y^1-y_2},$$

or

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)};$$

il reste donc à prouver qu'on a

$$\frac{x'+x''}{y'+y''}=\frac{a^2}{b^2}\frac{(y_1+y_2)}{(x_1+x_2)} \text{ ou } \frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

Mais la relation n° II permet de substituer à chacun des deux membres les suivants :

$$\frac{a^2ay'y''}{b^2\beta x'x''} \text{ et } +\frac{b^4\beta x_1x_2}{a^4\alpha y_1y_2},$$

en sorte que définitivement la démonstration du théorème dépend de celle de l'égalité :

$$\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''}=\frac{b^4\beta x_1x_2}{a^4\alpha y_1y_2}.$$

Or $a^6\alpha^2 y'y''y_1y_2=b^6\beta^2 x_1x_2x'x''$, qui est rendue évidente par ce qui a été indiqué au n° I.

SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÈBRIQUES (*).

PAR M. HAILLECOURT,
ancien élève de l'École normale.

On sait que

1° Le coefficient angulaire de tout rayon vecteur infini mené par l'origine, doit être racine de l'équation $F(c)=0$, obtenue en remplaçant x par 1, y par c dans les termes du plus haut degré de l'équation de la courbe en la mettant sous la forme

$$o=f(x,y)=x^m F(c)+x^{m-1}\varphi(c)-x^{m-2}\psi(c).$$

2° Si à une racine γ de l'équation $F(c)=0$ correspond une branche infinie hyperbolique et parabolique, sa tangente à l'infini a pour cofficient angulaire cette même racine.

3° Si $y=b$ est asymptote à une branche infinie, x^m manque dans l'équation et la plus haute puissance x^k est multipliée par une fonction de y s'annulant pour $y=b$ et par suite de la forme $(y-b)^q\pi(y)$, c'est-à-dire que l'équation a la forme

$$o=f(x,y)=x^k(y-b)^q\pi(y)+x^{k-1}\ldots.$$

Il s'agit de démontrer les trois théorèmes suivants, dont le troisième est évidemment une conséquence des deux autres :

THÉORÈME I. *Le nombre total de branches infinies parallèle*

(*) Voir page 217.

à une même direction est pair pour toute courbe représentée par une équation entière et rationnelle.

THÉORÈME II. *Les branches hyperboliques sont en nombre pair.*

THÉORÈME III. *Les branches paraboliques sont en nombre pair.*

I. Soit prise pour axe des x la direction du rayon vecteur infini, $F(c)=0$ a une racine nulle et est de la forme $c^q\pi(c)$, on a donc :

$$o=f(x,y)=x^m c^q\pi(c)+x^{m-1}\ldots$$

On peut toujours supposer q impair : en effet, si q était pair, on pourrait multiplier toute l'équation par y, ou son égal cx, d'où

$$o=yf(x,y)=x^{m+1}c^{q+1}\pi(c)+x^m\ldots$$

et comme l'axe de x, ainsi introduit dans le lieu géométrique, représente *deux* branches infinies, il est clair que la démonstration n'est pas altérée.

Soit donc q impair. Si, donnant à c des valeurs déterminées $-h$, $+h$, aussi petites qu'on veut, on fait croître x à partir d'une valeur finie, les deux premiers termes $x^m h^q\pi(h)$, $-x^m h^q\pi(-h)$ donnent leurs signes aux développements correspondants. On voit ainsi qu'il y a un nombre impair de branches infinies entre les deux concourantes $y=-h$, $y=+h$, et comme ce qu'on dit pour x positif peut se répéter pour x négatif, le théorème I est démontré.

II. Soit maintenant pris pour axe des x *une* asymptote. L'équation est de la forme

$$o=f(x,y)=x^k y^q\pi(y)+\ldots$$

On peut toujours, comme plus haut, supposer q impair, et de la même manière on démontrera que tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des x il y a un nombre impair de branches infinies comprises entre deux parallèles $x=-h$, $x=+h$;

par conséquent un nombre pair de branches ayant une asymptote commune.

Donc le nombre de branches ayant leur asymptote parallèle est pair, ce qui démontre le théorème II.

Remarque. Il a été démontré que toute asymptote rectiligne est asymptote à au moins deux branches.

On voit de plus que si les deux nombres de branches infinies, ayant l'une un sens et l'autre le sens contraire, ne sont pas égaux, la différence est un nombre pair.

Scholie générale sur les branches infinies des courbes.

Elle se résume en cette proposition, qui n'a besoin d'aucune démonstration spéciale :

Soit $F(t,u)=0$ l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées t,u, assujettie seulement à la condition que le point déterminé par t,u passe à l'infini dès qu'une au moins des coordonnées prend elle-même une valeur infinie. — Si la courbe donnée par l'équation en coordonnées rectilignes $F(x,y)=0$ a une branche infinie qui ait pour asymptote la droite $y=cx+d$, la courbe $F(t,u)=0$ a une branche infinie qui a pour asymptote la ligne $u=ct+d$.

Si $t=\omega$, $u=\rho$, on a le système polaire ordinaire, et à chaque asymptote rectiligne $y=cx+d$ correspond la spirale asymptotique $\rho=c\omega+d$.

PROBLÈME 155 (p. 243).

PAR M. HUET (CHARLES-AUGUSTE),

Supposons le problème résolu. Menons HB, HC, HE (*fig.* 52), la tangente HG axe radical de E et B, et HF axe radical de E et C, soit b le rayon de B, c celui de C, et x celui de E. Nous aurons :

$$\mathrm{EH}^2 - \mathrm{BH}^2 = x^2 - b^2,$$
$$\mathrm{HC}^2 - \mathrm{EH}^2 = c^2 - x^2.$$

Ajoutant, il vient :

$$\mathrm{HC}^2 - \mathrm{BH}^2 = c^2 - b^2,$$

quantité constante; le point H sera dans l'intersection de deux lieux géométriques dont l'un est le cercle, et l'autre une droite facile à construire. H étant connu, on mènera HG tangente à B. Puis menant BG, le point de rencontre E de cette droite avec A, sera le centre cherché.

Note. M. Moutier de Versailles résout le même problème, en remarquant de suite que H est le centre radical des trois cercles B, E, C; la solution est immédiate; il y en a *huit*.

DÉMONSTRATION

du Théorème de M. Serret (Question 146, p. 216).

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

—

L'équation du paraboloïde hyperbolique étant

$$z = xy,$$

les lignes de courbure seront représentées par la double équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0.$$

Or, on tire aisément de cette équation

$$\sqrt{1+y^2}\,dx + \frac{xy\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \pm \sqrt{1+x^2}\,dy \pm \frac{xy\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0;$$

ou intégrant

$$x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{x^2+z^2} \pm \sqrt{y^2+z^2} = \text{const.};$$

ce qui prouve la proposition.

Note. Voir p. 268 ; c'est à tort que nous avons mis *cas particulier*, car le théorème n'a lieu que pour ce cas, comme on peut le voir dans le mémoire de M. Serret (*Journal de mathématiques*, XII, p. 248, 1847).

PROBLÈME DU GRAND CONCOURS DE 1847.

PAR M. J. BONNEL,
candidat admissible à l'École normale.

Fig. 55. Dans un triangle quelconque PQR, on joint deux à deux les milieux des côtés ; on forme ainsi un nouveau triangle ABC ; puis, par chacun des sommets de ce triangle on mène des tangentes à la circonférence inscrite dans le triangle donné PQR.

Ces tangentes rencontrent les côtés opposés du triangle ABC en trois points a, b, c, qui sont toujours en ligne droite.

Démonstration.

Projetons la figure de telle sorte que le cercle demeure un cercle, et que les deux points a, b soient transportés à l'infini. (La théorie de la perspective montre que cela est toujours possible de deux manières.)

La droite Aa devient alors parallèle à Bc, par suite se confond avec PQ. De même Bb se confond avec PR, et les milieux des côtés PQ, PR devenant des points de contact, il en résulte que PA $=$ PB ; le triangle circonscrit est équilatéral.

Or, dans le cas du triangle équilatéral, le théorème est évident, car les trois points de concours sont à l'infini ; donc le théorème subsiste pour un triangle quelconque.

De plus, une section conique peut être considérée comme la projection d'un cercle ; donc le théorème s'étend aux sections coniques.

Nota. Dans le prochain numéro nous donnerons la composition couronnée.

GRAND CONCOURS (année 1847).

(*Fig.* 56). Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un deuxième triangle ABC, dont les sommets A, B, C, sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets du deuxième triangle on mène au cercle les tangentes Aa, Bb, Cc, qui rencontrent respectivement en a, b, c, les côtés opposés à ces sommets. On demande de prouver que ces trois points a, b, c, sont en ligne droite.

On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle inscrit, on prend une section conique tangente aux trois côtés du triangle.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. CARON (JULES),
Né le 14 novembre 1829, à Gien (Loiret), élève interne au collége royal Saint-Louis, classe de M. AMIOT.

Après avoir effectué les constructions indiquées par l'énoncé, nous allons chercher les polaires des points a, b et c; si nous démontrons que ces polaires se coupent en un seul et même point, il sera démontré par là même que abc est une ligne droite.

a appartient à la tangente Aa, donc sa polaire passe au point de contact l; d'un autre côté, a se trouve sur la droite BC; sa polaire passe donc par le pôle de BC. Soient m, n, T, U, les points de tangence de Bb, Cc, PR, QR; B est le pôle de mT, C est le pôle de nU, d'où le pôle de BC est en D, point d'intersection des deux lignes mT, nU, et la polaire de a est Dl.

Les polaires de b et de c se déterminent par la même série de raisonnements et de constructions ; la polaire de b est Em, la polaire de c est Fn. Soit H le point d'intersection de Dl, Em, nous allons démontrer que Fn passe en H.

Ces trois droites sont trois transversales menées par les sommets du triangle DEF. Pour qu'elles se coupent en un même point, il faut et il suffit que, des six segments qu'elles interceptent sur les côtés du triangle, le produit de trois quelconques non consécutifs soit égal au produit des trois autres. Tout se réduit donc à vérifier la relation

$$(\alpha)\ \mathrm{F}l.\,\mathrm{E}n.\,\mathrm{D}m = \mathrm{E}l.\,\mathrm{F}m.\,\mathrm{D}n.$$

Nous savons que la perpendiculaire abaissée du pôle D sur la polaire BC passe par le centre ; elle est d'ailleurs perpendiculaire à PQ, qui est parallèle à BC ; donc elle passe par le point S de tangence de PQ.

Joignons de même ET, FU : ces trois lignes se coupent en un même point, qui est le centre O du cercle donné ; donc les segments qu'elles interceptent sur les côtés du triangle DEF satisfont à la relation de condition :

$$(1)\qquad \mathrm{FS.\,EU.\,DT} = \mathrm{ES.\,DU.\,FT.}$$

On a d'ailleurs, d'après les propriétés des sécantes dans le cercle :

$$\mathrm{FS.}\ \mathrm{F}l = \mathrm{F}m.\mathrm{FT.}$$
$$\mathrm{EU.}\ \mathrm{E}n = \mathrm{E}l.\ \mathrm{ES.}$$
$$\mathrm{DT.D}m = \mathrm{D}n.\mathrm{DU.}$$

En multipliant membre à membre, il vient :

$$(2)\ \mathrm{FS.\,EU.\,DT.\,F}l.\,\mathrm{E}n.\,\mathrm{D}m = \mathrm{FT.\,ES.\,DU.\,F}m.\,\mathrm{E}l.\,\mathrm{D}n.$$

Si l'on tient compte de la relation (1), on retombe sur l'égalité (α) qu'il s'agissait de vérifier ; donc les trois polaires des points a, b, c, se coupent un un même point ; donc ces trois points sont en ligne droite.

Pour une conique quelconque, la ligne qui joint le pôle et le point de contact de la tangente parallèle à la polaire est le diamètre conjugué des cordes parallèles à la polaire; donc les droites DS, ET, FU, se coupent en un même point, qui est le centre de la conique (pour la parabole, le point d'intersection est à l'infini, et les droites sont parallèles); donc la relation (1) est satisfaite. En second lieu, d'après le théorème de Carnot, des 12 segments interceptés par une conique sur les côtés d'un triangle, le produit de six quelconques non consécutifs est égal au produit des six autres; donc la relation (2) est encore satisfaite; donc l'égalité (α), conséquence des relations (1) et (2), a également lieu, et le théorème s'étend à une conique quelconque.

(*) Ce théorème a également lieu toutes les fois que les points A, B, C, sont tellement choisis sur les côtés du triangle PQR, qu'en joignant PC, QB, RA, ces transversales concourent en un même point. Nous ne ferons qu'indiquer la démonstration.

Dans l'hypothèse ci-dessus énoncée, si l'on prolonge les côtés du triangle ABC jusqu'à leur intersection avec les côtés respectivement opposés du triangle PQR, les trois points d'intersection sont en ligne droite, et cette droite est précisément la polaire du point d'intersection des lignes DS, FT, FU. Donc ces lignes se coupent en un même point, et la relation (1) est satisfaite. La relation (2) est d'ailleurs aussi satisfaite. Par suite, l'égalité (α) est vérifiée, et le théorème est généralisé.

On voit maintenant pourquoi, dans l'hypothèse particulière où A, B, C, sont les points milieux des côtés du triangle PQR, les lignes DS, ET, FU, passent par le centre de la conique; car chaque côté de ABC étant parallèle au côté op-

(*) Ce qui suit a été ajouté par le lauréat.

posé de PQR, les points d'intersection, qui, à la limite, ne cessent pas d'être en ligne droite, se transportent à l'infini ; le pôle de cette droite, située à l'infini, sera le centre de la conique; DS, ET, FU, doivent donc se couper au centre.

NÉCROLOGIE.

DURVILLE.

L'Université et l'enseignement ont fait une perte sensible dans la personne de M. Louis-Marc-Marie Jeanson-Durville, licencié ès sciences mathématiques, licencié ès sciences physiques, docteur en médecine, professeur titulaire de mathématiques élémentaires au collége royal de Saint-Louis, et chargé par alternat de la troisième division de mathématiques spéciales du même collége.

Durville est né à Paris, le 29 novembre 1805. Après avoir étudié avec une égale ardeur les diverses branches des sciences, soit mathématiques, soit naturelles, il s'était livré par choix à l'enseignement des premières. Il subit avec succès les épreuves du concours et obtint le titre d'agrégé dans deux facultés; plus tard, il se fit recevoir docteur en médecine.

Durville a peu écrit. Les deux mémoires dont il a enrichi nos Annales, *Sur les divisions rationnelles du second degré* (juillet 1845) *et des degrés supérieurs* (septembre suivant), permettent de juger ce qu'il aurait pu faire s'il s'était livré aux recherches mathématiques. Mais ses préoccupations s'étaient dirigées de préférence vers les spéculations physiques, principalement sur la force expansive des gaz en général et de la vapeur d'eau en particulier. Il était parvenu à des simplifications notables dans la construction des locomotives et autres appareils à vapeur dont l'industrie fait usage. Ses idées se trouvaient déjà réalisées sur des modèles en petit, lorsque la maladie et la mort sont venues le surprendre. L'excès du travail auquel il se livrait depuis quelque temps, pour mener ses idées à bonne fin, avait occasionné, à ce qu'il paraît, un affaiblissement général du système nerveux qui amena sa fin prématurée. Il est mort le 30 mars 1847, dans sa quarante-deuxième année, vivement regretté de tous ses collègues, et de ses élèves qui l'aimaient et l'honoraient comme un père.

Il laisse deux enfants, une fille et un fils. M. de Salvandy, ministre de l'instruction publique, dont l'active bienveillance pour le personnel de son département est devenue proverbiale, s'est empressé, *proprio motu*, d'accorder une bourse au plus jeune des deux enfants. A. J. H. V.

USAGE

De la méthode des multiplicateurs indéterminés, pour la démonstration de quelques propositions de géométrie analytique. — Remarque sur la méthode à employer pour démontrer les principaux théorèmes relatifs aux diamètres conjugués.

PAR M. E. BRASSINE,
Professeur aux écoles d'artillerie.

—

1° La méthode des multiplicateurs indéterminés, dont on donne en algèbre un exemple pour la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues, et qui est d'une si grande importance dans la mécanique, peut aussi servir à la démonstration très-simple de plusieurs propositions de géométrie analytique, comme nous allons le faire voir par les exemples suivants.

(*) *Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique.* Supposons un quadrilatère inscrit dans une conique, dont les côtés opposés ayant pour équation $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ et $y=\alpha x+\beta$, $y=\alpha'x+\beta'$, l'équation de la courbe passant par les quatre sommets du quadrilatère sera évidemment :

$$(y-ax-b)(y-a'x-b')+\lambda(y-\alpha x-\beta)(y-\alpha'x-\beta')=0. \quad (1)$$

(Cette équation renferme un coefficient indéterminé λ, qui permettrait de faire passer la courbe par un cinquième point, ce qui prouve que la forme précédente est la plus générale possible). Sur le côté $y=a'x+b'$ construisons un second quadrilatère inscrit dans la même conique et désignons les équations de ses côtés opposés par

$$y=a'x+b',\ y=a''x+b'' \text{ et } y=mx+n,\ y=m'x+n'.$$

L'équation de la courbe pourra encore prendre la forme :

$$(y-a'x-b')(y-a''x-b'')+\mu(y-mx-n)(y-m'x-n')=0, \quad (2)$$

et par une détermination convenable de λ et μ et après avoir respectivement divisé les équations (1), (2) par $1+\lambda$ et $1+\mu$, ces équations devront devenir identiques terme à terme, puisqu'elles représentent alors la mesure courbe ; cela posé, en faisant abstraction de la droite $y=a'x+b'$, commune aux deux quadrilatères, les six autres droites forment un hexagone dont les côtés, opposés deux à deux, sont :

$$y-ax-b=0,\ y-a''x-b''=0,\ y-\alpha x-\beta=0,\ y-m'x-n'=0,$$
$$y-\alpha'x-\beta'=0,\ y-mx-n=0.$$

Or, les équations (1), (2), préalablement multipliées par $\frac{1}{1+\lambda}$ et $\frac{1}{1+\mu}$ devant rester identiques quel que soit x, si

(*) Voir t. III, p. 304 ; t. VI, p. 269.

on appelle X_2, Y_2, X_3 Y_3 les coordonnées communes aux côtés opposés des deux derniers systèmes ci-dessus, on aura identiquement, d'après les équations (1) (2), les relations :

$$\frac{1}{1+\lambda}(Y_2-aX_2-b)=\frac{1}{1+\mu}(Y_2-a''X_2-b'')$$

et $$\frac{1}{1+\lambda}(Y_3-aX_3-b)=\frac{1}{1+\mu}(Y_3-a''X_3-b'').$$

Comme d'ailleurs la relation générale

$$\frac{1}{1+\lambda}(y-ax-b)=\frac{1}{1+\mu}(y-a''x-b'')$$

est évidemment satisfaite par les coordonnés X, Y, communes aux deux côtés opposés $y=ax+b$, $y=a''x+b''$, il résulte que les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone, dont les coordonnées sont X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, sont situées sur la droite dont l'équation est

$$\frac{1}{1+\lambda}(y-ax-b)=\frac{1}{1+\mu}(y-a''x-b'').$$

Remarquons que si deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit deviennent des tangentes, les deux autres côtés se confondront avec la droite qui passe par les points de contact, et l'équation (1) de la conique prendra cette forme simple $(y-ax-b)(y-a'x-b')+\lambda(y-\alpha x-\beta)^2=0$, qui peut être souvent utile.

2° Imaginons inscrits dans la section conique deux quadrilatères qui n'aient pas, comme précédemment, le côté $y-a'x-b'=0$ commun; mais supposons ce côté commun remplacé par deux côtés distincts $y-a'x-b'=0$, $y-hx-k=0$, les équations (1), (2) de la conique seront remplacées par les suivantes :

$$(y-ax-b)(y-a'x-b')+\lambda(y-\alpha x-\beta)(y-\alpha' x-\beta')=0, \quad (3)$$
$$(y-hx-k)(y-a''x-b'')+\mu(y-mx-n)(y-m'x-n')=0, \quad (4)$$

qui seront identiques pour des déterminations convenables de λ et de μ. Cela posé, considérons l'équation de la conique

$$\frac{1}{1+\lambda}(y-ax-b)(y-a'x-b')=\frac{1}{1+\mu}(y-hx-k)(y-a''x-b''), \quad (5)$$

laquelle passera par les quatre points d'intersection des droites dont les équations sont au premier membre avec celles dont les équations sont au second membre, mais d'après l'identité des équations (3), (4), les coordonnées qui annulent simultanément les deux produits

$$(y-mx-n)(y-m'x-n'), \quad (y-\alpha x-\beta)(y-\alpha' x-\beta'),$$

rendent identique l'équation (5), ce qui fait que huit points d'intersection se trouvent sur la conique (5). Mais les intersections des côtés $y-a'x-b'=0$, $y-hx-k=0$ avec la courbe, peuvent être réunies par autant de cordes que l'on voudra; d'où résulte ce théorème général : *Si un polygone d'un nombre quelconque de côtés (supérieur à sept) est inscrit dans une conique, et si l'on prend deux systèmes distincts de quatre sommets consécutifs, et qu'on termine par deux diagonales les deux quadrilatères que forment quatre sommets, ces deux diagonales, avec leurs côtés opposés dans les quadrilatères se rencontrent en quatre points; les quatre autres côtés se rencontrent aussi en quatre points, et les huit points ainsi déterminés se trouvent sur la même conique* (*).

On pourrait, en employant pour les degrés supérieurs au second, des équations de formes particulières, arriver à des théorèmes analogues aux précédents.

3° Ramenons encore aux principes précédents un théorème bien connu. Supposons que par un point quelconque o, situé dans le plan d'une conique ou même deux sécantes telles que la première coupe la courbe en deux points m', m'', et la seconde en deux points n', n'', on pourra former un

(*) Voir p. 356; le théorème de M. Paul Serret est antérieur au présent travail. Tm.

quadrilatère $m'm''n'n''$, et en faisant varier de position les sécantes qui passent toujours en o, le lieu des intersections des côtés opposés $m'n'$, $m''n''$ du quadrilatère, sera une droite. En effet, prenons le point o pour origine des coordonnées et désignons par $y-kx=0$, $y-k'x=0$ les équations de deux sécantes fixes, et par $y-\alpha x-\beta=0$, $y-\alpha' x-\beta'=0$, celles des deux autres côtés opposés du quadrilatère formé par les sécantes ; l'équation de la conique sera :

$$\frac{1}{1+\lambda}[(y-kx)(y-k'x)+\lambda(y-\alpha x-\beta)(y-\alpha' x-\beta')]=0. \quad (6)$$

Pour de nouvelles sécantes de position quelconque, l'équation de la sécante sera :

$$\frac{1}{1+\mu}[(y-hx)(y-h'x)+\mu(y-ax-b)(y-a'x-b')]=0, \quad (7)$$

et l'équation (7) devra rester identique à (6), bien que h, h', a, b, a', b', varient sans cesse ; en identifiant dans les équations (6), (7) les termes du premier degré et faisant $\frac{\mu}{1+\mu}=\Delta$, on aura :

$$\Delta(ab'+ba')=C, \ \Delta(bb')=C', \ \Delta(b+b')=C''. \quad (8)$$

C, C′, C″ étant des constantes égales aux coefficients invariables et déterminés des termes du premier degré de l'équation (6) ; mais les coordonnées des points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère sont données par des équations $y=ax+b$, $y=a'x+b'$; prenant a, a' dans ces deux dernières, les portant dans la première du groupe (8) et tenant compte des deux dernières de ce groupe, on trouve très-simplement $\frac{C''y}{x}-\frac{C'}{x}=C$, équation du lieu cherché.

4° Nous ne multiplierons pas davantage les exemples de la méthode précédente, qu'on peut employer souvent avec succès pour la détermination de droites, de plans, de courbes, assujettis à des conditions particulières.

Si par exemple on voulait faire passer un plan par une droite dont les projections auraient pour équations $P=0$, $P'=0$, et par un point; on poserait d'abord $P+\lambda P'=0$ pour l'équation du plan, et λ serait déterminé par la condition que le plan contient le point donné.

Au sujet de cette méthode élémentaire, je remarquerai que les questions sur les diamètres conjugués, dont j'ai inséré les énoncés dans ce recueil, se démontrent très-simplement, en faisant usage des valeurs des coordonnées des extrémités de ces diamètres. Si, par exemple, x', y' sont les coordonnées de l'extrémité de l'un des diamètres conjugués, $y''=\frac{b}{a}x'$, $x''=-\frac{a}{b}y'$ seront les coordonnées des extrémités du second diamètre. Ces valeurs très-simples fournissent la démonstration immédiate d'un grand nombre de propositions nouvelles et de presque tous les théorèmes connus, comme je l'ai fait voir dans le *Journal de mathématiques*, tome VII, 1842. Les auteurs qui depuis ont suivi cette méthode dans leurs traités de géométrie analytique, auraient pu ajouter, comme je l'avais fait, sans sortir du cadre des éléments, que la somme ou la différence des puissances semblables de la plupart des lignes conjuguées, est constante; ce qui donne de l'extension aux théorèmes d'Apollonius. Ainsi, dans l'ellipse, *la somme des carrés des normales ou des sous-normales conjuguées est constante.* Une de ces deux propositions renferme comme cas particulier, l'invariabilité de la sous-normale dans la parabole, parce que, lorsque le grand axe de l'ellipse est infini, une des deux sous-normales devient nulle.

Note. La méthode des *multiplicateurs,* mise en usage par Bobilier, est aujourd'hui cultivée avec grand succès en Allemagne et en Angleterre et n'a pas encore trouvé accès dans nos éléments, et avec raison. A quoi cela sert-il? à enrichir la science et en même temps à en faciliter l'accès; mais n'étant pas exigé dans les examens, cela ne sert par conséquent à rien du tout. Il est toutefois à regretter que dans un ouvrage philosophique récemment publié, sur la *correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, on se soit contenté de traiter des questions depuis longtemps débattues et rebattues, et qu'on ne dise pas un mot des *méthodes*, par exemple, des *multiplicateurs,* des procédés métamorphiques, des principes de translation, des symbolismes, des homogènes, etc., qui ont triplé nos connaissances géométriques. Existe-t-il quelque chose de plus philosophique dans la science, que les *méthodes ?* Et où la liaison entre les deux instruments que l'intelligence applique à la *quantité* est-elle plus manifeste que dans ces méthodes? Peut-être aussi que le savant auteur de tant d'écrits utiles s'est réservé de traiter ces matières dans un ouvrage spécial, qui sera accueilli avec faveur par ceux qui attachent de l'intérêt à l'histoire des progrès de l'esprit humain dans toutes les directions. Ce serait un magnifique travail, de reprendre en sous-œuvre les Essais de l'illustre Condorcet, de les rectifier et de les compléter.

NOTE SUR LA DIVISION DU TRAPÈZE

Par des transversales parallèles à ses bases.

PAR M. B. RIVALS,
Ancien professeur.

Si l'on propose de diviser un trapèze en deux parties qui soient entre elles dans le rapport $p:q$ par une transversale parallèle à ses deux bases, que nous appellerons a et b, il est avantageux de prendre pour inconnue cette transversale qui est donnée par la formule très-simple :

$$\mathrm{T}=\sqrt{\frac{pb^2+qa^2}{p+q}}.$$

La construction de cette formule au moyen de la règle et du compas est très-aisée. Il est clair que cette formule donnerait la suite de transversales qui serviraient à diviser le trapèze en n parties égales ; il suffirait de faire successivement $p=1, 2, 3\ldots$ et $q=n-1,\ n-2\ldots$ etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 151 (p. 242).

PAR M. GEORGES RITT.

—

Supposons m', m'', m''' sur une ellipse; menons par les poins m', m'' des tangentes à cette courbe que nous supposons se couper en un point T ; joignons le point m'' au point m''', et, par le point T, menons une sécante parallèle à la corde $m''m'''$; cela fait, si l'on joint le point m''' au premier point m', la ligne de jonction $m'''m'$ passe au milieu de la corde, interceptée sur la sécante partant du point T et parallèle à $m''m'''$. (Brassine.)

Prenant pour axes le diamètre parallèle à $m''m'$ et le diamètre passant par T, l'équation de la courbe sera

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

et la distance du centre au point T sera $\frac{b^2}{y'}$.

Les coordonnées étant pour $m'(-x'y')$, pour $m''(x'y')$, pour $m'''(x'', y'')$, l'équation de $m''m'''$ sera

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \text{ ou } y-y'=-\frac{b^2.x''+x'}{a^2.y''+y'}(x-x').$$

En vertu de l'équation de la courbe.

L'équation de la parallèle menée par T,

$$y-\frac{b^2}{y'}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x''+x'}{y''+y'}x. \qquad (1)$$

Enfin l'équation de $m'm'''$

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''+x'}(x+x') \text{ ou } y-y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x''-x'}{y''+y'}(x+x'). \qquad (2)$$

L'élimination directe entre (1) et (2) donne pour les coordonnées du point de rencontre

$$X=\frac{x'y''+y'x''}{2y'},$$

$$Y=\frac{a^2y'y''-b^2x'x''+a^2b^2}{2a^2y'}.$$

Et l'on vérifie aisément que la relation

$$\frac{Y}{X}=\frac{\left(\frac{y''+y'}{2}\right)}{\left(\frac{x''+x'}{2}\right)},$$

ou bien $\frac{a^2y'y''-b^2x'x''+a^2b^2}{a^2(x'y''+y'x'')}=-\frac{b^2(x''-x')}{a^2(y''-y')}$,

est satisfaite; ce qui démontre le théorème.

SOLUTION DE LA QUESTION 152 (p. 242).

PAR M. GEORGES RITT.

—

Prenons un point K dans une ellipse dont AB est un diamètre. Joignons les extrémités A, B de ce diamètre au point K, et prolongeons les droites AK, BK jusqu'aux points m', m'' où elles vont couper la courbe; menons aux points

m', m'' des tangentes à l'ellipse qui se couperont en un point extérieur T. Cela posé, la droite KT sera parallèle au diamètre conjugué du diamètre AB. (Brassine.)

Soit $a^2y^2+b^2x^2 - a^2b^2$ (1) l'équation de l'ellipse rapportée au diamètre donné AB et son conjugué pris pour axe des abscisses.

α, β coordonnées du point donné K intérieur ou extérieur à la courbe.

$$y-b=\frac{\beta-b}{\alpha}x, \qquad (2)$$

$$y+b=\frac{\beta+b}{\alpha}x, \qquad (3)$$

Équations des droites AK, BK.

L'élimination entre (1) et (2) donne pour les coordonnées du point m',

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{2a^2b\alpha(\beta-b)}{a^2(\beta-b)^2+b^2\alpha^2}, \\ y' &= \frac{b(b^2\alpha^2-a^2(\beta-b)^2)}{a^2(\beta-b)^2+b^2\alpha^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Au lieu d'éliminer entre (1) et (3) pour trouver les coordonnées du point m'', il suffit de changer dans les valeurs (4), b en $-b$ et l'on obtient :

$$x''=\frac{2a^2b\alpha(\beta+b)}{a^2(\beta+b)^2+b^2\alpha^2},$$

$$y''=\frac{-b(b^2\alpha^2-a^2(\beta+b)^2)}{a^2(\beta+b)+b^2\alpha^2}.$$

Les tangentes aux points $m'(x',y')$, $m''(x'',y'')$ ont pour équations :

$$a^2yy'+b^2xx'-a^2b^2=0,$$

$$a^2yy''+b^2xx''-a^2b^2=0;$$

d'où l'on tire, pour le point de rencontre T, les coordonnées

$$x = -\frac{a^2(y'-y'')}{x'y''-y'x''},$$
$$y = \frac{b^2(x'-x'')}{x'y''-y'x''}.$$

Substituant dans ces équations les valeurs précédentes, on trouvera : $x=0$, $y=\beta$;
ce qui démontre le théorème.

Au surplus, le théorème de M. Brassine n'est qu'un cas particulier de la théorie générale des polaires.

NOTE SUR LES EXPRESSIONS $\frac{0}{0}$, 0^0 (*voir* t. V, p. 259 et t. VI, p. 109).

I. Tout calcul commence par des opérations sur des *données*, et le calculateur qui fait emploi de ces données, y attache nécessairement un sens déterminé, fixe. Il n'en est pas ainsi de certains *résultats* de calcul, qui représentent des opérations apparentes dont on ne peut connaître et fixer le sens, qu'autant qu'on sache d'où les *résultats* proviennent. Ainsi *zéro* n'est jamais une *donnée* sur laquelle on opère en entrant dans un calcul; mais très-souvent le calcul se termine par des opérations à faire sur le zéro, par exemple une division $\frac{0}{0}$, ou une élévation de puissance 0^0; dans ces cas, le résultat n'a un sens déterminé que lorsqu'on sait d'où les zéros proviennent. Éclaircissons ceci par des exemples.

$z=\frac{y}{x}$ est l'équation du paraboloïde hyperbolique. Si on fait simultanément $x=0$, $y=0$, z devient $\frac{0}{0}$, et cette expression signifie dans ce cas que z a une valeur quelconque, c'est-à-dire que l'axe des z fait partie de la surface. Menons dans le plan xy la bissectrice $y=x$; par cette bissectrice et l'axe des z concevons un plan qui coupe la surface suivant une ligne dont l'équation prise dans ce plan est $z=\frac{x}{x}=1$, la section est donc une droite parallèle à la bissectrice; si maintenant on fait $x=0$, z a encore la forme $\frac{0}{0}$; mais cette fois cette expression, d'après sa provenance, désigne l'unité; c'est-à-dire la parallèle coupe l'axe des z à une distance 1 de l'origine. Généralement soit $z=\frac{f(y)}{F(x)}$ l'équation d'une surface; si l'on a simultanément $f(b)=0$; $F(a)=0$; alors $z=\frac{0}{0}$; la droite parallèle à l'axe des z, passant par le point $x=a, y=b$, du plan xy, est située sur la surface; menons par l'axe des z le plan $y=x$, il coupe la surface suivant une ligne ayant pour équation $z=\frac{f(x)}{F(x)}$; si l'on a simultanément $f(a)=F(a)=0$, $z=\frac{0}{0}$; et cette valeur désigne les coordonnées des points où la parallèle à l'axe des z, passant par le point $x=a$, $y=a$, rencontre la section.

Soit l'équation de la surface exponentielle $z=f(x)^{F(y)}$; supposons que l'on ait $f(a)=F(b)=0$; $x=0^0$ signifie que z est indéterminée, ou bien comme ci-dessus que la parallèle à l'axe des z, passant par le point $x=a, y=b$, appartient à la surface.

Faisons $y=x$; alors $z=f(x)^{F(x)}$ est l'équation de la section faite par le plan $y=x$; si $f(a)=F(a)=0$, $z=0^0$ désigne les coordonnées des points où la parallèle rencontre la section; prenons en particulier l'équation

$$z=\left(p^{-\frac{1}{x}}\right)^y.$$

Faisons $x=y=0$; $z=0^0$, expression de provenance indéterminée; faisons $y=x$, l'équation de la section est $z=\left(p^{-\frac{x}{x}}\right)^x=p^{-1}$; donc, dans ce cas, faisant $x=0$, $z=0^0$ a pour valeur p^{-1}.

Soit encore l'équation exponentielle $z=x^y$; faisant $x=y=0$, $z=0^0$ expression indéterminée; mais si dans la section $z=x^x$ on fait $u=0$, alors $z=0^0=1$; c'est l'objet de la démonstration suivante due au célèbre Pfaff, et rapportée par son savant disciple Mœbius (Crelle, XII, 134).

II. Lemme 1. On a toujours $(1+z)^m>1+(m-1)z$, pour z positif et $m>1$.

Lemme 2. m étant >4, on a $2^m>m^2$.

Nous nous contentons d'énoncer ces lemmes.

Soit $y=x^x$, faisons $x=\frac{1}{n}$; $y=\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$ il faut démontrer que n croissant indéfiniment, $n^{\frac{1}{n}}$ s'approche de l'unité; comme $n>1$, on a évidemment $n^{\frac{1}{n}}>1$; faisons donc $n^{\frac{1}{n}}=1+z$; $n=(1+z)^n>1+(n-1)z$, en vertu du lemme 1; d'où $n-1>(n-1)z$; $1>z$; $n^{\frac{1}{n}}<2$; ainsi $n^{\frac{1}{n}}$ est toujours compris entre 1 et 2, lorsque $n>1$.

Faisons $n=2^m n'$ où n'' est un nombre constant fini, et m pouvant croître indéfiniment; $n^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{m}{2^m n'}}\,.\,n'^{\frac{1}{2^m n'}}$; or, puisque m dépasse 4, on a $2^m>m^2$, donc $\frac{2^m n'}{m}>mn'$; et par conséquent $\frac{m}{2^m n'}<\frac{1}{mn'}$; donc $2^{\frac{m}{2^m n'}}<2^{\frac{1}{mn'}}$; $n'^{\frac{1}{n'}}<2$; donc

$n'^{\frac{1}{2^m n'}} < 2^{\frac{1}{2^m}} < 2^{\frac{1}{m}}$; donc $n^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{mn'}} . 2^{\frac{1}{m}} = 2^{\left(1+\frac{1}{n'}\right)\frac{1}{m}} = p^{\frac{1}{m}}$, et p est une quantité constante finie > 1 ; donc en croissant $n^{\frac{1}{n}}$ s'approche indéfiniment de l'unité. C. Q. F. D.

QUESTIONS.

165. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$, étant l'équation d'une ellipse ; axes rectangulaires ; $\left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1$, est l'équation de la polaire réciproque de l'enveloppe de l'ellipse, relativement au cercle $y^2 + x^2 = c^2 = a^2 - b^2$. Tm.

166. Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes, a pour équation polaire $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3}$. W. Roberts.

167. La longueur entière d'un quadrant de cette dernière courbe est égale à trois fois la différence entre l'arc infini de l'hyperbole équilatère correspondante, et son asymptote.

W. Roberts.

168. Une conique étant rapportée à des axes rectangulaires, si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point est égale à $\sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

Plucker.

169. Lorsque des paraboles ballistiques, situées dans le même plan, ont même point de départ et même vitesse initiale, elles ont la même directrice ; les sommets sont sur une même ellipse et les foyers sur une même circonférence. (R. Wolf de Bern.)

RECTIFICATION

Relative à une formule sur la parabole.

La formule donnée page 213, ligne 11, en descendant, est fautive et doit être remplacée par celle-ci : $2n\cos\gamma = l + l'$.

M. Mention a eu la bonté de nous signaler cette erreur de calcul.

ANNONCES.

SUR LE THÉORÈME 154. (Tome V, p. 242.)

PAR M. MENTION.

Ce théorème est démontré et discuté tout au long dans l'ouvrage de M. de Lafrémoire, page 213, quant à la première partie, et la seconde partie devient intuitive par la démonstration même donnée dans cet ouvrage.

Ce qui n'est indiqué ni à la page 242 des Nouvelles Annales ni dans l'ouvrage précédent, c'est que le point H peut être pris dans l'espace, et la démonstration reste la même.

Ainsi généralisé, ce théorème mène à cet autre :

« Si par le milieu d'une arête d'un tétraèdre, on mène une parallèle à l'arête opposée, qu'on répète cette construction pour chaque arête, on obtient un nouveau tétraèdre équivalent et symétrique au premier. De plus, il a même centre de gravité. »

C'est ce tétraèdre que Monge appelle *conjugué* du tétraèdre donné.

(Voir Correspondance sur l'École Polytechnique, tome I^er, p. 440, et tome II, p. 260 et 263.)

DÉMONSTRATION

De la formule de M. Brassine relative au rayon de la sphère circonscrite (p. 227).

PAR M. DE PERRODIL,
Élève de la Flèche.

Je prends trois axes rectangulaires se croisant à l'un des sommets S, et soient α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; les coordonnées des trois autres sommets A, B, C; a', b', c' étant les arêtes qui aboutissent au sommet S, nous aurons les quatre équations :

$$(1)\quad x^2+y^2+z^2=R^2;\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2;$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2=R^2;\ (x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2=R^2.$$

Retranchant les trois dernières de la première, il vient :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\frac{a'^2}{2}$$

$$\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\frac{b'^2}{2}$$

$$\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z=\frac{c'^2}{2}$$

d'où : $x=\frac{\mathrm{N}}{2\mathrm{D}}$; $y=\frac{\mathrm{N}'}{2\mathrm{D}}$; $z=\frac{\mathrm{N}''}{2\mathrm{D}}$.

$$\mathrm{D}=\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha'',$$

$$\mathrm{N}=a'^2(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+b'^2(\gamma\beta''-\beta\gamma'')+c'^2(\beta\gamma'-\gamma\beta'),$$

$$\mathrm{N}'=a'^2(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')+b'^2(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')+c'^2(\gamma\alpha'-\alpha\gamma'),$$

$$\mathrm{N}''=a'^2(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')+b'^2(\beta\alpha''-\alpha\beta'')+c'^2(\alpha\beta'-\beta\alpha').$$

La valeur de D représente six fois le volume du tétraèdre (*Géom. anal.* de M. Lefébure, p. 449). En substituant donc les valeurs de x, y et z dans la première des équations (1), on aura :

$$\mathrm{R}=\frac{1}{12\mathrm{V}}\sqrt{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}'^2+\mathrm{N}''^2}.$$

Si l'on remplace N, N', N'' par leurs valeurs, le résultat contiendra six sortes de termes; ceux qui multiplient a'^4, savoir :

$$(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2.$$

Ceux qui multiplient b'^4 et c'^4, qui se déduisent des précédents, les premiers en changeant α', β', γ' en α, β, γ, et les seconds en changeant α'', β'', γ'' en α, β, γ.

Ceux qui multiplient $2a'^2b'^2$, savoir :

$$(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2).$$

Et les deux parties analogues qui multiplient $2a'^2c'^2$ et $2b'^2c'^2$, et qui, considérées avec la précédente, contiennent symétriquement les facteurs $(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\ldots$, $(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)\ldots$ Or ces facteurs s'expriment très-simplement en fonction des arêtes; en effet, on a évidemment :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a'^2 \quad \text{et} \quad 2(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')=a'^2+b'^2-c^2.$$

Donc en multipliant les six parties précédentes par 4, et désignant le résultat par A, nous aurons $R=\frac{1}{24V}\sqrt{A}$

$$\begin{aligned}\text{et } A=&[4b'^2c'^2-(b'^2+c'^2+a^2)^2]a'^4+[4a'^2c'^2-(a'^2+c'^2-b^2)^2]b'^4\\&+[4a'^2b'^2-(a'^2+b'^2-c^2)^2]c'^4\\&+2[(b'^2+c'^2-a^2)(a'^2+c'^2-b^2)-2c'^2(a'^2+b'^2-c^2)]a'^2b'^2\\&+2[(b'^2+c'^2-a^2)(a'^2+b'^2-c^2)-2b'^2(a'^2+c'^2-b^2)]a'^2c'^2\\&+2[(a'^2+c'^2-b^2)(a'^2+b'^2-c^2)-2a'^2(b'^2+c'^2-a^2)]b'^2c'^2.\end{aligned}$$

Développant et réduisant, on trouve, toutes réductions faites :

$$A=2a^2a'^2.b^2b'^2+2a^2a'^2.c^2c'^2+2b^2b'^2.c^2c'^2-a^4a'^4-b^4b'^4-c^4c'^4,$$

ou

$$A=(aa'+bb'+cc')(aa'+bb'-cc')(aa'+cc'-bb')(bb'+cc'-aa').$$

SOLUTION DE LA QUESTION 97. (*V.* t. IV, p. 260.)

PAR M. MENTION.

Couper un triangle par une transversale, de manière que trois segments non consécutifs soient égaux. (PROUHET).

Solution. *Ajoutant au rayon du cercle circonscrit la distance du centre de ce cercle au centre du cercle inscrit, on aura la valeur du segment triple. On en obtient encore une valeur en retranchant cette distance du même rayon.*

Démonstration. Le théorème de Ptolémée donne immédiatement l'équation (x étant la valeur de ce segment).

$$2px^2-x(ab+ac+bc)+abc=0,$$

dans laquelle $2p$ est le périmètre du triangle dont a, b, c sont les côtés.

Or $\quad ab+ac+bc=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)=$

$$=\frac{2S(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{2S.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{S}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

(S représente la surface du triangle), $abc=4p\mathrm{R}r$.

Substituant ces valeurs, l'équation devient :

$$2x^2-x\frac{r}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+4\mathrm{R}r=0.$$

$$x^2-2\mathrm{R}x+2\mathrm{R}r=0.$$

D'où enfin $\quad x=\mathrm{R}\pm\sqrt{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r}.$

SOLUTION DE LA QUESTION 70 (t. II, p. 327).

PAR M. MENTION.

$$a^n+b^n=(a+b)^n-\frac{n}{1}ab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2.}a^2b^2(a+b)^{n-4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^pa^pb^p\frac{n}{1}.\frac{n-2p+1}{2}\ldots\frac{n-p-1}{p}(a+b)^{n-2p},$$

n est entier et positif.

Cette formule est évidente pour les valeurs 1 et 2 de n. Supposons donc la proposition vraie pour une certaine valeur de n, et une valeur inférieure d'une unité; multipliant les deux membres de l'équation par $a+b$, le premier membre devient alors égal à $a^{n+1}+b^{n+1}+ab(a^{n-1}+b^{n-1})$. On tire de là

$a^{n+1} + b^{n+1}$, en mettant pour $a^{n-1} + b^{n-1}$ *sa valeur*, et le reste s'achève de soi-même.

Corollaire. Si dans cette formule, on fait :

$$a = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;\quad b = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

on obtient cette formule connue :

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}(\cos\varphi)^{n} - n2^{n-3}(\cos\varphi)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2p+1}{2} \cdots \frac{n-p-1}{p} 2^{n-2p-1} \cos\varphi^{n-2p}.$$

(Voir t. V, p. 223, formule 43, et t. VI, p. 95.)

THÉORÈME.

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = (a+b)^{n-1} - (n-2)ab(a+b)^{n-3}$$

$$+ \frac{(n-4)(n-3}{1.\quad 2.} a^2b^2(a+b)^{n-5} - \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\quad 2.\quad 3.} a^3b^3(a+b)^{n-7}$$

$$+ (-1)^p \frac{n-2p.n-2p+1.n-2p+2\ldots n-p-1}{1.\quad 2.\quad 3.\quad p.} \cdot a^p b^p (a+b)^{n-2p-1}.$$

(n est entier et positif.)

La démonstration est identique à la précédente.

On peut aussi tirer de là des formules trigonométriques connues.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME de la page 197.

PAR M. MENTION.

J'emploie la figure 40; N est le point de concours de la hauteur partant du point A dans le triangle ADE, avec celle qui aboutit au point O dans le triangle OCE.

Le théorème de la page 197 peut se démontrer plus simplement comme il suit.

Les deux triangles Bmn et Npl sont semblables, et fournissent la proportion $\frac{mn}{lp} = \frac{Bn}{Np}$: d'après le lemme que nous avons rappelé (1845, p. 655) $Bn = 2.\frac{AC}{2}\cot B = AC\cot B$.

(Ce lemme apprend en effet que Bn est le double de la distance du centre du cercle circonscrit à ABC, au côté AC). D'ailleurs $Np : AC :: pK : CK$, or, comme $pK = CK\cot CED$, $Np = AC\cot E$.

Donc $\frac{mn}{lp} = \frac{\cot B}{\cot E}$ est, dans le cas actuel, $B = E$. . . .

QUESTIONS D'EXAMEN ;

Sur le mouvement uniforme ; droites et cercles.

—

DROITES.

I. Deux molécules décrivent chacune une droite, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données ; on connaît aussi les positions simultanées des deux mobiles à un instant déterminé ; il faut chercher les positions des deux mobiles lorsque leur distance est un minimum.

Solution. v = vitesse du premier mobile ; v' = vitesse du second mobile ; $II' = d$ = plus courte distance des deux droites ; A et A', deux points où se trouvent les deux mobiles à un instant déterminé ; N et N', deux points où se trouvent les mobiles après le temps t, compté depuis le dé-

part de la position A, A'; faisons $AI = b$, $A'I' = b'$; $NN' = z$;
on a $IN = b + vt$; $I'N' = b' + v't$;

$$z^2 = (vt + b)^2 + (v't + b')^2 - 2(vt + b)(v't + b')\cos\gamma + d^2;$$

où γ est l'angle des deux droites.

Faisons $z^2 = At^2 + Bt + C$; $A = v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\gamma$;
$B = 2v(b - b'\cos\gamma) + 2v'(b' - b\cos\gamma)$ $C = b^2 + b'^2 - 2bb'\cos\gamma + d^2$;
A est le carré de la résultante des deux vitesses, prises suivant leurs directions; C est le carré de la distance AA'.

On a aussi $z^2 = A\left(t + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}$; ainsi z^2 est au minimum lorsque $t = -\frac{B}{2A}$.

DISCUSSION.

1° $d > 0$; alors z ne peut jamais être nul; donc $4AC - B^2 > 0$; $z = \sqrt{\frac{4AC - B^2}{4A}}$ donne la distance minimum; et pour ce cas $IN = b - \frac{Bv}{2A}$; $I'N' = b' - \frac{Bv'}{2A}$; les signes de b, b', v, v' déterminent le signe de B, et par conséquent les positions des points N et N' relativement aux points I et I'.

En développant $4AC - B^2$, on trouve :

$$4AC - B^2 = 4\sin^2\gamma\,[bv' - b'v]^2 + d^2\,[v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\gamma],$$

où l'on voit qu'en effet $4AC - B^2$ est essentiellement positif.

Si $\gamma = 0$, les droites sont parallèles; de même, si $\gamma = 2^q$. C'est le problème des *courriers*, selon qu'ils vont dans le même sens ou dans des sens opposés. On suppose ordinairement $d = 0$;

2° $d=0$; les droites sont dans un même plan ; et au cas du minimum,

$$z=\frac{1}{\sqrt{A}}(bv'+b'v).$$

II. La droite NN' décrit un hyperboloïde parabolique, et lorsque les deux droites sont dans un même plan, l'enveloppe de la droite NN' est une parabole (*Voy.* t. I, p. 449) ; cette parabole est tangente aux deux droites données et à la droite AA' : il suffit donc de connaître encore deux autres positions simultanées, pour que la parabole soit entièrement déterminée.

III. Le lieu du milieu de NN' est une droite, car le centre de gravité des deux mobiles décrit une droite (t. II, p. 241), d'où l'on déduit ces deux théorèmes :

Théorème 1. Une parabole étant inscrite dans l'angle MIM'; M et M' étant les points de contact, le lieu du milieu d'une portion de tangente quelconque à la parabole interceptée dans l'angle est une droite passant par les milieux de IM et de IM'.

Théorème 2. Une conique étant inscrite dans l'angle MIM', M et M' étant les points de contact, si l'on mène une troisième tangente parallèle à MM', rencontrant IM en N et IM' en N', prenant sur IM un point O, tel que les quatre points M, N, I, O soient harmoniques; de même un point O' sur la droite IM', une quatrième tangente quelconque rencontrera les trois tangentes et la droite OO' en quatre points harmoniques.

Ce théorème est une conséquence perspective du précédent.

IV. *Problème.* Trois mobiles parcourant trois droites d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données et des positions initiales données, trouver les positions où l'aire du triangle ayant pour sommet les trois mobiles, est un minimum.

Solution. Même notation que dessus; soient z, z', z'', les côtés du triangle et u son aire; on a :

$$u^2 = 16\ [\,2z^2z'^2 + 2z^2z''^2 + 2z'^2z''^2 - z^4 - z'^4 - z''^4\,]\ ;$$

remplaçant z^2, z'^2, z''^2, etc., par leurs valeurs en fonction de t on obtient $u^2 = Mt^4 + Nt^3 + Rt^2 + St + P$; lorsque le second membre peut devenir nul, alors les trois mobiles peuvent être sur la même droite ; ce cas-là excepté, le second membre égalé à 0 ne peut avoir de racines réelles et M et N sont de même signe; il est d'ailleurs évident, en faisant le calcul, que M et N sont essentiellement positifs. Pour trouver les valeurs extrêmes de u, on a l'équation $4Mt^3 + 3Nt^2 + 2Rt + S = 0$, équation qui a toujours au moins une racine réelle ; il reste ensuite à discuter si l'on obtient un maximum ou un minimum.

V. Dans le cas de quatre mobiles, on peut se proposer de trouver les positions des quatre mobiles tels que, formant les sommets d'un tétraèdre, le volume de ce tétraèdre soit un maximum ou un minimum, on parvient à une équation du 5^{ème} degré.

CERCLES.

VI. Soit A le point de départ du mobile, et X le centre, T le nombre d'unités de temps qu'il met à parcourir les quatre quadrants d'une vitesse uniforme, $V = \frac{4^q}{T}$, la vitesse angulaire; $\theta = nT + t$, le temps exprimé en unités de temps, où n est un nombre entier positif et t un nombre plus petit que T ; E étant l'espace angulaire parcouru, on aura évidemment $E = n4^q + Vt$ (1).

Soit maintenant une seconde circonférence, dans le plan de la première; nous désignons les quantités analogues par les mêmes lettres accentuées, et soit a l'angle que font les deux rayons menés aux mobiles lors de leur départ simultané, l'un de A, l'autre de A'; au bout du temps θ, on a évidemment $\theta = n\mathrm{T} + t = n'\mathrm{T}' + t'$ (2), et l'angle que formeront alors les deux rayons sera $a \pm \mathrm{V}t \pm \mathrm{V}'t'$, en donnant aux vitesses les signes convenables. D'après cette formule, on peut résoudre les diverses questions qu'on peut proposer sur ce genre de mouvement. Si les rayons partent du parallélisme, on a $a = 0$; par exemple, si l'on demande après quel temps les rayons feront un angle égal à b, on aura $b = a \pm \mathrm{V}t \pm \mathrm{V}'t'$; ensuite il faut avoir égard à l'équation indéterminée (2) qui donnera le nombre de solutions périodiques.

VII. Deux mobiles parcourent d'un mouvement uniforme deux circonférences situées dans le même plan, on demande quand leur distance sera un maximum ou un minimum.

Solution. Soient O et O' les centres des deux circonférences, et M et M' les positions simultanées des deux mobiles; $\mathrm{OO}' = d$, $\mathrm{MO} = r$ et $\mathrm{M'O'} = r'$; $\mathrm{MOO}' = \varphi$; $\mathrm{MO'O} = \varphi'$, on aura :

$$(d - r\cos\varphi - r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi - r'\sin\varphi')^2 = \mathrm{MM}'^2.$$

Or, d'après ce qui précède, φ et φ' sont donnés en fonction de t; on pourra donc trouver l'équation de condition pour qu'il y ait maximum ou minimum.

VIII. Lorsqu'on a plusieurs circonférences situées dans un même plan et décrites par des mobiles d'un mouvement uniforme, étant données les positions initiales des rayons, on pourra trouver les positions de ces mêmes rayons après un temps donné, et résoudre les problèmes sur les positions de ces rayons.

IX. Lorsque tous ces cercles sont concentriques, on a le problème du cadran. La question suivante a été proposée cette année aux examens de Paris : Les trois aiguilles, celle des heures, des minutes et des secondes, étant sur midi, on demande quand l'une de ces aiguilles sera la bissectrice de l'angle formé par les deux autres. Nous engageons les élèves à prendre des exemples numériques et à discuter soigneusement les signes des vitesses et la position des rayons ; si l'on voulait le faire pour le cas général, cela entraînerait à trop de longueurs ; nous avons indiqué les moyens de solution. (Voir t. V, p. 35.) Tm.

QUESTIONS PROPOSÉES

au concours d'admission à l'école normale en 1847.

SUJET DE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Première question.

On donne, sur un plan, un nombre quelconque de points A, B, C, D ; par une origine fixe O, choisie à volonté sur ce plan, on mène un nombre infini de droites, et sur chacune d'elles on porte une longueur OM réciproquement proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées, sur cette droite, des différents points A, B, C, D,..... on demande :

1° Le lieu des positions des points M obtenus de cette manière ;

2° S'il est toujours possible, les points A, B, C, D ..... restant fixes, de choisir l'origine O, de telle sorte que ce lieu devienne un cercle ;

3° Examiner si la courbe cherchée est toujours fermée pour toutes les positions du point O.

4° Lorsque cela a lieu, trouver où le point O doit être placé pour que, les points A, B, C, D restant fixes, l'aire totale soit la plus grande possible.

Deuxième question.

Exposer la théorie des annuités et discuter le problème dans les différents cas qu'il présente.

SUJET DE COMPOSITION DE PHYSIQUE.

1° Théorie des verres de divergence.

Y a-t-il quelque utilité à considérer le cas fictif d'un objet virtuel ?

2° Propriétés générales des vapeurs.

DISCUSSION

Des valeurs générales fournies par la résolution de trois équations du premier degré entre trois inconnues.

PAR M. AMIOT.

(Extrait du Précis analytique des travaux de l'Académie de Rouen, 1842.)

—

1. Il suffit de parcourir un traité d'algèbre pour être frappé, dès le commencement, d'une lacune importante. On trouve, en effet, à la suite des différentes méthodes usitées pour la résolution des équations du premier degré, une discussion complète des valeurs générales fournies, soit par une équation à une seule inconnue, soit par deux équations à deux inconnues; mais là s'arrête ordinairement toute discussion. Certains auteurs présentent, il est vrai, quelques remarques générales sur les valeurs fournies par trois équations entre trois inconnues, mais aucun, à ma connaissance du moins, ne donne une véritable discussion des circonstances

diverses de compatibilité ou d'incompatibilité que peut offrir un système de trois équations entre trois inconnues (*).

Cette discussion serait-elle donc jugée trop peu importante pour prendre place dans un traité élémentaire ? Mais, quand on applique l'analyse à la géométrie aux trois dimensions de l'espace, la discussion des coordonnées de l'intersection de trois plans donnés par leurs équations, suppose connue la discussion algébrique des valeurs générales fournies par ces trois équations ; et, pour les surfaces du deuxième ordre, la distinction entre celles qui sont douées de centre et celles qui en sont dénuées, repose entièrement sur cette même discussion. Aussi, dans la plupart des traités de géométrie analytique, admet-on comme prouvés, en algèbre, plusieurs résultats dont la démonstration ne se trouve pas dans les traités spéciaux. Il y a donc là une véritable lacune qu'il importe de combler. C'est dans ce but que j'ai entrepris ce travail et que j'ai l'honneur de le présenter à l'Académie.

Je ferai d'abord observer qu'il ne me paraît pas possible d'entrer dans la discussion complète de trois équations à trois inconnues, en ne considérant que les valeurs générales des inconnues, attendu que des circonstances fort différentes d'indétermination, par exemple, peuvent se traduire par une même forme des inconnues. Aussi, aux valeurs générales ordinaires, j'ai joint des inconnues auxiliaires, qui m'ont permis d'entrer dans toutes les particularités de la question. Ces inconnues auxiliaires ne sont autres que les valeurs des coefficients indéterminés dont on fait ordinairement usage par la méthode d'élimination due à Bezout. Toutefois, j'ai apporté à cette méthode une modification indiquée par M. Poulet-Delisle, qui consiste à multiplier chaque équation par un coefficient indéterminé.

On a ainsi trois inconnues auxiliaires, qui, pour chaque

(*) V. *Manuel d'algèbre*, p. 222, 2e édit. Tm.

cas, ne dépendent que de deux équations. On peut donc en prendre une arbitrairement, et par conséquent la choisir de telle sorte que les autres soient entières. Il en résulte plus de simplicité dans les calculs, et surtout plus de symétrie dans la discussion.

2. Soient les trois équations générales :

$$(1)\quad ax+by+cz=d,$$
$$(2)\quad a'x+b'y+c'z=d',$$
$$(3)\quad a''x+b''y+c''z=d''.$$

Je les multiplie respectivement par les indéterminées m, n, p, j'ajoute les deux premières, et je soustrais la troisième, ce qui me donne :

$$(4)\quad (am+a'n-a''p)x+(bm+b'n-b''p)y+(cm+c'n-c''p)z=$$
$$=dm+d'n-d''p.$$

Je puis supposer m, n et p, déterminées de manière que l'on ait :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} bm+b'n=b''p, \\ cm+c'n=c''p, \end{array}\right. \text{ d'où je déduis } \left\{\begin{array}{l} m=c'b''-b'c'' \\ n=bc''-cb'' \end{array}\right.$$

en posant $p=bc'-cb'$.

On obtient ainsi :

$$(6)\quad x=\frac{dm+d'n-d''p}{am+a'n-a''p}$$
$$=\frac{d'(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')+d''(cb'-bc')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')+a''(cb'-bc')}.$$

Je puis pareillement supposer qu'on attribue à m, n et p des valeurs qui annulent les coefficients de x et z, et l'on a :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} am+a'n=a''p, \\ cm+c'n=c''p, \end{array}\right. \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} m=c'a''-a'c'' \\ n=ac''-ca'' \end{array}\right.$$

en posant $p=ac'-ca'$

Et il vient :

$$(8)\quad y=\frac{dm+d'n-d''p}{bm+b'n-b''p}$$
$$=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')+d''(ca'-ac')}{b(e'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')+b''(c'a-ac')}$$

Enfin, disposant de m, n, et p de manière à annuler les coefficients de x et y, ce qui donnne :

$$(9)\ \left\{\begin{array}{l} am+a'n=a''p \\ bm+b'n=b''p \end{array}\right. \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} m=b'a''-a'b'' \\ n=ab''-ba'' \end{array}\right.$$

en posant $p=ab'-ba'$

On obtient :

$$(10)\ z=\frac{dm+d'n-d''p}{cm+c'n-c''p}$$

$$=\frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')+d''(ab'-ba')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')+c''(ab'-ba')}.$$

3. Ces valeurs générales de x, y et z, substituées dans les équations (1), (2) et (3), jouissent toujours de la propriété de les vérifier analytiquement. Mais, d'après les valeurs particulières attribuées aux coefficients a, b, c, d, a', b'.... celles des inconnues x, y et z, peuvent affecter diverses formes, suivant que les équations sont compatibles, distinctes, incompatibles, ou conséquence les unes des autres. Ce que je me propose, dans cette discussion, c'est d'établir des caractères d'après lesquels on puisse, dans tous les cas, déduire la signification des équations (1), (2) et (3) des valeurs trouvées pour x, y et z, en y joignant, au besoin, celles des inconnues auxiliaires m, n et p. Je distinguerai plusieurs cas :

Premier cas. Je supposerai d'abord qu'aucune des valeurs inconnues auxiliaires m, n ou p, ne soit égale à zéro dans chacun des systèmes (5), (7) et (9). Il peut arriver alors que les valeurs générales de x, y et z soient toutes les trois finies et déterminées, infinies ou indéterminées.

4. 1° Je suppose que les valeurs de m, n et p, déduites des deux équations $\left\{\begin{array}{l} mb+nb'=pb'' \\ mc+nc'=pc'' \end{array}\right.$ ne vérifient pas $ama'+n=a''p$, le dénominateur commun des valeurs de x, y et z sera différent de zéro, et les valeurs de ces inconnues seront toutes les trois finies et déterminées. Les trois équations proposées

seront distinctes et compatibles. Si les valeurs des inconnues sont positives, elles répondront *généralement* à la question dont les équations sont la traduction algébrique ; à moins, toutefois, que cette question ne renferme quelques conditions non exprimées dans les équations, et auxquelles ne puissent satisfaire les valeurs trouvées pour les inconnues, comme serait, par exemple, celle de n'admettre que des valeurs entières, lorsque l'on trouverait pour x, y et z des nombres fractionnaires. Si une ou plusieurs de ces valeurs sont négatives, on sait que, prises toutes positivement, elles conviendront généralement, non à la question telle qu'elle a été mise en équation, mais à cette question modifiée dans son énoncé, ou simplement mise autrement en équation, de telle manière que l'on obtienne de nouvelles équations différant de celles qu'on a résolues par le signe de tous les termes qui renferment celles des inconnues qui ont été trouvées négatives.

5. 2° Si les valeurs de m, n et p, tirées des deux équations $\left\{\begin{array}{l} mb+nb'=pb'' \\ mc+nc'=pc'' \end{array}\right.$ vérifient $am+a'n=pa''$, et ne vérifient pas la relation $md+nd'=pd''$, les valeurs de x, y et z seront infinies toutes les trois ensemble. Alors les équations (1), (2) et (3) seront incompatibles, car l'équation (4), qui peut être substituée à l'une d'elles, devient, quand on y remplace m, n et p par leur valeur

$$0.x+0.y+0.z=dm+d'n-pd'',$$

équation absurde d'après l'hypothèse. Ainsi, les équations proposées sont incompatibles toutes trois ensemble ; mais je dis *qu'elles sont compatibles deux à deux, et forment, par conséquent, trois systèmes distincts chacun de deux équations compatibles et indéterminées.* En effet, en ne considérant que les équations (1) et (2), par exemple, on en tirera, après avoir posé $d-ax=k$, et $d'-a'x=k'$

$$y=\frac{kc'-ck'}{bc'-cb'} \text{ et } z=\frac{bk'-kb'}{bc'-cb'}.$$

Valeurs nécessairement finies et déterminées, quelle que soit x, puisque $bc'-cb'$, qui est la valeur de p dans le système (5), est supposée différente de zéro. On verrait de même que les équations (1) et (3), puis (2) et (3), forment des systèmes compatibles. Mais chacun de ces systèmes ne renfermant que deux équations, et comprenant trois inconnues, admet une infinité de solutions.

6. 3° Je suppose, enfin, que les valeurs de m, n et p, déduites de $\begin{cases} mb+nb'=pb'' \\ nc+nc'=pc'' \end{cases}$ vérifient aussi à la fois les deux relations $am+a'n=pa''$ et $dm+d'n=pd''$, les valeurs de x, y et z seront toutes trois de la forme $\frac{0}{0}$; je dis que, dans cette hypothèse, *l'une des équations proposées sera conséquence des deux autres, et que, par conséquent, le système proposé se réduira à un seul système de deux équations entre trois inconnues.* En effet, l'équation (4) pouvant toujours être substituée à (3), par exemple, on aura, au lieu du système proposé, les équations (1) et (2), et $0.x+0.y+0.z=0$; cette dernière équation étant vérifiée évidemment par tout système de valeurs de x, y et z, qui vérifient (1) et (2), est une conséquence de celles-ci, et par conséquent, il ne reste que les équations (1) et (2), entre les trois inconnues x, y et z. On verrait, d'ailleurs, comme au numéro précédent, qu'elles sont compatibles.

7. Les équations (1), (2) et (3) peuvent toujours être considérées comme représentant trois plans; les valeurs générales de x, y et z sont les coordonnées de leur point d'intersection. Dans la première hypothèse, celle de x, y et z finies

et déterminées, les trois plans se coupent en un même point, lequel est le sommet d'un angle trièdre, dont les trois plans donnés sont les trois faces.

Dans la deuxième, celle de x, y et z infinies, les trois plans ne se coupent plus en un même point, mais ils se coupent deux à deux, suivant trois droites parallèles; ils forment ensemble un prisme triangulaire.

Enfin, dans le cas de x, y et z de la forme $\frac{0}{0}$, les trois plans se coupent suivant une seule et même droite, laquelle est complétement déterminée par deux quelconques des plans qui la contiennent.

7. *Deuxième cas.* Je suppose nulle une seule des valeurs de m, n ou p, dans un seul des systèmes (5), (7) ou (9). Soit par exemple $p=bc'-cb'=0$, dans le système (5). On ne pourra plus, dans cette hypothèse, substituer l'équation (4) à l'une quelconque des équations (1), (2) et (3). Car l'hypothèse $p=o$ en fait une combinaison des deux seules équations (1) et (2). C'est qu'effectivement ces deux équations sont suffisantes pour faire connaître x; car, de $bc'-cb'=o$, on déduit $b'=br$ et $c'=cr$, en posant $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=r$, et, par la substitution de ces valeurs, l'équation (2) devient $a'x+r(by+cz)=d'$, laquelle, combinée avec (1), donne immédiatement $x=\frac{dr-d'}{ar-a'}$, valeur finie et déterminée. En effet, $ar-a'=\frac{ab'-ba'}{b}$, quantité essentiellement différente de zéro, puisqu'on suppose la valeur de p du système (9) différente de zéro.

Les valeurs de y et z sont aussi finies et déterminées, car, si l'on remplace x par la valeur précédente dans les équations (1) et (3), elles deviennent de la forme $by+cz=k$ et $b''y+c''z=k'$, et l'on en déduit $y=\frac{kc''-k'b''}{bc''-cb''}$ et

$z = \frac{bk' - kb''}{bc'' - cb''}$ valeurs nécessairement finies et déterminées, puisque l'on suppose la valeur de n du système (5) différente de zéro.

Si, d'ailleurs, on introduit l'hypothèse $bc' = cb'$ et $b' = brc' = cr$ dans la valeur générale des inconnues, on a d'abord

$$x = \frac{dr(cb'' - bc'') + d'(bc'' - cb'')}{ar(cb'' - bc'') + a'(bc'' - cb'')}$$
$$= \frac{(dr - d')(cb'' - bc'')}{(ar - a')(cb'' - bc'')} = \frac{dr - d'}{ar - a'}.$$

Quant à celles de y et z, leurs numérateurs n'éprouvent aucune modification importante, mais leur dénominateur commun devient $(ar - a')(bc'' - cb'')$, et ne peut être nul, puisque chacun des facteurs $ar - a'$ et $bc'' - cb''$, est supposé différent de zéro.

Ainsi, dans cette hypothèse, *les valeurs de x, y et z, qui vérifient les équations* (1), (2) *et* (3), *sont finies et déterminées; les équations sont distinctes et compatibles;* elles représentent trois plans qui se coupent en un même point.

8. *Troisième cas.* Je suppose nulles deux des valeurs de m, n ou p, dans un seul des systèmes (5), (7) ou (9). Soit, par exemple, $m = 0$ et $p = 0$ dans (5); de $bc' = cb'$ et $b'c'' = c'b''$, on déduit $bb'c'c'' = cb'c'b''$ ou $bc'' = cb''$, et partant, on a aussi $n = o$ dans le même système. Dans cette hypothèse, l'équation (4) n'offre aucun sens, et la valeur générale de x est $\frac{0}{0}$, tandis que celle de y et z se présentent sous la forme de $\frac{0}{0}$ ou de ∞.

Pour interpréter ces valeurs, remontons aux équations proposées et observons que l'on a $b' = br$, $c' = cr$, $b'' = r'b$ et $c'' = r'c$, en posant $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r$ et $\frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} = r'$. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (2) et (3), le système proposé devient :

$$\begin{array}{lll} (1)\ ax+by+cz=d & & ax+v=d \\ (2)\ a'x+r(by+cz)=d' & \text{ou bien} & a'x+rv=d' \\ (3)\ a''x+r'(by+cz)=d'' & & a''x+r'v=d'' \end{array}$$

En posant, pour abréger, $v=by+cz$.

On peut éliminer v ou y et z, soit entre (1) et (2), soit entre (1) et (3), soit enfin entre (2) et (3); on obtient ainsi les trois valeurs de x :

$$x=\frac{rd-d'}{ar-a'},\quad x=\frac{r'd-d''}{r'a-a''},\quad x=\frac{r'd'-rd''}{r'a'-ra''}.$$

Lesquelles sont nécessairement finies et déterminées. Car on a $ar-a'=\frac{ab'-a'b}{b}$, et cette quantité ne peu être nulle, puisque nous supposons la valeur de p du système (9) différente de zéro. On verra, de même, que les dénominateurs des deux autres valeurs de x ne peuvent être nuls.

A chacune de ces trois valeurs de x, on devra joindre une infinité de valeurs de y et z, astreintes à la seule condition de vérifier l'équation en y et z résultant de la substitution de x dans la troisième équation du système proposé. Ainsi, ce système se décomposera dans les trois suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{rd-d'}{ar-a'} \\ by+cz=v,\ \text{en posant}\ v=d-a\frac{rd-d'}{ar-a'} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{r'd-d''}{r'a-a''} \\ by+cz=v',\ \text{en posant}\ v'=\frac{d'}{r}-\frac{a'(r'd-d'')}{r(r'a-a'')} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{r'd'-rd''}{r'a'-ra''} \\ by+cz=v'',\ \text{en posant enfin}\ v''=\frac{d''}{r'}-\frac{a''(r'd'-rd'')}{r'(r'a'-ra'')}. \end{array}\right.$$

Ainsi, dans cette hypothèse, *les trois équations proposées sont incompatibles toutes trois ensemble ; mais, en les réunissant deux à deux, on a trois systèmes de deux équations compatibles.* Elles représentent trois plans, qui se coupent deux à deux, suivant des droites parallèles, et de plus parallèles au plan des (y, z).

9. Il peut arriver que ces trois systèmes soient distincts, ou se confondent en un seul. En effet, les trois valeurs précédentes de x seront toutes trois différentes, ou bien toutes les trois égales entre elles, car, en égalant une de ces valeurs successivement à chacune des deux autres, on trouve la même condition :

$$d'a'' - a'd'' + r(ad'' - da'') + r'(da' - ad') = 0.$$

Si, en supposant cette relation satisfaite, on y remplace r et r' par leurs valeurs, on trouve :

$$b(d'a'' - a'd'') + b'(ad'' - da'') + b''(da' - ad') = 0$$

ou $$c(d'a'' - a'd'') + c'(ad'' - da'') + c''(da' - ad') = 0,$$

quantités qui ne sont autres que les numérateurs des valeurs générales de y et z. Or, nous savons que le dénominateur de ces mêmes valeurs est nul ; *donc les trois systèmes précédents seront distincts ou se réduiront à un seul, suivant que les valeurs de* y *et* z (8) *et* (10), *seront de la forme* ∞ *ou de celle* $\frac{0}{0}$. *Dans le premier cas, on aura trois droites distinctes*, et, dans le second, ces trois droites se confondront en une seule.

10. *Quatrième cas.* Je suppose qu'une seule des valeurs de m, n ou p soit nulle dans deux des systèmes (5), (7) ou (9) ; soit, par exemple, $p = 0$ dans (5) et (7), on aura $bc' = cb'$ et $ac' = ca'$, d'où résulte $ab' = ba'$, et partant la valeur p sera aussi nulle dans le système (9). Si l'on pose

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} = r,$$

l'équation (4) devient $(m+nr)(ax+by+cz-d)=0$, laquelle est identique, quelles que soient les valeurs qu'on attribue à x, y et z puisque les valeurs de m et n, de chacun des systèmes (5), (7) et (9), satisfont à la relation $m+nr=0$.

Si, dans l'équation (2), on remplace a', b' et c' par les valeurs ar, br et cr, on a $r(ax+by+cz)=d'$, équation qui est incompatible avec (1), ou qui en est une conséquence, suivant que $\frac{d'}{v}$ égale ou n'égale pas d. Par suite de ces mêmes hypothèses, les valeurs générales de x, y et z deviennent

$$x=\frac{d(b''c'-c''b')+d'(bc''-cb'')}{a(b''c'-c''b')+a'(bc''-cb'')}$$
$$=\frac{(bc''-cb'')(d'-dr)}{(bc''-cb'')(a'-ar)}=\frac{d'-dr}{a'-ar}.$$
$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')}$$
$$=\frac{(dr-d')(ca''-ac'')}{(br-br)(ca''-ac'')}=\frac{dr-d'}{0}$$
$$z=\frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')}$$
$$=\frac{dr-d')(ba''-ab'')}{(cr-cr)(ba''-ab'')}=\frac{dr-d'}{0},$$

valeurs toutes trois infinies, si d' est différent de dr, c'est-à-dire si les équations (1) et (2) sont incompatibles, et toutes trois de la forme $\frac{0}{0}$, si $dr=d'$, ou si (1) et (2) sont conséquences l'une de l'autre.

Dans le premier cas, chacune des équations (1) *et* (2), *jointes à l'équation* (3), *forment deux systèmes compatibles et distincts*. En effet, si l'on attribue, dans (1) et (3), par exemple, une valeur quelconque à x, on aura

$$y=\frac{kc''-ck'}{bc''-cb''} \text{ et } z=\frac{bk'-kb''}{bc''-cb''},$$

valeurs nécessairement finies et déterminées, puisque la valeur de n, dans le système (5), est supposée différente de zéro. On verrait de même que les équations (2) et (3) forment un système compatible. Ces deux systèmes se réduiront à un seul, si les équations (1) et (2) sont conséquence l'une de l'autre. Donc, dans l'hypothèse présente, *les équations* (1), (2) *et* (3) *se réduisent à deux systèmes de deux équations compatibles et distinctes, ou bien à un seul système, suivant que les valeurs générales des inconnues sont infinies ou indéterminées.* Elles représentent, dans le premier cas, trois plans, dont deux sont parallèles, et coupent par conséquent le troisième suivant deux droites parallèles; dans le deuxième cas, les deux plans parallèles sont confondus en un seul.

11. Si, avec les trois valeurs de p nulles, on suppose $m=0$ dans (5), il en résulte $n=0$, et les valeurs de y et z, tirées de (1) et (3), sont infinies, quelle que soit la valeur attribuée à x. Mais on verrait aisément que les valeurs de x et z, par exemple, pour une valeur quelconque attribuée à y, seront finies et déterminées. C'est qu'alors les intersections du troisième plan, par les deux premiers, sont parallèles au plan des y, z. On verra, comme au numéro précédent, que ces deux droites sont distinctes, ou se réduisent à une seule, et que, par conséquent, *le système des équations proposées se réduit à deux systèmes, ou à un seul système de deux équations, suivant que les valeurs générales des inconnues seront de la forme* ∞ *ou* $\frac{0}{0}$.

12. *Cinquième cas.* Je suppose enfin que les valeurs de deux indéterminées m, n, p soient nulles dans deux des systèmes (5), (7), (9). Soient, par exemple, m et p nuls dans (5) et (7), on aura $c'b''=b'c''$ et $bc'=cb'$ avec $c'a''=a'c''$, et $ac'=ca'$. On en déduira $bc''=cb''$, $ac''=ca''$, $b'a''=a'b''$, $ab''=ba''$ et $ab'=ba'$, et partant les valeurs des auxiliaires m, n et p seront toutes nulles dans les trois systèmes (5), (7)

et (9). Dans ce cas, l'équation (4) devient $0.x+0.y+0.z=0$, et n'offre aucun sens.

Quant aux valeurs générales des inconnues, elles se présentent toutes évidemment sous la forme de $\frac{0}{0}$. Or, on peut poser $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=r$ et $\frac{a''}{a}=\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}=r'$, et si l'on remplace, dans les équations (2) et (3), a', b' et c', a'', b'' et c'', par leurs valeurs en r et r', on aura :

(1) $$(ax+by+cz)=d$$

(2) $$r\,(ax+by+cz)=d'$$

(3) $$r'\,(ax+by+cz)=d''$$

pour le système proposé, et l'on voit que généralement ces trois équations sont soit incompatibles toutes trois ensemble, soit deux à deux, d'une manière quelconque. Toutefois, si l'on avait $rd=d'$, la première et la deuxième seraient identiques ; la première serait identique avec (3), si l'on avait $dr'=d''$, et enfin elles seraient toutes trois identiques ensemble si l'on avait $d=\frac{d'}{r}=\frac{d''}{r'}$. Ainsi, dans ce cas, les trois équations seront incompatibles entre elles ou se réduiront à deux équations incompatibles, ou enfin elles se réduiront à une équation unique entre trois inconnues, les deux autres étant une conséquence de celle-ci ; elles représentent trois plans parallèles, et il peut arriver que deux de ces plans, ou même que tous trois se réduisent à un seul.

13. En résumé, un système de trois équations du premier degré entre trois inconnues, offrira nécessairement l'une des combinaisons suivantes :

1° Ces trois équations seront compatibles et distinctes lorsque les valeurs générales des inconnues seront finies et déterminées ; les valeurs des auxiliaires m, n et p étant toutes différentes de zéro, ou une seule étant nulle dans un seul des systèmes accessoires.

2° Les trois équations seront incompatibles toutes trois ensemble, mais compatibles deux à deux, et formeront par conséquent *trois systèmes* distincts de deux équations compatibles et indéterminées lorsque les valeurs générales des inconnues seront infinies, les auxiliaires étant toutes différentes de zéro; ou bien encore lorsque l'une des valeurs générales des inconnues étant indéterminée, et les autres infinies, les valeurs des auxiliaires seront nulles toutes trois ensemble dans un même système accessoire, et différentes de zéro dans tous les autres.

3° Une des trois équations sera incompatible avec une des deux autres, mais ces deux-ci (celles qui sont incompatibles entre elles) seront compatibles chacune avec la troisième, et partant le système proposé se réduira à *deux systèmes* compatibles et indéterminés lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes infinies, et qu'en même temps la valeur d'une des auxiliaires sera nulle dans les trois systèmes accessoires, les autres étant toutes différentes de zéro, ou encore deux de celles-ci étant nulles dans un deuxième système accessoire.

4° Une des trois équations sera conséquence des deux autres, et partant le système proposé se réduira à *un seul système* de deux équations compatibles et indéterminées, lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes trois indéterminées, que les valeurs des auxiliaires soient toutes différentes de zéro, ou bien que seulement quelques-unes d'entre elles ne soient pas nulles.

5° Enfin les équations seront toutes trois incompatibles deux à deux, ou bien conséquence l'une de l'autre, et formeront par conséquent trois systèmes distincts d'une seule équation à trois inconnues, lesquels pourront se réduire à deux, ou même à un seul, lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes trois indéterminées, et qu'en même temps les valeurs des auxiliaires seront nulles toutes à la fois dans les trois systèmes accessoires.

SUR LES

FOYERS DES COURBES D'INTERSECTION

De deux surfaces du second degré.

PAR E. CATALAN.

Si l'on appelle *foyer* d'une courbe dans l'espace, un point tel que sa distance à un point quelconque de cette courbe soit une fonction entière, du premier degré, des coordonnées de ce dernier point ; on peut se proposer de chercher dans quel cas l'intersection de deux surfaces du second degré a des foyers.

Représentons par α, β, γ les coordonnées rectangulaires du foyer cherché, et par x, y, z, celles d'un point quelconque de la courbe ; nous devrons avoir, pour tous les points de la courbe d'intersection,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(mx+ny+pr+q)^2. \quad (1)$$

Or, cette équation (1) peut être regardée comme une conséquence des deux équations :

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 &= R^2,\\ mx+ny+pr+q &= R,\end{aligned}$$

lesquelles représentent respectivement une sphère de centre fixe et de rayon variable, et un plan parallèle à un plan donné ; conséquemment, cette équation (1) représente une *surface de révolution sur laquelle doit se trouver la courbe donnée.*

Il faut donc, pour que l'intersection de deux surfaces du second degré puisse avoir un foyer, que cette intersection soit située sur une surface de révolution, du second degré.

Cette condition *nécessaire* est *suffisante*, car il est évident que la surface engendrée p.. une conique tournant autour de l'axe focal, a pour foyers ceux de la section méridienne.

La question ci-dessus est donc ramenée à cette autre : *Dans quel cas l'intersection de deux surfaces de second degré appartient-elle à une surface de révolution du second degré ?*

Si l'on prenait les équations des deux surfaces sous la forme la plus générale, on arriverait très-péniblement à la condition cherchée ; pour simplifier, on peut supposer que l'une des deux équations est ramenée à la forme

$$(2) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + D = 0,$$

l'autre étant

$$(3) \quad ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy+2cx+2c'y+ \\ +2c''z+d=0.$$

L'intersection des deux surfaces devant être située sur une surface de révolution, il doit exister un facteur λ tel, que

$$(4) \quad (\lambda A+a)x^2+(\lambda A'+a')y^2+(\lambda A''+a'')z^2+2byz+2b'xz+ \\ +2b''xy+2(\lambda C+c)x+2c'y+2c''z+(\lambda D+d)=0,$$

représente cette surface de révolution.

En employant les deux équations de conditions connues (*), éliminant λ, et développant, on trouve

$$A\left[a'-a''+b\left(\frac{b'}{b''}-\frac{b''}{b'}\right)\right]+A'\left[a''-a+b'\left(\frac{b''}{b}-\frac{b}{b''}\right)\right]+ \\ +A''\left[a-a'+b''\left(\frac{b}{b'}-\frac{b'}{b}\right)\right]=0. \qquad (5)$$

Telle est la relation cherchée.

Cette relation étant peu susceptible d'une interprétation géométrique, il vaut mieux supposer que les deux surfaces données se coupent en effet suivant une courbe tracée sur une surface de révolution, et prendre pour axe des z l'axe de rotation, ou seulement une parallèle à cet axe.

(*) Analyse appliquée de Leroy, 3e édit., p. 200.

Alors, en supposant que les équations des deux surfaces données soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + \ldots = 0, \qquad (6)$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + \ldots = 0, \qquad (7)$$

il faudra qu'il existe entre les coefficients des relations telles, que l'équation

$$(\lambda A + a)x^2 + (\lambda A' + a')y^2 + (\lambda A'' + a'')z^2 + \ldots = 0 \qquad (8)$$

représente une surface de révolution autour d'une droite parallèle à l'axe des z. Ceci exige que

$$\lambda A + a = \lambda A' + a', \quad \lambda B + b = 0, \quad \lambda B' + b' = 0, \quad \lambda B'' + b'' = 0;$$

d'où l'on conclut généralement

$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'} = \frac{b''}{B''} = \frac{a - a'}{A - A'}. \qquad (9)$$

Si donc deux surfaces de second degré jouissent de la propriété énoncée, il devra arriver, *en général*, que les équations de ces deux surfaces puissent être ramenées à

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + \\ + 2C''z + D = 0,$$

$$(A + \delta)x^2 + (A' + \delta)y^2 + a''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2cx + \\ + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Si, dans ces formules (9), trois des rapports sont $\frac{0}{0}$, le quatrième rapport est égal à $-\lambda$; et les deux surfaces jouissent de la propriété demandée. Ainsi, en particulier,

Si deux surfaces du second degré ont leurs plans principaux parallèles chacun à chacun, leur intersection est TOUJOURS *sur une surface de révolution.*

Cela fait voir, comme l'a énoncé Jacobi (*), que *chaque ligne de courbure d'un ellipsoïde a deux foyers*, etc.

(*) Liouville, XI, 237.

J'ai laissé de côté une circonstance qu'il est bon de noter.

On sait qu'à une ellipse donnée correspond toujours une hyperbole, dont le plan est perpendiculaire à celui de l'ellipse, et qui est telle, que chacun de ses points est un *foyer* relativement à la première courbe; c'est-à-dire que la distance d'un point quelconque de l'ellipse à un point quelconque de l'hyperbole est une fonction rationnelle des coordonnées du point pris sur l'ellipse. Par analogie, on pourrait supposer que l'intersection d'un ellipsoïde de révolution avec une surface du second degré a des foyers autres que ceux de l'ellipse méridienne; on pourrait supposer même qu'à une courbe quelconque tracée sur un ellipsoïde de révolution, correspond toujours une courbe *focale.*

Il est facile de voir que ces suppositions ne seraient pas fondées.

Considérons, pour un instant, une ellipse et son hyperbole *focale.* Lorsque ces deux courbes tournent autour de leur axe commun, elles engendrent respectivement un ellipsoïde et un hyperboloïde de révolution. Si l'on prend un point *particulier* sur l'ellipsoïde, il aura pour ligne focale l'hyperbole déterminée par un plan méridien perpendiculaire à celui qui passe en ce point.

Pour un autre point de l'ellipsoïde, non situé sur le méridien, il y aura une autre hyperbole focale, et ainsi de suite.

Il suit de là que si l'on trace une ligne quelconque sur l'ellipsoïde, le lieu des foyers relatifs aux divers points de cette ligne, sera l'enveloppe des hyperboles correspondant à ces divers points : or, toutes ces hyperboles n'ont que deux points communs, savoir, les sommets réels de l'hyperboloïde.

ADDITIONS

au théorème de M. Paul Serret (p. 359),

PAR E. CATALAN.

Je conserve les mêmes notations.

Si l'on retranche membre à membre les équations qui représentent (AB, CD) et (*ab*, *cd*), on obtient

$$(d)\quad A''y^2 + (B'' - B + B')xy + C'x^2 + D''y + E'x + F = 0.$$

C'est l'équation d'une conique qui passe par des points AB.*ad*, AB.*bc*, CD.*ad*, CD.*bc*, AD.*ab*, BC.*ab*, AD.*cd*, BC.*cd*.

On trouve ensuite facilement que

1° Les points communs à (*c*) et (*d*) et les points A, B, C, D sont situés sur une même conique, représentée par

$$Ay^2 + (2B' - B)xy + (2C' - C)x^2 + Dy + (2E' - E)x + F = 0;$$

2° Les points communs à (*c*) et (*d*), et les points *a*, *b*, *c*, *d* étant situés sur une même conique représentée par

$$(2A'' - A)y^2 + (2B'' - B)xy + Cx^2 + (2D'' - D)y + Ex + F = 0.$$

DIVISION NUMÉRIQUE ORDINAIRE

facilitée par les compléments (Crelle, t. XIII, p. 209, 1835).

1. *Premier procédé.* Soit D le diviseur, q le chiffre du quotient, et R le reste précédent; le reste suivant est $R - qD$; or, on a l'identité $R - qD = R + q(10^n - D) - q10^n$, n étant le nombre total des chiffres de quotient, $10^n - D$ est le complément du diviseur. Au moyen de cette identité, pour obtenir

les restes, au lieu de *soustractions*, on n'a que des *additions* à faire, car la soustraction de $q.10^n$ s'opère en effaçant du reste le premier chiffre à gauche, et si le complément est moindre que le diviseur, les multiplications sont aussi moins pénibles.

2. *Second procédé*. On a encore l'identité

$$R - qD = R + q(p.10^{n-1} - D) - qp.10^{n-1},$$

en prenant par p le chiffre surpassant d'une unité le premier chiffre à gauche du diviseur, alors $p.10^{n-1} - D$ a toujours un chiffre de moins que le diviseur, ce qui facilite les multiplications; et la soustraction de $qp10^{n-1}$ s'opère à vue sous les deux premiers chiffres à gauche du reste. — Nous supprimons les explications.

RECTIFICATION

d'une formule du tome II des Annales, page 508,

PAR M. A. HAILLECOURT,

—

On lit $S''_{2p} = (y - x)^{2p} + \ldots. = mn(S'_{2p} + S_{2p}) - \ldots..$

Or, chaque quantité y'''^{2p}, par exemple, n'est répétée qu'autant de fois qu'il y a de racines dans l'équation en x, savoir m fois; de même chaque x^{2p} est répété n fois; donc $\Sigma(y'^{2p} + y''^{2p} \ldots. + y^{(n)2p} + x'^{2p} \ldots + x'^{(m)2p})$ vaut seulement $mS'_{2p} + nS_{2p}$, et non $mn(S'_{2p} + S_{2p})$.

Avant-dernière ligne, on lit

$$\Sigma(y^k x^{k_1} + y^{k_1} x^k) = mn(S'_k S_{k_1} + S'_{k_1} S_k),$$

mais chaque y^k est multiplié seulement par $\Sigma x^{k_1} = S_{k_1}$; donc

$$\Sigma y^k x^{k_1} = S_k S_{k_1} \ldots.$$

et par suite

$$\Sigma(y^k x^{k_1} + y^{k_1} x^k) = S'_k S_{k'} + S'_{k_1} S_k);$$

d'où je conclus

$$S''_{2p} = mS'_{2p} + nS_{2p} - \frac{2p}{1}(S'_{2p-1}S_1 + S'_1 S_{2p-1}) + \frac{2p(2p-1}{1.2} \ (\ )$$

et de même pour S''_{2p+1}.

SUR LA QUESTION 70e (*Voy.* p. 399),

PAR M. LEBESGUE,

—

Si l'on veut trouver la somme des puissances *mèmes* des racines $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ de l'équation

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \text{etc.}, \pm ux \mp v = 0,$$

il faut, comme Waring l'a montré (*Meditationes algebraicæ*, p. 1, à la notation près), prendre pour $S_m = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \ldots$ une somme de termes compris dans la formule

$$Mp^a q^b r^c \ldots v^g = (1-)^{m-a+\pi} \frac{m.a+1\ldots\ldots a+\pi-1}{1.2\ldots b \times 1.2 \ldots c \times \ldots} p^a q^b r^c \ldots \pi v^g \quad \text{(A)}$$

On doit supposer

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & a + 2b + 3c + 4d + \ldots + nv = m \\ 2^\circ & b + c + d + \ldots + v = \pi \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

a, b, c, d... devant être positifs ou nuls.

N.B. Si $\pi = 0$, $m = \alpha$, le terme doit être réduit à p^m ; $M = 1$. Si $\pi = 1$, le terme a pour coefficient $M = (-1)^{m-a+1}$.

Pour $\pi > 1$, on appliquera la formule (A), en ayant soin de donner à a, b, c... toutes les valeurs possibles qui satisfont aux équations (B).

La démonstration de Waring revient à montrer que si la valeur de S_m est exacte pour les indices 1, 2, 3... k égal ou inférieur à n, elle l'est aussi pour un indice plus grand, en vertu de la formule

$$S_{k+1} = pS_k - qS_{k+1} - \ldots$$

La vérification est facile.

Si on considère l'équation $x^2 - px + q = 0$, il faudra dans les formules de Waring poser $r = s = \ldots = 0$; alors, en supprimant les racines nulles, on trouvera

$$\alpha^m\beta^m + \ldots = p^m - \frac{m}{1}p^{m-2}q + \frac{m.m-3}{1.2}p^{m-4}q^2 - \frac{m.m-5.m-4}{1.2.3}p^{m-6}q^3 \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{m.(m-2p+1)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p}p^{m-2p}(-q)^p.$$

Dans cette formule, il faut avoir soin de prendre pour $m-2p$ zéro si m est pair, et 1 si m est impair, ce qui détermine p.

Si l'on change p en $\alpha+\beta$ et q en $\alpha\beta$, puis α, β, m en a, b, n, on aura la formule 70[e] des *Nouvelles Annales*, t. II, p. 327.

Pour l'équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, on trouverait une formule analogue, mais susceptible d'une simplification; ainsi l'on aura pour un exposant impair $n = 2v - 1$

$$\alpha^{2v-1} + \beta^{2v-1} + \gamma^{2v-1} = p^{2v-1} - Q_{2v-1}(pq - r).$$

Pour un exposant pair

$$\alpha^{2v} + \beta^{2v} + \gamma^{2v} = p^{2v} - Q_{2v}(pq - r) + 2(-q)^v.$$

Il s'agit de trouver la loi des fonctions entières Q.

On fera remarquer ici que $p = \alpha+\beta+\gamma$, $q = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, $r = \alpha\beta\gamma$ donnent $pq - r = (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$. Ainsi l'on aura

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{2v-1} = \alpha^{2v-1} + \beta^{2v-1} + \gamma^{3v-1} + (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma).\,Q_{2v-1}.$$

On reconnaîtra que la fonction Q_{2v-1} est une fonction entière de α^2, β^2, γ^2...; voici un moyen particulier de la trouver avec facilité.

Dans le développement de $(x+y+z)^{2\nu-1}$, les termes sont de trois espèces ; ils renferment 1, 2 ou 3 des lettres α, β, γ, et comme la somme des exposants est impaire $=2\nu-1$, un seul exposant est impair, ou les trois sont impairs, de sorte que l'on peut poser, en supposant $2\nu-1=n$ impair :

$$(x+y+z)^n = xP+yQ+zR+xyzS,$$

P, Q, R, S étant des fonctions entières de x^2, y^2, z^2. D'après cela,

$$\begin{aligned}(-x+y+z)^n &= -xP+yQ+zR-xyzS\\ (x-y+z)^n &= xP-yQ+zR-xyzS\\ (x+y-z)^n &= xP+yQ-zR-xyzS\end{aligned}$$

d'où il suit que l'on a

$$(x+y+z)^n-(-x+y+z)^n-(x-y+z)^n-(x+y-z)^n=4xyzS.$$

Si l'on pose

$$\left.\begin{aligned}-x+y+z&=2\alpha\\ x-y+z&=2\beta\\ x+y-z&=2\gamma\end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned}z&=\alpha+\beta;\quad x+y+z=2(\alpha+\beta+\gamma)\\ y&=\alpha+\gamma\\ x&=\beta+\gamma\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(\alpha+\beta+\gamma)^n = \alpha^n+\beta^n+\gamma^n+(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma).\frac{S_1}{2^{n-2}},$$

en représentant par S_1 ce qui devient S quand on y fait $z=\alpha+\beta$, $y=\alpha+\gamma$, $x=\beta+\gamma$.

La fonction S est l'ensemble des termes de $(x+y+z)^n$, qui contiennent les trois lettres x, y, z avec des exposants impairs, en ayant soin de diviser cette somme par xyz. Si donc on a égard au coefficient du terme $x^a y^b z^c$, qui est égal à

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n-1.n}{1.2..a\times 1.2..b\times 1.2\ldots c},$$

a, b, c étant impairs, on trouvera très-aisément les formules suivantes :

$$(\alpha+\beta+\gamma)^8 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)\,(\beta+\gamma)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^5 = \alpha^5+\beta^5+\gamma^5+5(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)\,(\beta+\gamma)\,[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma]$$

$$(\alpha+\beta+\gamma^7) = \alpha^7+\beta^7+\gamma^7+7(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\,[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

La dernière formule a été employée avec succès pour démontrer l'impossibilité de l'équation

$$x^7+y^7=z^7.$$

On est ramené à une équation biquadratique

$$t^2=p^4+\mathrm{A}p^2q^2+\mathrm{B}r^4,$$

dont l'impossibilité s'établit par une méthode très-élémentaire, dont je donnerai quelques exemples dans un autre article.

L'impossibilité des équations $x^3+y^3=z^3$, $x^5+y^5=z^5$ ne se présente pas aussi facilement; on est conduit aux équations

$$p^2+3q^2=r^3 \text{ ou } 4r^3,\quad p^2-5q^2=r^5 \text{ ou } 4r^5.$$

On sait les résoudre généralement, mais cela exige des recherches préliminaires assez étendues; les formules générales de solution conduisent ensuite assez facilement à la démonstration de l'impossibilité.

Il y a pour cela deux modes de démonstration. Le premier, dû à Fermat, conduit à faire voir qu'étant donnée une solution en nombres entiers a, b, c, on en déduirait une autre en nombres entiers a', b', c' plus petits, et ainsi de suite à l'infini, ce qui implique contradiction.

Le second, beaucoup plus simple, conduit à faire voir que de l'équation donnée, on en déduit une autre $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$, qui est impossible, parce qu'en divisant les deux membres par un nombre convenablement choisi, on obtient nécessairement des restes différents. Cette méthode est celle de non-congruence ou non-équivalence, car on appelle nombres congrus ou équivalents pour un module (diviseur entier positif déterminé, ceux qui, divisés par ce module, donnent des restes égaux.

Les méthodes employées pour démontrer l'impossibilité de l'équivalent $x^n + y^n = z^n$ lorsque $n = 3, 5, 7$ ne jettent que très-peu de jour sur le mode général de démonstration. Il reste à savoir si l'emploi des expressions imaginaires, formées avec des racines de l'unité et dites nombres complexes, dont l'étude est fort importante d'ailleurs, est bien de nature à faciliter la démonstration du théorème de Fermat, qui a un sens beaucoup plus restreint que celui qu'il aurait si x, y, z devenaient des nombres dits complexes ; le théorème pourrait même avoir lieu dans ce cas, celui de Fermat étant impossible.

Note. Le profond arithmologue de Bordeaux travaille à un traité méthodique et complet d'analyse indéterminée : celle du premier degré est achevée et prête à paraître. La méthode réunit la rigueur et la généralité que réclame la dignité de la science, à la clarté et à la simplicité qu'exige une exposition élémentaire. La doctrine des nombres s'est enrichie de beaucoup de théories nouvelles et postérieures à l'ouvrage de Legendre, qui laisse des lacunes que le traité de M. Lebesgue remplira, et dont nous jouirions bientôt si le savant professeur avait à sa disposition les sources et ressources qu'on rencontre difficilement hors de la capitale. Tm.

QUESTION 144 (p. 216).

PAR M. DE PERRODIL,
élève du collége de la Flèche.

Étant donnés deux ellipsoïdes semblables, concentriques, et ayant leurs axes principaux homologues dans la même direction, tout cylindre circonscrit au petit ellipsoïde coupe le volume du grand dans un rapport simple qu'il s'agit de trouver (Lebesgue).

Je mène et le plan xy qui contient la courbe de contact, et le diamètre oz parallèle aux génératrices du cylindre; il contient les centres de toutes les sections parallèles au plan xy. En effet, tout plan conduit suivant cette droite coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse; le cylindre suivant deux génératrices tangentes à cette courbe et le plan xy suivant un diamètre passant par les points de contact, alors tout plan parallèle à ce dernier détermine une corde parallèle au conjugué de oz, et qui, par conséquent, a son milieu sur oz. D'ailleurs le cylindre perce le grand ellipsoïde suivant deux ellipses parallèles au plan xy; car toutes les sections horizontales se projettent parallèlement à oz suivant des courbes semblables à la courbe de contact; cela résulte immédiatement de l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Quel que soit z, le rapport des coefficients de x^2 et y^2 est constant.

Considérons actuellement le demi-ellipsoïde situé au-dessus du plan xy, et relevons les ordonnées parallèles à oz de manière à les rendre perpendiculaires à ce plan; alors un cylindre, ayant pour base une partie quelconque mais infiniment petite du plan xy, sera multiplié par $\frac{1}{\sin p}$, p étant l'inclinaison de oz sur le plan xy, leur somme ou le volume compris entre la surface cylindrique et celle du grand ellipsoïde sera multipliée dans le même rapport; appelons X ce volume, V le volume modifié, on aura

$$\mathrm{V}=\mathrm{X}\frac{1}{\sin p}.$$

Soient c' le demi-diamètre du grand ellipsoïde dirigé suivant oz, a, b, les demi-axes de la courbe du plan xy, et considérons l'ellipsoïde E, dont les axes seraient a, a', c.

Si l'on décrit un cercle sur $2a'$ comme diamètre, et si l'on mène le cylindre droit B ayant ce cercle pour base, il interceptera dans l'ellipsoïde E un volume dont il est facile de trouver le rapport avec V.

Appelons l'axe b prolongé indéfiniment l'axe des y. Les y du grand ellipsoïde et de la surface auxiliaire E sont dans le rapport constant de a à b ; donc, si l'on mène un petit cylindre parallèle à l'axe oy, qui coupe un élément sur chaque surface, les cylindres qui projetteront ces éléments sur le plan xy auront des bases dans le rapport de a à b et même hauteur ; donc ils seront eux-mêmes :: $a : b$, donc il en sera de même de leur somme. En les appelant V et V′ on aura

$$V' = \frac{a}{b}V = \frac{1}{b\sin p}X.$$

Enfin, si sur a, comme diamètre, on décrit une sphère, le cylindre auxiliaire B déterminera dans cette sphère un autre volume V″ ; dont le rapport à V′ est facile à trouver, car les ordonnées comprises dans les deux surfaces sont dans le rapport de a à c. Deux petits cylindres ou prismes, ayant la même base et terminés à ces deux surfaces, sont dans le même rapport, donc

$$V'' = \frac{a}{c}\ V' = \frac{a}{c'}\ \frac{a}{b\sin p}X\ ;\ V'' = \frac{a^3}{abc'\sin p}.$$

Soient a', b' les demi-diamètres conjugués de c', on sait que

$$ab = a'b'\sin\alpha;\ \text{donc}\ V'' = \frac{a^3}{a'b'c'\sin\alpha\sin p}X.$$

Mais $a'b'c'\sin\alpha\sin p$ n'est autre chose que le volume du parallélipipède construit sur les trois demi-diamètres a', b', c', et l'on sait que ce volume est constant et égal à ABC, A, B, C étant les axes principaux de l'ellipsoïde ;

donc
$$V'' = \frac{a^3}{ABC} X,$$

mais
$$V'' = \frac{1}{6} \pi \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}} a^3.$$

k étant le rapport de similitude (c'est l'expression du volume d'un segment circulaire tournant autour du diamètre parallèle à sa corde, le rayon étant représenté par a et l'apothème par ka), il viendra donc

$$\frac{a^3}{ABC} X = \frac{1}{6} \pi \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}} a^3,$$

ou
$$\frac{X}{\pi ABC} = \frac{1}{6} \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Note. Si l'élève distingué auquel les *Nouvelles Annales* doivent tant de solutions remarquables n'a pas fait ici usage des symboles abréviateurs du calcul infinitésimal, c'est sans doute pour ne pas sortir de la voie collégiale ordinaire.

Tm.

DIVISION

Des figures équivalentes en parties superposables d'après M. Gervien, premier lieutenant dans le 22^e^ *régiment d'infanterie de Prusse* (Crelle, t. X, p. 228 ; 1833).

—

La *Théodicée* est un ouvrage philosophique, écrit en bon français, par un géomètre allemand, dans un temps où cet idiome était difficilement manié, même par les indigènes, pour des objets de cette nature. Au § 214 de la 2^e^ partie, Leibnitz dit : « Il y a une espèce de géométrie que M. Jungius de Hambourg, un des plus excellents esprits de son » temps, appelait *empirique*. Elle se sert d'expériences dé- » monstratives, et prouve plusieurs propositions d'Euclide, » mais particulièrement celles qui regardent l'égalité de » deux figures, en coupant l'une en pièces pour en faire » l'autre. De cette manière, en coupant, comme il faut, en » parties les carrés des deux côtés du triangle rectangle et en » arrangeant ces parties comme il faut, on en fait le carré de » l'hypoténuse ; c'est démontrer empiriquement la 47e proposition du 1er livre d'Euclide. »

Jungius est le même, je crois, qui a signalé l'erreur de Galilée, au sujet de la catenaire ; on sait que le célèbre Florentin a le premier remarqué cette courbe, qu'il croyait être une parabole (Mech., dialogue II) ; mais c'est Leibnitz et Bernouilli (J.) qui ont trouvé l'équation de la courbe.

La méthode de Jungius ramène la géométrie élémentaire au jeu connu sous le nom de *casse-tête chinois*; on trouve une démonstration de ce genre pour le théorème de Pythagore, dans le *Manuel de géométrie*. Je m'en suis servi pour *faire découvrir* ce théorème à un enfant. M. Blanchet a inséré cette démonstration dans son Legendre commenté, sans indiquer la source ; chose naturelle, c'est-à-dire ordinaire ; mais il semble fort bizarre d'avoir fait suivre ce Legendre modifié d'un autre Legendre tout pur. Que dirait-on d'un marchand qui, vendant une étoffe brodée, obligerait en même temps de prendre l'étoffe unie pour rehausser la broderie. On répond à cela qu'on donne le Legendre *uni* par-dessus le marché. D'abord, c'est peu respectueux, et la modestie exigeait que l'ouvrage précédât le commentaire ; ensuite, c'est une mutilation fâcheuse d'avoir omis les *notes* ; la partie précieuse, où il ne s'agit plus du talent exégétique d'un professeur, mais du génie créateur d'un géomètre. Du reste, ceci ne se rapporte qu'à la forme de l'ouvrage de M. Blanchet, et n'ôte rien au mérite intrinsèque d'une publication utile à l'enseignement.

M. le lieutenant Gervien a résolu ce problème : étant donné tel nombre qu'on voudra de polygones plans équivalents, trouver des parties telles qu'en les arrangeant convenablement, on puisse reproduire à volonté l'un quelconque de ces polygones. Nous donnons ici les deux premières propositions de cet ingénieux travail, sauf à y revenir. Nous supprimons des démonstrations très-faciles.

(*Fig.* 53.) Pour fixer les idées, soient les quatre triangles équivalents ACB, ABD, ADE, AEF, ayant même sommet A et des bases égales ; cinq droits AC, AB, AD, AE, AF, partent des points A ; par chacun des points B, D, E, on mène des parallèles à ces cinq droites ; les chiffres romains indiquent les parallèles à la même droite ; ainsi *V* désigne une parallèle à la droite AF, *IV* une parallèle à la droite AE et ainsi des autres ; chaque triangle se trouve ainsi divisé en sept parties, savoir en cinq triangles et deux quadrilatères *parties égales* chacune à chacune.

(*Fig.* 54). Les triangles équivalents ABC, ACD ont même base AC et des hauteurs égales BM, DN ; menons la droite BD, il y a trois cas.

1° La droite BD rencontre la base AC entre A et C : c'est le cas de la figure ; par le point d'intersection, on mène, dans l'intérieur du triangle ABC des droites parallèles aux côtés AD, CD du triangle ADC ; par le même point, on mène dans l'intérieur du triangle ADC des parallèles aux côtés AB, BC du triangle ABC ; les chiffres arabes indiquent les parallèles, les deux triangles donnés sont ainsi divisés chacun en quatre triangles égaux chacun à chacun.

2° La droite BD passe par un des points A, C ; même construction.

3° La droite BD laisse deux points A, C du même côté; nouvelle construction à chercher.

L'auteur allemand indique aussi quelques constructions pour des polygones sphériques équivalents. Euler a montré la décomposition des deux pyramides triangulaires symétriques en quatre pyramides égales ; sa démonstration est suffisante pour établir l'équivalence des valeurs dans tous les cas, mais elle n'établit la décomposition effective que pour le cas où le centre de la sphère circonscrite est dans l'intérieur de la pyramide. Il faut une autre construction quand le centre est dehors. Cette construction est encore à trouver et *à fortiori* celle qui est relative à des pyramides équivalentes quelconques. C'est une branche de stéréotomie non exploitée et à laquelle se rattache peut-être la théorie de la cristallisation où le géomètre des mondes a résolu tant de beaux problèmes.

SUR LA CONVERSION DES SÉRIES EN PRODUITS *d'un nombre infini de facteurs*, d'après M. Stern (Crelle, t. XII, p. 353) en français.

—

I. Étant donnée la série

$$S=1+A_1+A_2+A_3+A_4+\dots \qquad (1)$$

on peut la convertir immédiatement en un produit. En effet, on a

$$S=(1+A_1)\frac{(1+A_1+A_2)}{1+A_1}\,\frac{(1+A_1+A_2+A_3)}{1+A_1+A_2}\,\frac{(1+A_1+A_2+A_3+A_4)}{1+A_1+A_2+A_3}\dots \qquad (2)$$

« Les deux expressions sont identiques, c'est-à-dire que » si l'on ajoute un certain nombre de premiers termes de la

» série donnée, on obtient la même valeur qu'on obtien-
» drait en calculant la valeur du prodnit correspondant par
» le même nombre de facteurs, de manière qu'une série con-
» vergente mène toujours à un produit convergent. »

Soit la série :

$$e=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4},$$

on la convertit par la formule (2) en celle-ci :

$$e=\frac{3}{2}.\frac{10}{9}.\frac{41}{40}.\frac{206}{205}\cdots$$

où le $n^{ème}$ facteur étant $\frac{a}{b}$, le $n+1^{ème}$ est $\frac{(n+2)a+1}{(n+2)a}$,

de même, $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$;

d'où $\log 2=\frac{1}{2}.\frac{5}{1.3}.\frac{14}{4.5}.\frac{94}{5.14}.\frac{444}{6.94}.$

Le $n^{ème}$ facteur étant $\frac{a}{b}$, le $n+1^{ème}$ est $\frac{(n+1)b+a}{(n+2)a}$.

II. Par les considérations précédentes, on peut changer *vice versa* un produit d'un nombre infini de facteurs en série ; soit

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}\cdots\frac{a_4}{b_4}\cdots \tag{3}$$

Comparant avec la formule (2), on a

$$\frac{a_1}{b_1}=1+A_1;\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{1+A_1+A_2}{1+A_1}\cdots$$

d'où $A_1=\frac{a_1-b_1}{b_1}$; $A_2=\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2-b_2}{b_2}$,

et en général $A_n=\frac{a_1.a_2\ldots a_{n-1}}{b_1b_2\ldots b_{n-1}}\,\frac{a_n-b_n}{b_n}$, formule déjà donnée par M. Schweins.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments d'arithmétique, suivis de la théorie des logarithmes, par E. Lionnet, professeur de mathématiques au collége royal Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'École navale, in-8° de 320 pages. 1847, Paris (*).

Les scolastiques du moyen âge ont exploité, et de nos jours exploitent encore, le privilége de parler sans attacher aucun sens précis aux mots, d'établir des propositions vagues à l'aide d'autres propositions plus vagues encore; c'est ce qui a fait dire à Montaigne : *Pour m'enlever un doute, ils m'en donnent trois*. En même temps que régnait cette prétendue philosophie, avait cours un ouvrage composé dans un esprit diamétralement opposé. Tous les objets y sont clairement et régulièrement *définis*, et on ne quitte jamais une proposition sans l'avoir rendue inexpugnable, sans avoir obtenu l'assentiment universel. Aussi cet ouvrage a-t-il été accepté comme le *code* de l'intelligence; ce mot doit être pris dans le sens propre. De même que les jurisconsultes citent comme autorité tel article, tel chapitre du Digeste ou des Institutes, il suffisait de s'appuyer sur tel théorème de tel livre pour se mettre à l'abri de toute objection. Cette haute puissance législative, librement et universellement admise, a fait naître, et à juste raison, une espèce de culte pour les quinze livres des Éléments, culte qui ne s'est pas arrêté seulement au contenu, voire même à la *forme;* de là une *morpholâtrie* qui s'est prolongée jusqu'au dix-huitième siècle.

(*) Chez Desobry, Magdeleine et compagnie, rue des Maçons-Sorbonne, 1.

Ainsi, Spinosa a donné la *forme* euclidienne au panthéisme ; Newton, à la mécanique céleste, et Christian Wolf, célèbre disciple de Leibnitz, à tout le système philosophique du maître, les mathématiques comprises (*). On sait avec quel succès Legendre a ressuscité cette *forme* en France pour la géométrie. Ce chef-d'œuvre, en conciliant la rigueur antique avec le goût moderne, a exercé une grande et heureuse influence ; il a donné naissance à cette doctrine des *convergences* trop peu cultivée dans l'école d'Euler, et sans laquelle l'emploi si indispensable des séries devient souvent chanceux et quelquefois inintelligible (**). Une méthode qui avait si bien réussi devait naturellement exciter le désir de l'appliquer aussi à l'arithmétique. Déjà Euclide a inséré dans sa géométrie plusieurs livres sur les rapports numériques, rationnels et irrationnels. Il est vrai qu'il représente les nombres par des lignes, et raisonne sur ces lignes ; ce qui démontre encore que les Grecs n'avaient aucune idée d'un système graphique de numération analogue à celui des Indiens, et cela malgré l'esprit et l'érudition que l'on a dépensés pour établir le contraire. Nous avons vu ce que Wolf a fait pour toutes les parties de la science. L'arithmétique dont nous allons nous occuper, à l'instar de celle de Wolf, est augmentée de toutes les acquisitions faites depuis le célèbre philosophe. L'ouvrage est divisé en six livres, précédé de principes et suivi d'une théorie des logarithmes.

Principes (1-6) ; contient les *définitions*, la numération *parlée* et *écrite* ; la première définition est ainsi énoncée : On nomme *grandeur* ou *quantité* tout ce qui peut être partagé en parties aussi petites qu'on voudra. Nous doutons que cette définition remplace jamais celle qui est généralement ad-

(*) Elementa Matheosos universæ. Halæ, 1683.

(**) M. Cauchy a montré des séries divergentes dont l'emploi est légitime. Comptes rendus, 1843, 2e semestre, p. 370.

mise, savoir que la *grandeur* est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution; lorsque cette grandeur contient plusieurs parties égales ou que l'on croit telles, elle prend le nom de *quantité;* et quand on fait sur cette quantité l'opération de *compter*, elle devient un *nombre*, dont chaque partie est l'*unité*. Ainsi, une droite finie est une grandeur, susceptible de devenir *quantité* et *nombre;* une population est une quantité, redevenant nombre par le recensement. Il y a même des grandeurs qui ne peuvent jamais devenir *quantité;* telles sont les irrationnelles; les imaginaires ne sont pas même des grandeurs, ce sont des symboles d'opérations. On dit pourtant quantité irrationnelle et même *nombre irrationnel*, et sans inconvénient; c'est que, dans le langage ordinaire, on n'a pas besoin de cette extrême précision qui tient compte des moindres nuances qui différencient des synonymes. Mais dans une *définition* didactique, cette précision en est le mérite essentiel. Ce genre de mérite semble manquer à la nouvelle définition, qui implique même tacitement une sorte de cercle vicieux; n'est-ce pas dire qu'une *quantité* est tout ce qui peut être partagé en parties plus petites qu'aucune *quantité donnée?* Il s'ensuivrait même que la molécule atomique des chimistes n'est pas une grandeur.

Dans la seconde définition, on dit qu'on donne le nom de *mathématiques* à la science des grandeurs, et c'est probablement ce qui aura engagé l'auteur à abandonner la définition admise de la *grandeur*. Le plaisir, la douleur, etc., sont susceptibles d'augmentation et de diminution; donc, d'après l'ancienne définition, ce sont des grandeurs, et par conséquent, d'après la seconde définition, on serait amené à la conclusion absurde que les sensations font partie des mathématiques. Mais cette absurdité tient à l'omission d'un principe essentiel, de celui de l'*homogénéité;* principe qu'on ne rencontre pas dans l'esthétique. On donne bien le nom commun de *plaisir* aux impressions qu'éprouve l'esprit en lisant l'Iliade, en méditant Archimède, en voyant un tableau de Raphaël, en écoutant une musique de Weber, etc.; or nous n'avons aucun moyen de comparer ces impressions, l'*unité* nous manque, il n'y a pas d'homogénéité, et les mathématiques ne s'occupent que de *grandeurs homogènes.* Aussi Wolf a-t-il fait entrer l'*homogénéité* dans l'exposition des principes.

Trois axiomes terminent ici les principes. Le troisième, souvent invoqué dans l'ouvrage, est en effet très-utile. Voici l'énoncé : *Un tout ne change pas de valeur lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties.*

Livre I. (7-40) *Opérations sur les nombres entiers.*

Définitions consécutives des quatre opérations. C'est dans le genre Euclidien. Est-il convenable aux commençants? La multiplication et la division sont définies d'une manière simple et naturelle; ce qu'on ne rencontre pas d'ordinaire, parce qu'on vise à une généralité inopportune. Faisant usage, et avec infiniment de raison, des signes algébriques, l'auteur indique le sens de neuf de ces signes; on a omis le *point* et les deux points, signes Leibnitziens si commodes pour indiquer une multiplication et une division. On a oublié la *parenthèse*, dont le sens en mathématiques n'est pas purement grammatical et annonce une opération incidente.

Dans la soustraction, on ne donne qu'un seul exemple et sans *zéros;* cela ne suffit pas pour une opération qui offre les premières difficultés aux commençants.

Les théorèmes sur la multiplication précèdent la manière de faire cette opération. Cet ordre très-didactique convient-il à des commençants? Par contre, l'auteur fait entrer des exemples numériques dans l'énoncé même des propositions; ce qui n'est pas très-didactique, ni fort approprié à l'enseignement. Nous signalons comme un modèle de précision et de clarté l'exposition ordinairement si épineuse de la division. Tout est ramené à une simplicité extrême, parce qu'on suit la marche naturelle des idées sans anticiper sur les difficultés à venir; on donne ensuite toutes les propositions de la théorie des nombres relatives aux deux dernières opérations.

Ce livre est terminé par quinze problèmes résolus; ils se rapportent à la règle de trois et à celle d'alliage; on réduit toutes les questions à connaître le prix d'une certaine *unité;* considération très-commode qu'on doit, il me semble, à l'examinateur Reynaud.

Le prix du *litre* de vin est donné en *sous*; ce n'est pas légal. Dans l'exemple XII, page 35, il est question de *voleurs* et de *gendarmes;* on en parle assez ailleurs pour qu'il ne soit pas nécessaire d'en parler encore en arithmétique. Il y a aussi seize problèmes à résoudre avec les solutions.

Livre III. (41-75). *Propriétés des nombres entiers.*

Sous ce titre un peu trop vaste, ce livre renferme une théorie élémentaire complète des diviseurs et des multiples, comprenant le plus petit multiple commun, indispensable dans l'arithmétique des fractions. Il est question aussi des congruences, dont on parle sans les nommer. A la manière de Diophante, l'auteur raisonne toujours sur des nombres donnés, ce qui amène plus de clarté, sans nuire à la généralité des conséquences. La proposition relative à la divisibilité par 11 (p. 46), ne vaut ni en théorie ni en pratique ce qu'on donne ordinairement.

Six problèmes résolus et onze à résoudre terminent ce livre; les solutions sont simples, et le onzième, relatif à des mobiles, est un problème intéressant d'analyse indéterminée sur le mouvement uniforme.

Livre III (76-138). *Fractions et nombres décimaux.*

La définition de la multiplication est embarrassante quand le multiplicateur est fractionnaire. L'auteur s'en tire, en disant que *multiplier* une quantité par une fraction, c'est *diviser cette quantité par le dénominateur de la fraction, puis multiplier le quotient par le numérateur.* C'est plus loin et à la page 114, que l'auteur, après avoir défini le *rapport*, montre que cette seconde définition s'accorde avec la première. Les propositions XX et XXI traitent du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple des fractions irréductibles. Cela me paraît inutile et pourrait même être embarrassant pour des élèves.

Nombres décimaux (99); les propositions fondamentales sur la périodicité sont établies clairement par l'intermédiaire des *équations algébriques ;* moyen qu'on ne saurait trop tôt employer; d'une facilité extrême, telle qu'on pourrait, qu'on devrait l'introduire dans ces excellentes institutions où les jeunes personnes reçoivent une instruction solide, persistante, et par conséquent profitable; car, la bonté d'un enseignement doit s'évaluer, non au moment qu'il finit, mais dix années après. Quelle en est alors la partie restante moyenne, prise sur le grand nombre ?

Le corollaire de la page 109 n'établit pas une généralité suffisamment rigoureuse.

L'exposition du système métrique est précédée de quelques considérations qui appartiennent à la cosmographie. On définit le *jour moyen*, unité factice, sans parler du *jour sidéral*, unité réelle, indispensable pour donner un sens à l'unité factice. Pourquoi ne pas se servir du mouvement réel au lieu du mouvement apparent, et dire que le jour sidéral est le temps constant entre le passage du plan d'un même méridien terrestre par une étoile fixe, et le troisième passage suivant; lorsqu'au lieu d'étoile, on prend le soleil, on a le jour *vrai,* dont le rapport au jour sidéral fixe est variable; la moyenne entre un grand nombre de ces rapports donne le jour *moyen.*

La définition si importante du mètre est englobée dans une phrase ; il faudrait l'en détacher pour la mettre en évidence (p. 117).

Ce livre est terminé par des problèmes utiles sur le mouvement uniforme circulaire. (*La fin prochainement.*)

UNIVERSITÉ DE DUBLIN (*Voy.* p. 329).

Prix mathématique de l'évêque Law. Juin 1846 : questions.

En 1796, John Law, évêque d'Elphin, a donné au collége de Dublin 735 liv. st. (18,529 fr.) pour encourager les études mathématiques ; les exercices roulent sur l'algèbre, l'analyse appliquée et la trigonométrie sphérique. Le premier prix est de 25 liv. st. (630 fr.) et le second de 10 liv. st. (250 fr.) ; les deux professeurs de ce cours reçoivent chacun 5 liv. st. (125 fr.), pour retenir à dîner les deux autres examinateurs le jour de la distribution des prix. Parmi les lauréats devenus célèbres, on remarque Hamilton (William) en 1801 ; Jelett et Roberts (Michael) 1838, et Roberts (William) en 1839.

Sir William Hamilton, professeur.

1. Si, dans un triangle sphérique ABC, le côté BC étant fixe, le sommet A décrit un arc AA' infiniment petit sur le petit cercle décrit du point B comme pôle ; abaissant du sommet A une perpendiculaire AE sur le côté opposé BC, on a $\frac{\sin BE}{\sin CE}=\frac{\text{angle } A'CA}{\text{angle } A'BA}$.

2. De là, si dans deux triangles sphériques ABC, CBD, situés dans deux hémisphères opposés relativement à leur base commune BC, on a ABC=DBC ; et 2 tang. BC cos ABC

$= \cot AB + \cot BD$; A, C, D restant fixes, si B décrit un arc BB′ infiniment petit sur un petit cercle ayant C pour pôle, on aura encore AB′C = DB′C.

3. De là, mêmes données, et mêmes conditions ; le point E intersection des deux diagonales AD, BC du quadrilatère, et les points C′, C″ pieds des perpendiculaires abaissées de C sur les côtés AB, BD, sont sur un même grand cercle.

4. Mêmes conditions ; A et D étant les deux foyers d'une ellipse sphérique passant par B ; C est le pôle du petit cercle osculateur de l'ellipse en B.

5. De là, le grand cercle qui bissecte l'angle des deux rayons vecteurs d'une ellipse sphérique, est normal à l'ellipse.

6. De là, la tangente de la moitié de l'angle formé par deux rayons vecteurs est moyenne harmonique entre les tangentes des deux rayons vecteurs.

7. Si on élève au foyer une perpendiculaire à un rayon vecteur et qu'on la prolonge jusqu'à la normale, celle-ci sera divisée en deux segments par le point de l'ellipse extérieurement, et par le pôle du cercle osculateur intérieurement ; les sinus des quatre segments forment une proportion par quotient.

8. La projection d'un arc normal (terminé au grand axe) sur chacun des deux rayons vecteurs est égale au demi-paramètre de l'ellipse, c'est-à-dire à la moitié de la corde qui passe par le foyer, perpendiculairement au grand axe.

9. De là, les tangentes des quatre arcs : 1° le demi-paramètre, 2° la normale, 3° la distance du foyer au centre, 4° le rayon de courbure, forment une progression géométrique continue.

10. Le rayon de courbure est vu sous un angle sphérique de chaque foyer ; en général, l'un de ces angles est aigu et l'autre obtus ; la somme algébrique des produits qu'on ob-

tient en multipliant la tangente trigonométrique d'un de ces angles par le sinus du rayon vecteur correspondant est nulle.

M. Mac Cullagh, professeur.

1. Un point P se meut dans un plan de manière que sa distance à une droite fixe, située dans le plan, divisée par sa distance à un point fixe F, situé hors du plan, donne un quotient constant; démontrer que la droite FP décrit un cône droit, dont l'axe est perpendiculaire au plan déterminé par le point et la droite fixes.

2. De là, si une section faite dans une surface du second ordre passe par une directrice, et si F est le foyer correspondant à cette directrice, le cône qui a ce foyer pour sommet et la section pour base, est un cône droit.

3. Démontrer, par la propriété modulaire, que la somme des angles qu'un côté du cône fait avec ses lignes focales, est constante.

4. Démontrer, par la même propriété, que les sinus des angles que fait un côté du cône avec une ligne focale et le plan directeur correspondant, sont constantes.

5. Si dans une surface du second ordre une section parallèle à un plan tangent est une hyperbole, démontrer que le plan tangent coupe la surface suivant deux droites.

6. Trouver l'équation de la surface polaire réciproque d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde, relativement à une sphère.

7. Les surfaces qui sont polaires réciproques à deux ellipsoïdes de mêmes foyers relativement à la même sphère, ne peuvent se couper.

M. Graves, professeur.

1. L'équation d'un ellipsoïde, rapporté à ses axes princi-

paux, étant $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1); $a>b>c$, peut être ramenée à la forme $k^2(x^2+y^2+z^2-b^2)-x^2+m^2z^2=0$ (2), donner l'interprétation géométrique complète de l'équation (2).

2. L'équation (1) peut aussi être mise sous cette forme :

$$(x-x')^2+y^2+z^2-r^2-l^2\left[\left(\frac{x}{m}-1\right)^2-\frac{z^2}{n^2}\right]=0 \quad (3);$$

les constantes m et n étant liées par l'équation $\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{n^2}=1$; quels théorèmes géométriques sont compris dans l'équation (3)?

3. Un quadrilatère formé par quatre génératrices étant tracé sur un hyperboloïde à une nappe, les quatre sommets sont ceux d'un tétraèdre, dont les six faces étant rencontrées par une transversale, donnent six points en involution.

4. Un hexagone étant inscrit dans une ligne du 3ème ordre, de manière que les trois intersections des côtés opposés soient sur la courbe, une transversale coupera les six côtés de l'hexagone et la courbe en *neuf* points en involution.

5. L'équation d'une courbe plane du 3ème ordre peut être mise généralement sous la forme

$$(y-mx)(y-m'x)(y-m''x)+(ay^2+bxy+cx^2+dy)(\alpha x+\beta y-1)=0,$$

α et β étant pris arbitrairement, quelle propriété générale des courbes du 3ème ordre est exprimée par cette équation?

6. Établir et prouver la propriété correspondante des surfaces du 3ème degré.

7. Le théorème énoncé en 5 donne un moyen simple de construire le cercle osculateur en un point donné d'une ligne plane du 3ème ordre.

8. Étant donnés la base c et l'angle opposé C d'un triangle sphérique ABC, démontrer que l'on a

$$\sin s'da+\sin s db=\sin c dp\,;$$

p est la perpendiculaire abaissée de C sur c, s et s' sont les angles adjacents à a et b, dans lesquels p divise C.

9. De là dériver la formule pour la comparaison des fonctions elliptiques de seconde espèce.

10. $U = 0$ étant l'équation d'une courbe plane du $n^{ème}$ ordre, trouver l'équation générale d'un diamètre donné, conjugué à un système de cordes parallèles à la droite $y = mx$.

11. Tous les diamètres de l'ordre $n - 1$ passent à travers les mêmes $(n - 1)^2$ points.

12. Trouver l'enveloppe de tous les diamètres de l'ordre $n - 2$ et démontrer que cette enveloppe passe par tous les points d'osculation de la courbe (c'est le nom qu'on donne aux points où la tangente a quatre points consécutifs en commun avec la courbe).

Concours Lloyd.

Fondé par souscription en 1839, en commémoration des vertus et des talents de Lloyd, prévôt de l'Université. En 1847, la souscription se montait à 1,075 liv. st.; rapporte un dividende semestriel de 18 liv. st., donné en prix. L'examen roule sur les mathématiques et la physique.

M. MAC CULLAGH, PROFESSEUR.

1. Si $(1 - 2ap + a^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + aP_1 + a^2P_2 + \ldots$ où P_1, P_2 sont indépendants de a; exprimer P_n en fonction de n et de p.

2. Si dans le développement ci-dessus, p est le cosinus d'un angle, démontrer que la valeur de P_n est entre les limites ± 1.

3. Si $\dfrac{1 - a^2}{(1 - 2ap + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + aP_{(1)} + a^2P_{(2)} + \ldots$, démontrer que $P_{(n)} = (2n + 1)P_n$.

4. Soit A un point situé à une distance a du centre d'une

sphère de rayon r, si s est la somme des quotients de chaque élément superficiel de la sphère divisé par le cube de sa distance au point A, la somme étant prise entre les valeurs ρ et ρ' de cette distance, l'on a $s=\frac{2\pi r}{a}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right)$.

5. C et C′ étant les extrémités d'une corde inscrite dans une conique, dont F est le foyer et P le point où la tangente est parallèle à la corde, la différence des distances focales FC, FC′ est égale à la corde CC′, multipliée par le cosinus de l'angle θ que la corde fait avec la droite FP ; démontrer ceci par la propriété de la directrice.

6. Q étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M, milieu de CC′ sur FP, alors FQ est la moitié de la somme de FC et FC′.

7. N étant le point d'intersection de FP et CC′, on a $\overline{FN}^2=s^2-c^2$; $2s=FC+FC'$; $2c=CC'$.

8. Ensuite si f est la moitié de la corde passant par F parallèlement à CC′, s, c, f étant donnés, FP sera donné.

9. Si n est le point où une autre corde parallèle à CC′ coupe FP, et si Fn, ainsi que les longueurs s, c, f sont données, la corde passant par n sera donnée, ainsi que la somme des distances de ses extrémites à F.

10. De là si s, c, f sont donnés, l'aire du segment renfermé entre la corde CC′ et l'arc curviligne CPC′ est proportionnelle au sinus de l'angle θ; il en est de même de l'aire du secteur formé par les droites FC, FC′ et l'arc CPC′.

11. Dans une section conique, le produit $f\sin^2\theta$ est égal au demi-paramètre.

12. s, c, f étant donnés, si la conique est décrite par un point attiré vers le foyer F, le temps mis à décrire l'arc CPC′ est donné. (Cet énoncé comprend les trois cas du théorème de Lambert.)

13. Lorsque le point P est au milieu de NQ, la courbe est

une parabole, et l'on a $f^2+c^2=2fs$; la courbe est une ellipse ou une hyperbole, selon que f^2+c^2 est inférieur ou supérieur à $2fs$.

14. Dans les deux derniers cas, l'axe focal est donné si s, c, f sont connus. (Les propriétés précédentes sont à prouver géométriquement.)

15. x, y sont les coordonnées d'un point P d'une ellipse donnée par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; soient x', y' les coordonnées d'un point fixe, dans ce plan. La longueur d'une droite menée par le point fixe (x', y') parallèlement à FP et terminée à la tangente menée par P, est égale à $a\left[1-\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}\right]$, et cette longueur est proportionnelle à la distance de P à la polaire du point fixe (x', y').

M. Graves, professeur.

1. $\frac{x^2}{t-a^2}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}+-1=0$ étant une équation en t, prouver que si $a>b>c>$ etc., les limites des racines sont a^2, b^2, c^2, etc.; ainsi toutes les racines sont réelles et inégales.

2. λ^2, μ^2, ν^2 sont les trois racines de l'équation en t, $\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}=1$, exprimer x, y, z en fonction de λ, μ, ν, b et c.

3. $F(k)$ étant une fonction rationnelle et entière du degré n de k, décomposer $\frac{k^m}{F(k)}$ en fractions partielles; on a $m<n$.

4. De là nous pouvons tirer immédiatement la solution de ce système d'équations :

$$\begin{gathered}
x+y+z+\ldots t=1 \\
ax+by+cz+\ldots bt=k \\
a^2x+b^2y+c^2z+\ldots b^2t=k^2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a^{n-1}x+b^{n-1}y+c^{n-1}t+\ldots b^{n-1}z=k^{n-1}.
\end{gathered}$$

5. Développer $\frac{x}{c^x-1}$ dans une série suivant les puissances ascendantes de x.

6. Trouver les intégrales $\int\frac{dx}{\cos^n x}$ et $\int\frac{dx}{\sin^n x}$, n étant un nombre entier.

7. Déterminer sur la sphère un point tel que la somme des cosinus des distances de ce point à un nombre quelconque de points fixes sur la sphère, soit un maximum.

8. P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés ; P′ est le point d'intersection des deux polaires de P, relativement aux deux cercles ; P et P′ sont dits *points réciproques*. Prouver que l'axe radical passe par le milieu de PP′.

9. D'un point P d'une conique à centre, soient menées deux cordes PA, PB parallèles à deux diamètres égaux, le cercle passant par A, B et P touche la conique en P, et a pour rayon $\frac{r^2}{p}$; r étant le demi-diamètre auquel une des cordes est parallèle, et p la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en P.

10. Déduire de là la formule connue pour le rayon de courbure.

11. Un côté d'un triangle inscrit dans un cercle est donné de direction, un second côté est assujetti à passer par un point donné ; quel est le lieu du pôle du troisième côté ?

12. D'un point P d'une conique, abaissez les perpendiculaires p, p', p'' sur une corde TT′ et sur les deux tan-

gentes TS, T'S menées par les extrémités; démontrer que l'on a $\frac{p'p''}{p^2} = \frac{\pi'\pi''}{\pi^2}$; π', π'', π étant les perpendiculaires abaissées du centre de la section sur TS, TS', et sur la tangente parallèle à TT'.

13. Soit une tangente menée en P et des perpendiculaires π, π', π'' abaissées sur cette tangente de S, T et T', prouver que $\pi'.\pi'' = \pi^2$.

14. Prouver que $\frac{p'p'}{\pi'\pi''} = \frac{\pi'\pi''}{\pi^2}$; π étant la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en P.

ANNONCES.

professeurs pour exercer numériquement les élèves sur des données réelles, et non, comme presque toujours, sur des suppositions arbitraires et souvent même absurdes. Outre des connaissances positives qu'acquerront ainsi professeurs et élèves, c'est aussi un moyen de faire aimer la science, en en montrant les applications aux besoins du pays.

Thèse de mécanique et d'astronomie, présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 25 octobre 1847, par M. J. A. Serret. Paris, 40 p. in-4°, 1847. Bachelier, lib.

La thèse roule sur la célèbre question du mouvement d'un point dans l'espace attiré vers deux centres fixes. L'auteur fait usage de coordonnées elliptiques mises en vogue par M. Lamé et entrevues par Legendre. Dans un sujet traité par L. Euler, Lagrange, Legendre, et récemment par M. Liouville, le profond analyste trouve encore à ajouter, à éclaircir. La thèse d'astronomie s'occupe de la détermination de la figure des corps célestes. Il est très-agréable de trouver ici sous une forme élégante tout ce qu'on a découvert sur cette importante matière, depuis les travaux de Maclaurin jusqu'à l'ellipsoïde à axes inégaux de M. Jacobi. Le tout est d'une lecture attachante ; mérite rare dans les écrits de ce genre, et qui par cela même doit être signalé.

QUESTIONS.

—

170. *abc*, ABC étant deux triangles rectilignes situés dans le même plan, les quatre sommets b, c, B, C sont fixes ; on a la relation $\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} =$ constante.

Si le sommet a decrit une ligne plane algébrique de degré pair et divisée par la droite bc en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une ligne de même degré.

171. $abcd$, ABCD étant les deux tétraèdres, les six sommets b, c, d, B, C, D sont fixes ; on a la relation

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{ad}{AD} = \text{constante}.$$

Si le sommet a décrit une surface algébrique de degré pair, et divisée par le plan bcd en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une surface de même degré.

(JACOBI.)

172. Étant données la longueur d'un arc de cercle et celle de sa corde, déterminer le rayon. (VINCENT.)

173. Une longueur étant partagée en m parties égales par des points *noirs*, et en n parties égales par des points *rouges*, déterminer la plus petite distance entre un point noir et un point rouge. (VINCENT.)

174. Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données, par le moyen du théorème de Descartes. (JACOBI.)

DEUX PROBLÈMES

sur la parabole et l'hyperbole équilatère.

—

Par quatre points C, B, D, E *faire passer une parabole.*

Fig. 32. Prolongez les droites CB, DE jusqu'à leur rencontre en A ; prenez AG, moyenne proportionnelle entre AC et AB, et de même AH, moyenne entre AE, AD. La droite

AM, menée du point A au milieu de GH, sera un diamètre de la parabole.

Par quatre points C, B, D, E *faire passer une hyperbole équilatère.*

Fig. 33. Prolongez les droites CB, DE jusqu'à leur rencontre en A ; prenez les longueurs AG, AH, moyennes proportionnelles, la première entre AC et AB, la seconde entre AE et AD. Sur la droite MA, menée par le milieu de GH, prenez une longueur $ML = MG$, et tirez les droites LG, LH. Ces droites seront parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

QUESTION D'EXAMEN

sur les racines carrées des racines d'une équation algébrique.

—

Problème. Étant donnée une équation algébrique, trouver l'équation qui a pour racines les racines carrées prises avec un seul signe des racines de la proposée.

Équation du second degré.

Solution. Soit $x^2 - a_1x + a_2 = 0$ l'équation proposée, α^2, β^2 les racines.

Soit $x^2 - b_1x + b_2 = 0$, l'équation cherchée, ayant pour racines α et β, on a les relations connues $b_1^2 - 2b_2 = a_1$; $b_2^2 = a_2$; d'où $b_1 = \sqrt{a_1 + 2\sqrt{a_2}}$; $b_2 = \sqrt{a_2}$.

Exemple numérique : $\alpha=1$; $\beta=2$; $a_1=5$; $a_2=4$; $b_1=3$; $b_2=2$.

Équation du troisième degré.

$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$, équation proposée ; α^2, β^2, γ^2, les trois racines ; $x^3 - b_1x^2 + b_2x - b_3 = 0$, équation cherchée ; racines α, β, γ ;

on a $\Sigma\alpha^2 = a_1 = b_1^2 - 2b_2$; $\Sigma\alpha^2\beta^2 = a_2 = b_2^2 = 2b_1b_3$;

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = a_3^2 = b_3^2 ;$$

d'où $b_3 = \sqrt{a_3}$; éliminant b_1, on obtient l'équation du quatrième degré

$$b_2^4 - 2a_2b_2^2 - 8a_3b_2 + a_2^2 + 4a_1a_3 = 0.$$

Exemple numérique : $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 3$; $a_1 = 14$; $a_2 = 49$; $a_3 = 36$.

L'équation en b_2 est $b_2^4 - 98b_2^2 - 288b_2 + 385 = 0$; d'où $b_2 = 11$.

On procède de même pour les équations des degrés supérieurs.

Observations. 1. Si dans la proposée de degré m, on fait $x = y^2$, la transformée en y a pour racines les racines carrées des racines de la proposée, chacune prise avec les deux signes ; aussi la transformée est de degré $2m$ et les termes de rang pair, combinaisons impaires des racines, manquent.

2. Dans l'équation qu'on obtient par le procédé indiqué, les coefficients sont irrationnels. Faisant disparaître les radicaux, on est ramené au cas général.

3. On peut suivre la même marche pour calculer une équation ayant pour racines les racines d'indice donné quelconque des racines de la proposée.

SUR LE XXIVᵉ PROBLÈME

de l'arithmétique universelle (*).

PAR M. ABEL TRANSON.

PROBLÈME. *Par un point* A *donné à égale distance de deux droites rectangulaires* OX, OY, *mener une sécante telle que la partie* BC *interceptée par ces droites, soit égale à une ligne donnée* m.

Ce problème, qui offre, par la diversité de ses solutions, un précieux exercice aux commençants, est choisi comme exemple dans les livres élémentaires; mais il me semble qu'on n'en a pas tiré tout le parti possible.

Premièrement, si on appelle a la distance du point A à chacun des côtés de l'angle droit, on trouve, pour déterminer la longueur du segment OB intercepté par la ligne cherchée sur le côté OX, l'équation

$$(\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - m^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0;$$

Équation qu'on abandonne aussitôt pour chercher quelque solution plus simple; mais c'est bien à tort, car cette équation est propre à donner un exemple remarquable d'abaissement, et la construction des segments OB est aussi facile que celle de la plupart des lignes qu'on prend pour inconnues dans les autres solutions du même problème.

Remarquez, en effet, que les quatre segments sur l'axe OY sont égaux aux segments sur OX. Or, entre les deux

(*) V. t. III, p. 180 et 262.

segments OB et OC, que donne une même position de la ligne m, il y a une relation qu'on a dû écrire pour former l'équation (α); c'est

$$\text{OB} : \text{OC} :: \text{OB} - a : a.$$

Les racines de l'équation (α) satisfont donc par couples à la condition

$$x' : x'' :: x' - a : a;$$

c'est-à-dire à l'équation $x'x'' = a(x' + x'')$. — Ou, ce qui revient au même, on est assuré que l'équation (α) admet deux diviseur de la forme $x^2 - px + ap$.

On vérifie cette indication en identifiant le premier membre de (α) au produit

$$(x^2 - px + ap)(x^2 - p'x + ap');$$

et on trouve, en effet, qu'il suffit de poser $p + p' = 2a$, avec $pp' = -m^2$; de sorte que p et p' sont racines de l'équation

$$z^2 - 2az - m^2 = 0,$$

d'où on tire $p = a - \sqrt{a^2 + m^2}$; et $p' = a + \sqrt{a^2 + m^2}$. Ainsi deux des segments OB sont racines de l'équation

$$x^2 - (a - \sqrt{a^2 + m^2})\,x + a(a - \sqrt{a^2 + m^2}) = 0,$$

et les deux autres de l'équation

$$x^2 - (a + \sqrt{a^2 + m^2})\,x + a(a + \sqrt{a^2 + m^2}) = 0.$$

Maintenant je vais rappeler sommairement les solutions dans lesquelles le choix de l'inconnue conduit à une équation du second degré seulement.

1° Solution de Pappus; c'est celle que M. Fontès a étendue au cas d'un angle quelconque dans sa *deuxième construction*. (*Nouv. Ann.*, t. VI, p. 184) (*).

(*) Pappus donne deux solutions; une par la conchoïde et l'autre par l'inter-

2° Première solution de Newton. On prend pour inconnue la distance entre le point A et le milieu de BC; voir tous les traités élémentaires.

3° Deuxième de Newton. Du milieu de BC on abaisse une perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle droit. Appelant y la distance entre l'origine O et le pied de cette perpendiculaire; b la demi-longueur de BC, et e la distance OA; la valeur de y dépend de l'équation extrêmement simple

$$2y^2 + ey = b^2$$

à laquelle on parvient en exprimant, au moyen des quantités e et y, la distance de A au milieu de BC; et substituant cette expression à la lettre x dans les équations de la solution précédente, n° 2.

4° Solution de M. Gergonne, rapportée dans le livre de M. Cirodde, étendue par M. Fontès au cas de l'angle oblique.

J'ignore si les deux solutions suivantes ont déjà été données quelque part.

5° Si on prend pour inconnue le rayon du cercle inscrit au triangle formé par les deux côtés de l'angle droit et la sécante BC, on trouve l'équation

$$2ar^2 + 2ar(m - a) - a^2m = 0,$$

et on pourrait former également l'équation relative à l'un des trois cercles ex-inscrits.

6° Enfin on peut prendre pour inconnue la distance z entre l'origine et le point D, où le cercle circonscrit rencontre la bissectrice. — Cette manière de résoudre le problème doit être remarquée comme comprenant, avec une

section d'une hyperbole équilatère et d'un cercle; sans mentionner le cas où le point est sur une bissectrice (liv. IV, prop. XXIII et XXX). Tm.

égale facilité, le cas d'un angle quelconque θ. — On arrive très-aisément à l'équation

$$z(z-e)=\frac{m^2(1-\cos\theta)}{2\sin^2\theta}$$

en appelant e la distance OA.

NOTE

Sur la division d'un trapèze dans le rapport de m *à* n *par une parallèle aux bases.*

PAR M. LÉON ANNE,
Professeur,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

—

La solution de ce problème indiquée par M. Rivals, page 387 de ce volume, conduit aux conséquences suivantes, remarquables par leur généralité.

1° Soit b la base d'un triangle T, x la parallèle à b qui partage la surface T dans le rapport de m à n, et t le triangle qui est une de ces deux parties :

$$T-t:t::b^2-x^2:x^2::m:n,$$

d'où
$$x^2=\frac{n}{n+m}b^2,$$

expression indépendante de tous les autres éléments du triangle.

Donc, tous les triangles qui ont b pour base, ont leurs surfaces partagées dans le rapport de m à n par une droite parallèle à la base et de longueur $b\sqrt{\dfrac{n}{m+n}}$ dans chacun de ces triangles, quels que soient et la hauteur et les angles.

2° Si b est la base d'un triangle quelconque, face latérale d'une pyramide quelconque, en inscrivant dans ce triangle latéral une droite parallèle à b et de longueur $b\sqrt{\frac{n}{n+m}}$, et menant par cette droite un plan parallèle à la base de la pyramide, ce plan partage la surface convexe de la pyramide dans le rapport de m à n, puisque tous les triangles latéraux sont tous partagés dans le rapport de m à n.

3° Si b est le rayon de base d'un cône quelconque, si l'on coupe ce cône par un plan parallèle à la base, et donnant pour section un cercle de rayon $b\sqrt{\frac{n}{m+n}}$; ce plan partage la surface convexe du cône dans le rapport de m à n ; puisque les surfaces convexes des deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des bases.

4° Si b est la base d'un triangle quelconque, face latérale d'une pyramide quelconque, en inscrivant dans ce triangle latéral une droite parallèle à b et de longueur $b\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}}$, et menant par cette droite un plan parallèle à la base de la pyramide, ce plan partage le volume de la pyramide dans le rapport de m à n ; puisque les volumes de deux pyramides semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.

5° Si b est le rayon de base d'un cône quelconque, si l'on coupe ce cône par un plan parallèle à la base, et donnant pour section un cercle de rayon $b\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}}$, ce plan partage le volume du cône dans le rapport de m à n, puisque les volumes des cônes semblables sont entre eux comme les cubes des rayons des bases.

6° Soient a la base inférieure d'un trapèze, b la base supérieure, x la sécante parallèle aux bases et partageant la surface du trapèze dans le rapport de m à n; soient enfin A, B, X les triangles de bases a, b, x formés en prolongeant les côtés non parallèles du trapèze

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}-\mathrm{X}:\mathrm{X}::a^2-x^2:x^2 \\ \mathrm{X}:\mathrm{X}-\mathrm{B}::x^2:x^2-b^2 \end{array}\right\} \mathrm{A}-\mathrm{X}:\mathrm{X}-\mathrm{B}::a^2-x^2:x^2-b^2::m:n.$$

D'où
$$x^2=\frac{m}{m+n}b^2+\frac{n}{m+n}a^2,$$

expression indépendante de tous les éléments du trapèze autres que les bases parallèles.

Donc tous les trapèzes de mêmes bases a, b ont leurs surfaces partagées dans le rapport de m à n par une droite parallèle à ces bases et de longueur $\sqrt{\frac{m}{m+n}b^2+\frac{n}{m+n}a^2}$ dans chacun de ces trapèzes, quels que soient et la hauteur et les angles.

7° Si un trapèze quelconque de base a, b est la face latérale d'un tronc de pyramide quelconque, en inscrivant dans le trapèze latéral une droite parallèle aux bases a, b et de longueur $\sqrt{\frac{m}{m+n}b^2+\frac{n}{m+n}a^2}$, et menant par cette droite un plan parallèle aux bases du tronc de pyramide; ce plan partage la surface convexe du tronc de pyramide dans le rapport de m à n, puisque tous les trapèzes latéraux sont partagés dans le rapport de m à n.

8° Si a, b sont les rayons des bases d'un tronc de cône quelconque, si l'on coupe ce tronc de cône par un plan parallèle aux bases et donnant pour section un cercle de rayon $\sqrt{\frac{m}{m+n}b^2+\frac{n}{m+n}a^2}$, ce plan partage la surface convexe du tronc de cône dans le rapport de m à n, puisque les surfaces convexes des cônes semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des bases.

9° Si a, b sont les bases d'un trapèze quelconque, face latérale d'un tronc de pyramide quelconque, en inscrivant dans ce trapèze latéral une droite parallèle aux bases a, b et de longueur $\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}b^3+\frac{n}{m+n}a^3}$, et menant par cette droite un plan parallèle aux bases du tronc de pyramide, ce plan partage le volume du tronc de pyramide dans le rapport de m à n, puisque les volumes des pyramides semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.

10. Soient a, b, les rayons de bases d'un tronc de cône quelconque, si l'on coupe ce tronc de cône par un plan parallèle aux bases, et donnant pour section un cercle de rayon $\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}b^3+\frac{n}{m+n}a^3}$; ce plan partage le volume du tronc de cône dans le rapport de m à n; puisque les volumes des cônes semblables sont entre eux comme les cubes des rayons des bases.

NOTE

sur le nombre de racines réelles contenues entre des limites données, à l'aide du théorème de Descartes (Question 174, p. 455).

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

—

On sait que le théorème de Descartes fait connaître immédiatement une limite supérieure du nombre des racines réelles positives d'une équation, et même le nombre exact de ces racines quand l'équation n'a aucune racine imaginaire. Le même théorème, appliqué à la transformée en $-x$ d'une équation, peut aussi donner une limite supérieure ou le nombre exact, dans le cas de la réalité de toutes les racines, du nombre des racines réelles négatives de cette équation. C'est ce que l'on montre dans tous les traités d'algèbre; mais ce qui n'est pas suffisamment connu, c'est qu'on peut déduire du seul théorème de Descartes une limite supérieure du nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux nombres donnés a et b, et même le nombre exact de ces racines quand l'équation proposée n'a aucune racine imaginaire; or il suffit pour cela de considérer la transformée en $y=\frac{a-x}{x-b}$, qui évidemment a autant de racines réelles positives que la proposée en a de comprises entre a et b. Cette remarque, que l'on doit à M. Jacobi (*), est d'une grande importance. On voit, en effet, qu'elle permet dans un grand nombre de cas d'éviter l'emploi du théorème de M. Sturm; du reste la transformée en y a une forme assez simple : en effet, de $y=\frac{a-x}{x-b}$ on tire $x=\frac{by+a}{y+1}=b+\frac{a-b}{y+1}$, et si $f(x)=0$ est l'équation proposée, on obtient pour la transformée

$$\begin{aligned} & y^n f(b)+y^{n-1}\left[\frac{n}{1}f(b)+f'(b)d\right]+ \\ & y^{n-2}\left[\frac{n(n-1)}{2}f(b)+\frac{(n-1)}{1}f'(b)d+\frac{f''(b)}{1.2}d^2\right]+ \\ & y^{n-3}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f(b)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f'(b)d+\right. \\ & \left.+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{f''(b)}{1.2}d^2+\frac{f'''(b)}{1.2.3}d^3\right]+\ldots=0; \end{aligned}$$

n étant le degré de l'équation, et d la différence $a-b$.

(*) Crelle, XIII, 340, 1835.

Une autre remarque que j'ai consignée il y a quelques années dans les tableaux polytechniques publiés par M. Blum, c'est que lorsque l'équation proposée n'a pas de racines égales, si l'on suppose a et b suffisamment rapprochés l'un de l'autre, la transformée en $y=\frac{a-x}{x-b}$ finit par se trouver dans l'un de ces deux cas : ou de ne plus avoir que des permanences, ou de ne plus avoir qu'une variation; de là résulte que le théorème de Descartes ou plutôt la conséquence que M. Jacobi en a déduite, suffit pour conduire d'une manière complète à la séparation des racines; pour cela étant donnée une équation $f(x)=0$, on prend tous les nombres entiers compris entre les limites extrêmes de l'équation, et n et $n+1$ étant deux consécutifs de ces nombres, on cherche par la transformée en $y=\frac{n+1-x}{x-n}$ combien ils comprennent au plus de racines réelles ; supposons que l'on trouve k, on prend $\alpha<1$ d'une manière quelconque et on cherche de même combien il y a au plus de racines entre n et $n+\alpha$, et entre $n+\alpha$ et $n+1$; supposons que l'on trouve k' pour les deux limites n et $n+\alpha$, on prend $\alpha'<\alpha$ d'une manière quelconque et on cherche de même combien il y a au plus de racines entre n et $n+\alpha'$, et entre $n+\alpha'$ et $n+\alpha$; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur une transformée en $y=\frac{a-x}{x-b}$ qui ne présente que des permanences ou une seule variation, auxquels cas les deux limites a et b ne comprennent aucune racine réelle, ou en comprennent une seule.

Quant à la propriété de la transformée en $y=\frac{a-x}{x-b}$, d'après laquelle a et b étant suffisamment rapprochés, le nombre des variations du premier membre est 0 ou 1 , on l'établit simplement comme il suit : faisons $a=b+\delta$, ce qui donne $y=-1+\frac{\delta}{x-b}$, et supposons d'abord que les deux limites a et b ne comprennent aucune racine réelle de l'équation, je dis que si δ est suffisamment petit, toutes les racines de la transformée en y différeront aussi peu qu'on voudra de -1, le degré de petitesse de la différence entre les racines et -1 étant mesuré dans le cas où ces racines sont imaginaires par celui du module de cette différence. En effet, considérons d'abord les valeurs de y qui correspondent aux valeurs réelles de x et qui sont évidemment réelles. Si nous désignons par ε un nombre positif et déterminé plus petit, 1° que toutes les différences obtenues en retranchant a successivement de toutes les racines réelles de l'équation proposée qui sont supérieures à a, et 2° que toutes les différences obtenues en retranchant de b successivement toutes les racines inférieures à b, les valeurs de y considérées différeront de -1 de moins que $\frac{\delta}{\varepsilon}$; or δ finit par devenir aussi petit que l'on veut quand on resserre les limites. D'ailleurs ε peut être supposé constant, donc les valeurs réelles de y finissent par être constamment aussi peu différentes de -1 qu'on le veut. Donnons maintenant à x les valeurs imaginaires; soit $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ l'une de ces valeurs, la valeur correspondante de y sera $y=-1+\frac{\delta}{\alpha-b+\beta\sqrt{-1}}$. Or, si on appelle ε' un nombre déterminé et positif plus petit que la valeur absolue de tous les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les racines imaginaires de l'équation proposée, la différence qui existera entre la valeur de y considérée et -1 aura un module plus petit que $\frac{\delta}{\varepsilon'}$. Or $\frac{\delta}{\varepsilon'}$ peut devenir aussi petit qu'on le voudra en resserrant suffisamment les limites a et b; donc les valeurs imaginaires de y, comme les valeurs réelles, finissent par être constamment aussi peu différentes de -1 qu'on le veut; on conclut aisément de là, en se rappelant les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation, et les propriétés élémentaires des modules des expressions imaginaires, que les coefficients de la transformée en y finissent par être constamment aussi peu différentes qu'on le veut de ceux d'une équation qui a toutes ses racines égales à -1, c'est-à-dire de $(y+1)^m=0$ (m est le degré de l'équation proposée, et, par suite, de la transformée). D'ailleurs cette dernière équation n'a évidemment que des permanences; donc lorsque a et b se rapprochent indéfiniment en ne comprenant aucune racine de l'équation proposée, la transformée en $y=\frac{a-x}{x-b}$ finit par ne plus avoir de variations.

Supposons maintenant que a et b, en se rapprochant, comprennent toujours une et une seule racine réelle de l'équation proposée, je dis que la transformée en y finira par avoir constamment une seule variation; en effet, dans ce cas, nous avons toujours dans la transformée en y une racine réelle positive, c'est celle qui correspond à la valeur de x comprise entre a et b; et quant aux $(m-1)$ autres racines, elles se rapprochent indéfiniment de -1, comme dans l'autre cas, de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut; supposons a et b assez près l'un de l'autre et le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces dernières racines assez peu différent de $(y+1)^{m-1}$, pour que dans ce produit les coefficients soient 1° positifs, et 2° tels que le rapport de l'un quelconque d'entre eux au précédent aille toujours en diminuant à mesure qu'il se rapporte à un terme de rang plus élevé, propriétés qui ont lieu, comme l'on sait, dans $(y+1)^{m-1}$. Je dis qu'à partir de ce moment la transformée en y ne présentera qu'une variation; en effet, soit

$$\varphi(y) = y^{m-1} + A_1 y^{m-2} + A_2 y^{m-3} + \ldots + A_{m-2} x + A_{m-1};$$

le produit des facteurs du premier degré correspondants aux valeurs de y, très-peu différentes de -1, et α la valeur positive de y qui correspond à la valeur de x, comprise entre a et b; si nous multiplions $\varphi(y)$ par $y-\alpha$, le produit

$$y^m \left.\begin{matrix} +A_1 \\ -\alpha \end{matrix}\right| y^{m-1} \left.\begin{matrix} +A_2 \\ -A_1\alpha \end{matrix}\right| y^{m-2} + \ldots - A_{m-1}\alpha$$

sera le premier membre de la transformée en y. Or ce polynôme a au moins une variation, puisque les termes extrêmes ont des signes contraires; du reste il n'en a pas plus d'une, car si $A_n - A_{n-1}\alpha$ est le premier coefficient négatif de ce polynôme, on aura $\alpha > \frac{A_n}{A_{n-1}}$, mais

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > \frac{A_{n+1}}{A_n} > \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}, \ldots > \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

donc on aura aussi

$$\alpha > \frac{A_{n+1}}{A_n}, \ \alpha > \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}, \ldots \alpha > \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

ou bien

$$A_{n+1} - A_n\alpha < 0, \ A_{n+2} - A_{n+1}\alpha < 0, \ldots A_{m-1} - A_{m-2}\alpha < 0;$$

ce qui prouve que tous les coefficients qui suivent le premier coefficient négatif sont aussi négatifs, et par conséquent que le polynôme ne présente qu'une variation; nous arrivons ainsi au résultat énoncé.

Je dois dire, en terminant, que la démonstration qui précède est analogue à celle que M. Vincent a employée pour prouver que le théorème de Fourier conduit toujours à la séparation des racines, lorsque le rapprochement des limites se fait par la méthode de Lagrange. (Liouville, I, 341, 1836.)

BIBLIOGRAPHIE.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, suivis de la théorie des logarithmes, par E. Lionnet, professeur de mathématiques au collége royal Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'École navale, in-8° de 320 pages. 1847, Paris (*).

(Fin, voir page 439.)

Liv. IV (139-171). *Racines carrées et racines cubiques.* Les deux opérations sont décrites avec une grande simplicité. Toute proposition sur les carrés est suivie immédiatement de la proposition analogue sur les cubes, ce qui rend la marche plus rapide. Est-elle appropriée à l'état moyen intellectuel des commençants? On lit (p. 146) : *La racine carrée d'un nombre, à moins d'un autre nombre, est le plus grand multiple du second nombre dont le carré soit contenu dans le premier.* Cette définition est-elle claire? N'est-il pas préférable de s'en tenir à la définition générale des approximations, où l'on dit qu'une quantité est approchée de sa valeur exacte, à moins d'un nombre donné, lorsque la différence pour excès ou défaut est moindre que ce nombre ?

Le problème III (p. 167), où l'on donne un critérium pour reconnaître si un nombre entier est un carré, au moyen du nombre de ses diviseurs, est curieux. L'auteur indique aussi comme, à l'aide des deux premières opérations radicales, on peut extraire les racines d'indice $2^m \cdot 3^n$, m et n étant les nombres entiers.

(*) Chez Desobry, Magdeleine et compagnie, rue des Maçons-Sorbonne, 1.

Liv. V (172-238). *Proportions et progressions.*

Qui nous délivrera des Grecs et des Romains? disait le spirituel auteur de la *Gastronomie*. Les proportions et les progressions sont les Grecs et les Romains de l'arithmétique. On peut en dire autant, avec plus de raison encore. Ce n'est pas qu'il y ait eu progrès, car, au moyen âge, on distinguait des *rapports* par douzaines, et on leur donnait des noms rébarbatifs à rendre jaloux nos nomenclateurs chimiques. Le temps, ce grand déblayeur des mauvaises choses, a presque tout enlevé et a encore trop laissé. Une page d'écriture algébrique suffirait pour expédier facilement ce qu'on nous donne péniblement par la méthode discursive en trente pages. L'auteur s'est conformé au préjugé généralement établi qu'un raisonnement mathématique est d'autant plus solide, plus profond, qu'il est plus étendu, plus long. C'est le contraire qui est vrai : les plus courts raisonnements sont toujours les plus profonds, pénétrant plus dans l'essence du sujet.

Des applications nombreuses de la règle de trois directe et inverse et des règles d'intérêt terminent ce livre. On définit l'intérêt (p. 210) ce que rapporte *un capital pendant un certain temps.*

Il serait peut-être plus convenable d'assimiler l'intérêt à une location, et définir l'intérêt : le loyer d'une somme payé au prêteur par l'emprunteur.

Le Lilavati contient ce singulier exemple : Une esclave de seize ans coûte 32 *nischas*, combien une esclave de vingt ans? Réponse : 23 3/4 nichas, raison inverse. (Sect. VI, § 76.)

Liv. VI (239-288). *Problèmes et théorèmes divers.*

Nous signalons ici avec une vive satisfaction un perfectionnement notable dans l'enseignement élémentaire. Quittant la voie battue, l'auteur rédige un *complément* aux théories arithmétiques, et qui est aussi un acheminement ou, selon le langage philosophique des Allemands, un *propédeutique* à la théorie des nombres ; doctrine malheureusement négligée malgré sa haute importance dans l'instruction, qu'a fait ressortir un des esprits les plus lucides, les plus élevés de notre siècle, le célèbre créateur des *couples*. Voici les matériaux renfermés dans cette partie dernière et la plus précieuse de l'ouvrage :

1° Numération et trois opérations dans un système de base quelconque ;

2° Limite du nombre d'opérations dans la recherche du plus grand commun diviseur (*Nouv. Annales*, t. IV, p. 617) ;

3° Proposition sur les carrés magiques (*Nouv. Annales*, t. II, p. 446) ;

4° Propositions diverses sur les diviseurs d'un nombre ;

5° Théorème de Fermat ; théorème de Wilson ;

6° Quatre propositions sur les *résidus quadratiques*. Il est probable que c'est pour la première fois que ce mot est prononcé dans un traité français d'arithmétique. Il est à regretter que l'auteur n'y ait pas joint la loi de réciprocité de Legendre, si facile à démontrer par la méthode de M. Dirichlet.

Il serait peut-être convenable d'attacher le mot *reste* uniquement à la soustraction, et de réserver le mot *résidu* pour le dernier reste de la division. Il existe ici une apparence de lacune. Les résidus *linéaires* ont occupé l'auteur dans les livres précédents ; il en a traité sans les nommer. Les *congruens* rentrent dans les résidus linéaires. Pourquoi éviter d'employer des expressions qui ont acquis droit de cité ?

7° *Arrangements et combinaisons*. Très-bien. Mais pourquoi s'obstiner à ne vouloir pas indiquer la manière de former les combinaisons, avec la certitude de n'en oublier aucune ? Cette formation est pourtant très-utile pour éclaircir la théorie des *déterminants*, qu'on rencontre maintenant dans toutes les parties de la science ;

8° *Probabilités.* Ce sont quelques applications du sujet précédent ; car on sait que le calcul des probabilités est fondé sur les coefficients binomiaux ou combinatoires. On donne ici quelques problèmes sur les *enjeux* et sur la loterie. Il semble, pour éviter des méprises, qu'il aurait fallu dire un mot de l'*espérance morale*, où l'on a égard à la fortune et à la position respective des joueurs. De là l'immoralité du jeu de la Bourse, où des hommes, comparativement pauvres et ignorant les causes perturbatrices qui agissent sur les fonds, jouent contre des banquiers millionnaires connaissant parfaitement ces causes et les faisant naître au besoin. Il y a opportunité à inculquer de bonne heure ce genre d'enseignement dans l'esprit de la jeunesse.

Ce livre est suivi par une théorie des logarithmes, donné avec la rigueur et les développements désirables, et qui termine l'ouvrage.

Le *Fari quæ sentiat* d'Horace étant le devoir de tout écrivain, nous avons hasardé quelques observations critiques ; d'autant plus volontiers qu'on pourra, si elles sont fondées, y avoir égard dans les fréquentes éditions qu'obtiennent facilement les bons ouvrages élémentaires, composés par des professeurs à classe nombreuse (*). Nous avons vu qu'une sévérité didactique était la tendance dominante de cette arithmétique ; celle de M. Guilmin a une tendance purement pédagogique. Conçue dans cet esprit, l'exécution doit être différente, comme nous le dirons prochainement.

COLLÉGE ROYAL DE LA FLÈCHE.

Le succès éclatant que vient d'obtenir cet établissement d'éducation publique, semble digne d'être consigné. Sur

(*) La seconde édition vient de paraître.

quatre élèves présentés à l'école polytechnique, trois ont été admis, savoir :

1° Gros de Perrodil (Ferdinand-Victor), âgé de 17 ans, première année de spéciales, 1er de la promotion.

2° Laboissière (Adrien-Jean-Marie), âgé de 17 ans, première année de spéciales, 38me de la promotion.

Deshautschamps (François-Léopold), âgé de 17 ans, 55me de la promotion.

Le ministre de la guerre a adressé une lettre de félicitation au général commandant, et une autre à M. Bonfils, professeur de ces jeunes gens, qui conservent à l'école polytechnique les bourses qu'ils avaient au collége.

Ce brillant résultat est une preuve surabondante que le talent d'enseignement mathématique n'est pas, et fort heureusement, concentré dans la capitale.

NOTE

Sur la géométrie analytique de la sphère.

—

L'Allemagne possède depuis plus d'une dizaine d'années une *sphérique analytique;* tel est le titre traduit d'un ouvrage du professeur E. Gudermann, de Munster. Les courbes tracées sur la sphère sont représentées par des équations comme celles qui sont tracées sur un plan. Ainsi les grands cercles sont donnés par des équations linéaires, les coniques par des équations du second degré à six termes; de sorte qu'un problème étant résolu, ou un théorème étant démontré sur des courbes planes, peut être transféré sur les courbes analogues sphériques; les coordonnées sont certaines fonctions trigonométriques des distances sphériques des points aux axes coordonnés. Nous rappelons ce fait, parce qu'on lit dans le Compte Rendu (n° 20, 15 nov. 1847, p. 723), que M. Borgnet a soumis à l'examen de l'Académie un *Essai de géométrie sphérique*. Un certain système de coordonnées permet de traiter d'une manière uniforme tous les problèmes sur les coniques sphériques. Commissaires : MM. Cauchy, Poncelet, Liouville.

M. PHILIPPE KORALEK.

Souscription.

M. Philippe Koralek, né en Bohême, élève de l'école polytechnique de Vienne, possède une méthode pour calculer le logarithme d'un nombre entier de 1 à 10 millions ; le logarithme d'une ligne trigonométrique d'un arc, degrés, minutes et secondes, avec sept décimales exactes, en *quelques minutes*; de même les opérations inverses ; c'est ce qu'il a fait en séance publique à Vienne, comme il est constaté par les journaux du pays, et plusieurs fois en notre présence à Paris. Ce jeune homme a quitté son pays natal, le régime par trop paternel du Spielberg, pour venir respirer l'air de la liberté en France ; mais cet air, pas plus que celui de l'atmosphère, ne donne à vivre. Désirant se faire connaître et se créer une existence, M. Koralek a donc adressé à l'Académie des sciences un mémoire contenant la description de sa méthode. On sait que les rapports académiques, lorsque, par exception, ils sont faits, rapportent quelque honneur, et même rien du tout quand, selon la règle, ils ne sont pas faits. Toutefois il était permis ici d'espérer un *tour de faveur*, car le rapporteur désigné, illustre inventeur du calcul des résidus, connu par sa respectueuse soumission aux paroles de l'Écriture, pouvait se rappeler celles-ci : *Vous aimerez l'étranger, car vous avez été vous-mêmes étrangers en Égypte.* Devant viser à d'autres moyens, le jeune Bohême a traduit de l'allemand un ouvrage élémentaire, composé par Joseph Salomon, professeur à l'école polytechnique de Vienne, sous le titre : *Recueil de problèmes et théorèmes sur la planimétrie*, etc. Il contient 217 problèmes *résolus* et 235 théorèmes *démontrés,* qui offrent aux professeurs des exemples intéressants et aux élèves d'utiles exercices parfaitement gradués. Mettant son espoir dans la générosité française, l'auteur publie par voie de souscription. On aura ainsi l'occasion d'acquérir un bon ouvrage, tout en faisant une bonne action.

Prix de la souscription : 5 fr.

On souscrit chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins.

SOLUTION DE LA QUESTION N° 169, p. 394 (*),

PAR M. DRIANE DE LORNAG,
élève en spéciales.

Soit O l'horizontale passant par le point de départ, et OY la verticale du même point, v la vitesse initiale et α son angle avec OY ; les projections du mouvement sur ces deux droites seront :

(1) $$y = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

(2) $$x = vt\cos\alpha,$$

(*) On est prié de faire la figure.

t désignant le temps compté à partir du départ du mobile ; l'élimination de t entre ces deux équations donnera la trajectoire décrite par le centre de gravité du mobile, qui sera

$$\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} - x\,\text{tang}\,\alpha + y = 0; \tag{3}$$

elle représente une parabole dont l'axe est parallèle à OY. Si on change x en $x+h$, y en $y+k$, les coefficients de α^2 et de y seront les mêmes dans la transformée quels que soient h et k; donc cette courbe, rapportée à son sommet, aura pour équation :

$$\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + y = 0;$$

son paramètre sera donc $\dfrac{2v^2\cos^2\alpha}{g}$.

Le sommet sera le point pour lequel la valeur de y, prise dans l'équation (1), sera maximum, c'est-à-dire lorsqu'on aura :

$$v\sin\alpha = gt \quad \text{ou} \quad t = \frac{v\sin\alpha}{g};$$

en portant cette valeur dans les équations (1), (2), on aura pour les coordonnées du sommet :

$$\mathrm{Y} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} \tag{4}$$

$$\mathrm{X} = \frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}. \tag{5}$$

En éliminant α entre ces deux équations, nous aurons le lieu des sommets ; divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{tg\alpha}{2},$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{4\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2};$$

portant cette valeur dans (4)

$$2gY = \frac{4v^2Y^2}{X^2+4Y^2}$$

$$gyx^2 + 4gy^3 - 2v^2y^2 = 0.$$

En supprimant la solution $y=0$, qui ne satisfait pas à la question, on a

$$gx^2 + 4gy^2 - 2v^2y = 0, \qquad (6)$$

équation d'une ellipse dont l'axe des y est un axe de symétrie, ce qu'on pouvait prévoir; car en donnant à α les valeurs α_1 et $180^\circ - \alpha_1$, on doit obtenir deux paraboles égales et symétriquement placées par rapport à OY. Pour avoir la partie de OY interceptée par la courbe, il faut dans l'équation (6) faire $x=0$; la différence des deux valeurs de y sera la valeur cherchée.

On trouve ainsi $y=0$, $y=\frac{v^2}{2g}$, d'où $b=\frac{v^2}{4g}$.

Pour avoir la demi-longueur a du deuxième axe, nous ferons $y=\frac{v^2}{4g}$, et la valeur trouvée pour x sera a, d'où

$$a = \frac{v^2}{2g}.$$

Si à la valeur de y prise dans l'équation (4), on ajoute la valeur $\frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$, quart du paramètre, on aura l'ordonnée constante de la directrice $\frac{v^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{2g}$ ou $\frac{v^2}{2g}$; cette valeur étant indépendante de α, toutes les paraboles proposées ont donc même directrice.

Quant aux foyers, ils ont mêmes abscisses que les sommets correspondants, et leurs coordonnées sont égales à celles de ces mêmes sommets, moins le quart du paramètre; en se reportant aux valeurs (4) et (5), on voit que les coordonnées cherchées sont :

$$y = -\frac{v^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

$$x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

élevant au carré et ajoutant :

$$y^2 + x^2 = \frac{v^4}{4g^2},$$

équation indépendante de α; elle représente donc le lieu des foyers. Ce lieu est un cercle dont le centre est au point de départ, et dont le rayon est égal à $\frac{v^2}{2g}$, valeur que l'on a trouvée déjà pour l'ordonnée de la directrice et le petit axe de l'ellipse; ceci fait voir que les trois lignes sont tangentes au point $\left(x = o,\ y = \frac{v^2}{2g}\right)$. On pouvait prévoir que les trois lieux se rencontreraient en ce point; car si on lance le projectile verticalement, il décrira une ligne droite dont la longueur calculée directement sera $\frac{v^2}{2g}$. Cette ligne étant la limite de toutes les paraboles proposées, lorsque le paramètre décroît indéfiniment, son extrémité doit être la limite des positions des sommets et des foyers de toutes les paraboles proposées, et se trouver sur la directrice ainsi que nous l'avons vérifié. On peut remarquer que l'ellipse et le cercle ont même tangente verticale; ainsi toute parallèle à la verticale coupant l'une des deux courbes en deux points rencontrera aussi l'autre en deux points.

Nous avons fait voir que d'après la nature de la question, les sommets et les foyers étaient symétriquement placés par rapport à l'axe des y. Il suffira donc, pour prouver que tous les points des deux lieux satisfont à la question, de démontrer que ceux qui sont situés à droite de l'axe des y satisfont. A la seule inspection de la valeur (4), on reconnaît que l'ordonnée du sommet peut varier entre 0 et $\frac{v^2}{2g}$, comme l'ordonnée des différents points de l'ellipse; donc tous les points de l'ellipse peuvent être occupés par des sommets. Imaginons une parallèle à oy, coupant l'ellipse en deux points M, M'; ces deux points seront les sommets des deux paraboles qui auront leurs foyers sur le cercle et sur la droite MM'. Celle qui passe en M' a son foyer au-dessus de l'axe des x, attendu que l'on a $M'P < \frac{v^2}{4g}$; quant à celle qui a son sommet en M, son foyer est placé en N au-dessous de l'axe des x, parce que la distance MP, distance du sommet à la directrice, est plus petite que $\frac{v^2}{2g}$. La droite MM' étant quelconque, il est démontré ainsi que tous les points du cercle peuvent être occupés par les foyers.

Note. M. Paul Serret a donné une solution plus courte du même problème. Il reste à démontrer que l'enveloppe de toutes ces paraboles est une parabole.

SUR LES

PREMIERS THÉORÈMES DE LA STÉRÉOMÉTRIE,

D'après M. Koppe, professeur à Sœst en Westphalie.
(*Crelle*, XIV, 70, 1805.)

Dans la planimétrie d'Euclide, les propositions sont arrangées avec un tel art, que l'une est toujours une conséquence des propositions précédentes; de telle sorte qu'aucune interversion de rang n'est possible. Cette impossibilité diminue à mesure que l'on avance, et arrivé aux plans, on a déjà acquis une telle richesse, qu'on peut admettre plusieurs ordres de succession pour asseoir les premiers fondements stéréométriques. Au premier abord, la marche la plus simple paraît être de considérer les lignes dans l'espace, ensuite la position des lignes et des plans, puis la position des plans dans l'espace. C'est aussi la marche adoptée par Euclide. Toutefois, comme la position mutuelle des lignes dans l'espace, ou envers un plan, ne peut s'établir solidement qu'à l'aide d'intersections de plans, ces déductions impliquent une sorte d'inconséquence. C'est ce qui a engagé M. Koppe à renverser l'ordre suivi et à commencer par la considération des plans. Il procède ainsi, mais nous supprimons les démonstrations que les lecteurs trouveront facilement.

1. *Principe.* La position d'un plan est déterminée par trois points non en ligne droite, par une droite et un point hors de la droite, par deux droites qui se coupent, par deux droites parallèles.

2. Deux plans ne peuvent avoir que ces trois positions possibles : ils sont parallèles, se coupent suivant une droite, ou coïncident. La même chose pour une droite et un plan.

3. *Définition.* L'angle dièdre est l'espace infini renfermé entre deux plans qui se coupent. Entre deux angles dièdres peuvent exister les trois relations de grandeur; angles adjacents, opposés au sommet; l'angle dièdre droit est celui qui est égal à son adjacent; deux plans sont perpendiculaires lorsqu'ils forment un angle dièdre droit.

4. De là suit que tous les angles dièdres droits sont égaux, comme dans la planimétrie et autres conséquences sur les angles adjacents et les angles opposés par le sommet.

5. *Premier théorème.* L'intersection de deux plans perpendiculaires sur un troisième est perpendiculaire sur les deux

droites; l'intersection des deux plans avec le troisième, se démontre par superposition.

6. *Deuxième théorème.* Si de deux plans, le premier est perpendiculaire à un troisième plan, et si la droite d'intersection des deux plans est perpendiculaire sur l'intersection du premier et du troisième plan, cette droite d'intersection sera aussi perpendiculaire sur l'intersection du second et du troisième plan, et ce second plan est aussi perpendiculaire sur le troisième; se démontre aussi par la superposition.

7. *Troisième théorème.* Si l'intersection de deux plans est perpendiculaire sur les deux intersections de ces deux plans par un troisième plan, les deux plans sont perpendiculaires sur ce troisième plan. Par superposition.

Observation. On peut faire précéder ce troisième théorème aux deux premiers; on évite ainsi de parler de plans perpendiculaires avant d'en avoir montré la possibilité.

8. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans un plan, elle est perpendicnlaire à toute autre droite menée par son pied dans le même plan. Conséquence des théorèmes deuxième et troisième; on peut toutefois démontrer aussi ce théorème par la superposition.

9. *Définition.* Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans le plan.

10. Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans le plan (8).

a) Si deux plans sont perpendiculaires sur un troisième, la droite d'intersection est perpendiculaire sur ce troisième plan (5).

b) Deux plans étant perpendiculaires, une droite menée dans l'un des plans perpendiculairement à l'intersection commune, est perpendiculaire à l'autre plan (6).

c) **Tout plan passant par une droite perpendiculaire à un second plan est perpendiculaire à ce plan (7).**

11. *a*) Deux droites perpendiculaires sur un plan sont parallèles (4).

b) Si de deux droites parallèles l'une est perpendiculaire sur un plan, l'autre est aussi perpendiculaire sur ce plan (10).

c) Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles; deux angles plans à côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 168,

Proposée dans le dernier numéro.

PAR M. JULES MOUTIER,
élève du collége de Versailles.

Une conique étant rapportée à des axes rectangulaires, si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point est égal à $\sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

1. Coniques à centre. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; l'équation générale de la tangente est

$$y=\alpha x\pm\sqrt{a^2\alpha^2+b^2};$$

$$\text{Si } \alpha=\sqrt{-1};\ y=x\sqrt{-1}\pm c\sqrt{-1};$$

$$y=0;\ x=\pm c.$$

2. Parabole. $y^2=2\mu x$; la tangente a pour équation générale :

$$y=\alpha x+\frac{\mu}{2\alpha};$$

$$\text{Si } \alpha=\sqrt{-1};\ y=x-\frac{\mu}{2}\sqrt{-1};$$

$$y=0.\ x=\frac{\mu}{2}.$$

3. Le même théorème s'applique aux normales.

Coniques à centres. L'équation générale des normales est :

$$y=\alpha x\pm\frac{\alpha c^2}{\sqrt{a^2+b^2\alpha^2}};$$

$$\alpha=\sqrt{-1}\,;\ y=x\pm c)\sqrt{-1}\,;\ y=0\,;\ x=\pm c.$$

Parabole. $$y=\alpha x-\alpha\mu\left(\frac{2+\alpha^2}{2}\right);$$

$$\alpha=\sqrt{-1}\,;\ y=\sqrt{-1}\left(x-\frac{\mu}{2}\right);\quad \text{donc, etc.}$$

SUR LES COMPOSITIONS

données dans les examens de concours pour l'École polytechnique.

PAR UN ABONNÉ.

On ne devrait, ce me semble, ni répéter d'une année à l'autre une même question, ni donner comme problème une chose connue.

Or, à l'École polytechnique, la question pour la sixième série en 1847 est, sauf la construction d'un lieu $y=\dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{x}{b}\right)}$, la même que celle pour la huitième série en 1846.

Que dire de cette question sous le n° V : Généralisation des formules trigonométriques? On en conclura sans doute que, sous peine de compromettre ses élèves, un professeur ne peut s'éloigner de certains ouvrages et employer la méthode si simple et si générale de Coriolis. Laplace avait donc tort de conseiller les méthodes générales?

Ces réflexions s'appliquent également aux compositions pour les autres Écoles du gouvernement.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces excellentes tables à l'extrême obligeance de M. le professeur Léon Anne.

---

* Nom anagrammatique.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne et trigonométrie sphérique.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

VII. Géométrie analytique à trois dimensions.

III. Trigonométrie.

IV. Géométrie analytique à deux dimensions.

III. Géométrie élémentaire.

IV. Trigonométrie rectiligne.

V. Géométrie analytique à deux dimensions.

VI. Mélanges.

VII. Annonces.

VIII. Questions proposées.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les six premiers volumes.

TOME I.

N°	Page
9	146
2 (bis)	122
4 (bis)	*ib.*
6 (bis)	*ib.*
25	247
28	*ib.*
31	394
34	395
35	*ib.*
41	396
45	519
47	*ib.*
51	520
52	*ib.*
56	521
57	*ib.*

TOME II.

N°	Page
60	48
61	*ib.*
62	(Stewart) 96
63	137
66	326
67	327
78	455
79	*ib.*

TOME III.

N°	Page
81	40
83	*ib.*
84	*ib.*
87	376
88	*ib.*
89	*ib.*

TOME IV.

N°	Page
93	259
95	260
99	370
103	*ib.*

TOME V.

N°	Page
116	167
117	*ib.*
120	202
135	672
136	*ib.*
139	*ib.*

TOME VI.

N°	Page
140	134
141	*ib.*
145	216
148	*ib.*
153	242
156	243
165	394
166	*ib.*
167	*ib.*
170	454
171	*ib.*
172	*ib.*
173	*ib.*
174	*ib.*

Observations. **Sur 174 questions, il en reste 54 à résoudre.**

ERRATA.

TOME I. (*Cinquième supplément.*)

Page 168, ligne 12, en remontant, 1827, *lisez :* 1727.
Page 526, ligne 20, en descendant, 93, *lisez :* 90.

TOME II. (*Quatrième supplément.*)

Page 43, ligne 11, en descendant, 423, *ajoutez :* t. I.
Page 431, ligne 7, en descendant, $-\frac{k}{m}, -\frac{k'}{m}$, *lisez :* $+\frac{k}{m}, +\frac{k'}{m}$.

TOME IV. (*Deuxième supplément.*)

Page 296, ligne 14, en descendant, $z'f(a)$, *lisez :* $zf(a)$.
Page 296, ligne 9, en remontant, Rz^n. Ce reste qui... *lisez :* Rz^nce, reste qui.
Page 400, ligne 9, en descendant, r, *lisez :* r^2.
Page 400, ligne 8, en remontant, $a\tang^2\phi$, *lisez :* $a^2\tan^2\phi$.
Page 528, ligne 15, en descendant, (1), *effacez.*
Page 528, ligne 12, en remontant, (2), *lisez :* (1).
Page 528, ligne 9, en remontant, (2), *lisez :* (1).

TOME V. (*Premier supplément.*)

Page 164, ligne 10, en remontant, $f(\alpha_1)$, *lisez :* $-f(v_1)$.
Page 221, nos 31, 32... 36, *mettez partout : bis.*
Page 266, ligne 8, en descendant, $=p$, *lisez :* $=2p$.
Page 266, ligne 9, en descendant, $p-hh'$, *lisez :* $2(p-hh')$,
Page 266, ligne 10, en descendant, $p-hh''$, *lisez :* $2(p-hh'')$.
Page 266, ligne 11, en descendant, $p-h'h''$, *lisez :* $2(p-h'h'')$.
Page 266, ligne 12, en descendant, $\frac{h^2h'^2h''^2}{\sqrt{\quad}}$, *lisez ;* $\frac{h^2h'^2h''}{4\sqrt{\quad}}$.
Page 722, ligne 9, en remontant, 125, *effacez.*

TOME VI.

Page 27, ligne 13, en descendant, Fig. 5, *effacez.*
Page 45, ligne 6, en remontant, 7, *lisez :* $\dot{7}$.

Page 51, ligne 9, en descendant, Fig. 9, *lisez :* Fig. 7 *bis.*
Page 99, ligne 10, en descendant, A. Menez, *lisez :* A *menez.*
Page 110, ligne 13, en descendant, $\frac{41}{19}$, *lisez :* $\frac{19}{41}$.
Page 110, ligne 13, en remontant, le dénominateur, *lisez :* les dénominateurs.
Page 110, ligne 4, en descendant, limites, *lisez :* limite.
Page 110, ligne 7, en remontant, rationnelle, *lisez :* irrationnelle.
Page 130, ligne 9, en descendant, $a—a_n$, *lisez :* $a_2—a_n$.
Page 168, ligne 12, en remontant, les courbes, *lisez :* la courbe.
Page 189, ligne 8, en remontant, démontre, *lisez :* démontré.
Page 211, ligne 4, en remontant, $(A+C)$, *lisez :* $(A+C—B\cos\gamma)$.
Page 211, ligne 4, en remontant, t. I, *lisez :* t. II.
Page 211, ligne 5, en remontant, ${}^2C$, *lisez :* C^2.
Page 211, ligne 5, en remontant, K'^2lR^2, *lisez :* $K'^2l'R^2$.
Page 212, ligne 11, en descendant, $\sqrt{(A+C)^2+m\sin^2\gamma}$, *lisez :* $\sqrt{(A+C—B\cos\gamma)^2+m\sin^2\gamma}$.
Page 235, équation (3), x^4, *lisez :* x^2.
Page 238, équation (8), x^2+y^2, *lisez :* $(x^2+y^2)^2$.
Page 265, ligne 15, en descendant, fig. (47), *effacez.*
Page 266, ligne 13, en descendant, fig. (48), *lisez :* fig. (47).
Page 268, ligne 7, en descendant, $x^3=2l^2$, *lisez :* $x^2—2l^2$.
Page 272, ligne 13, en descendant, S, *lisez :* S^2.
Page 273, ligne 9, en descendant, analytique, *lisez :* elliptique.
Page 343, ligne 14, en descendant, $1,2_1$, *lisez :* $1, 2_1$.
Page 352, ligne 13, en descendant, $\frac{C}{x}$, *lisez :* $\frac{c}{x}$.
Page 374, ligne 14, en descendant, assujettie, *lisez :* assujetties.
Page 375, ligne 6, en remontant, y^2dx+, *lisez :* $y^2dx\pm$.
Page 375, ligne 6, en remontant, $x^2dy\pm$, *lisez :* x^2dy+.
Page 394, ligne 7, en descendant, l'enveloppe, *lisez :* la développée.
Page 374, ligne 14, en descendant, assujettie, *lisez :* assujetties.
Page 440 ligne 3, e n remontant, 1683, *lisez :* 1713.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

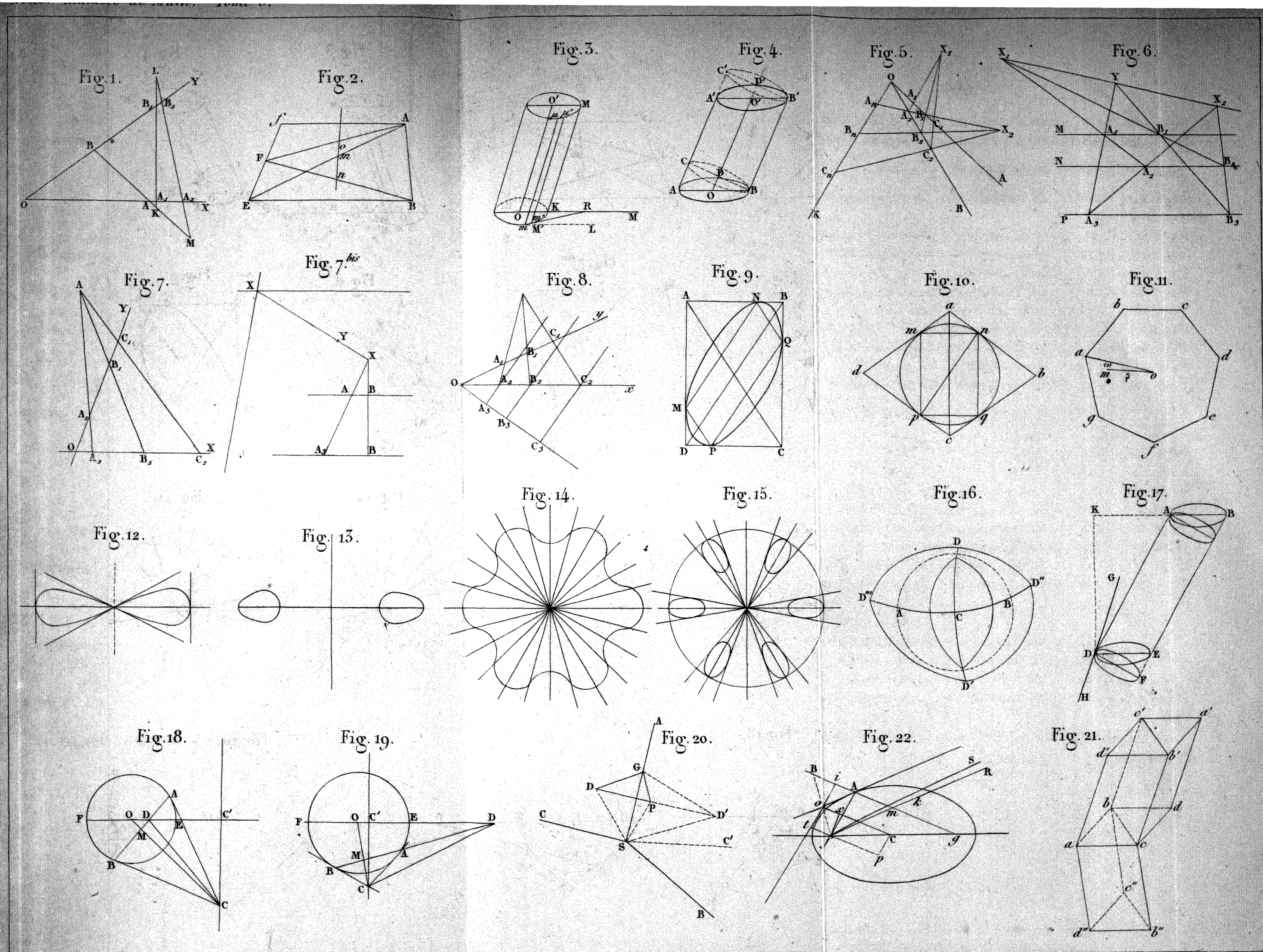


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 7.bis
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 22.
Fig. 21.

Lemaitre sc.

Fig. 23.

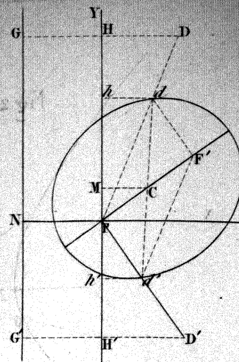


Fig. 24.

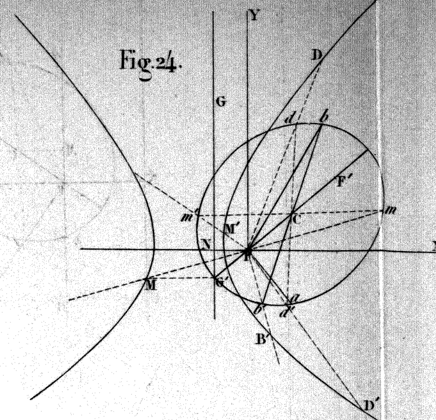


Fig. 25.

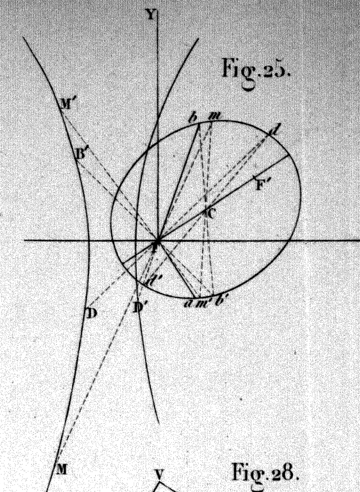


Fig. 26.

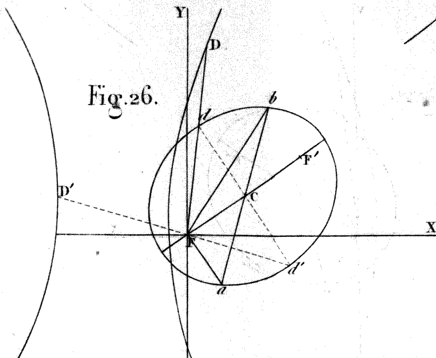


Fig. 27.

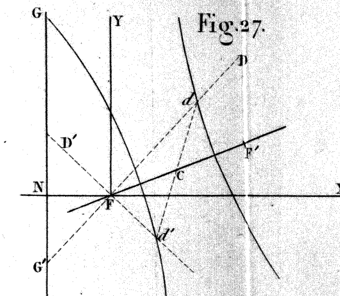


Fig. 28.

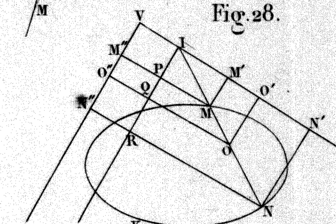


Fig. 29.

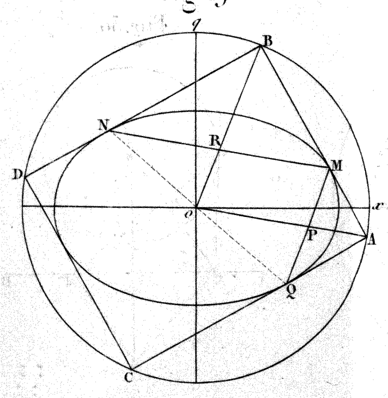


Fig. 30.

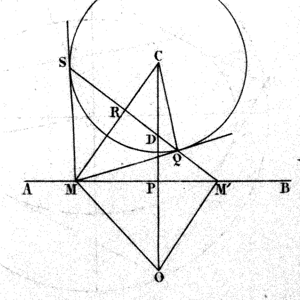


Fig. 31.

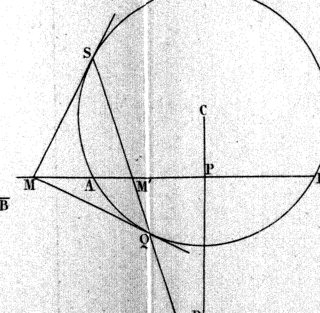


Fig. 32.

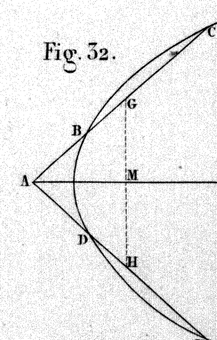
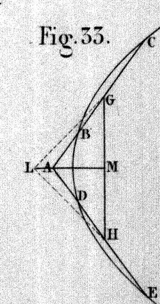


Fig. 33.



Lemaitre sc.

Fig. 34.

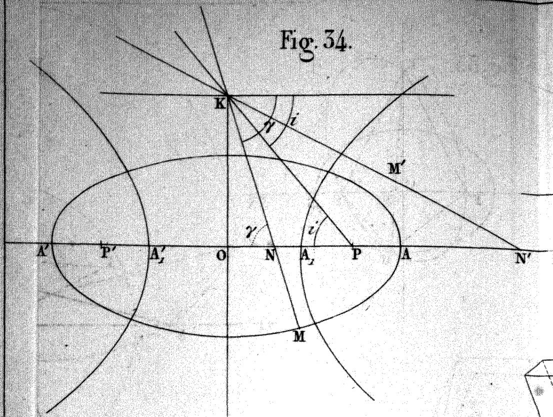


Fig. 35.

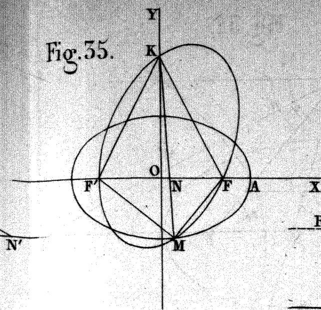


Fig. 36.

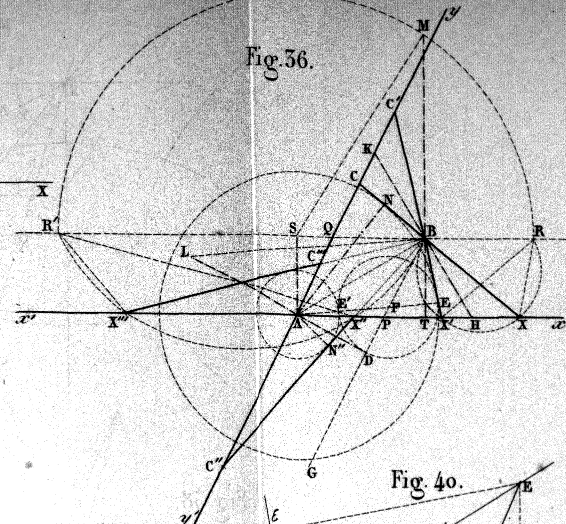


Fig. 37.

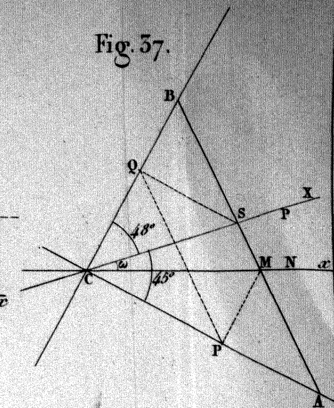


Fig. 38.

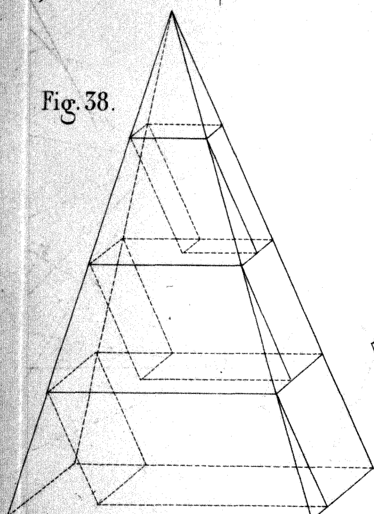


Fig. 39.

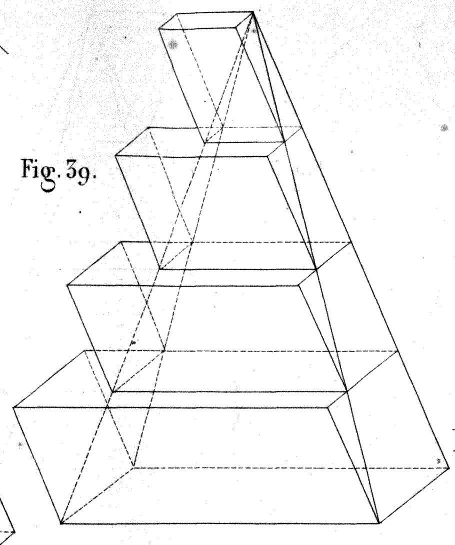


Fig. 40.

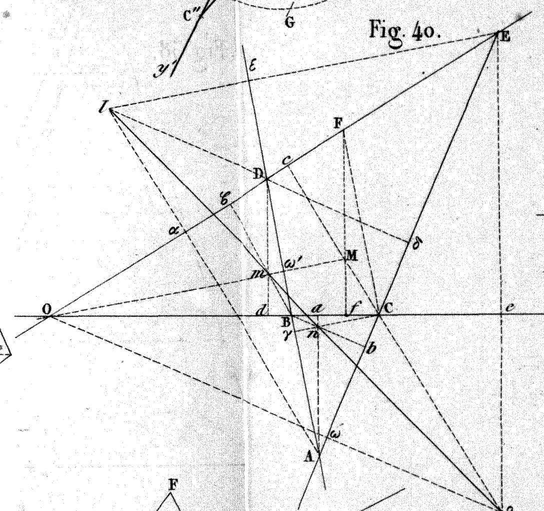


Fig. 41.

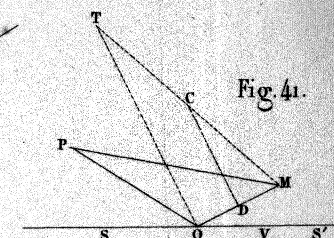


Fig. 42.

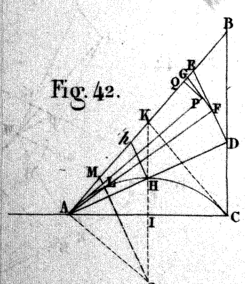


Fig. 43.

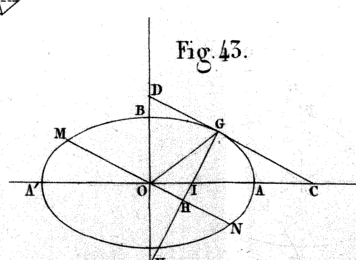


Fig. 44.

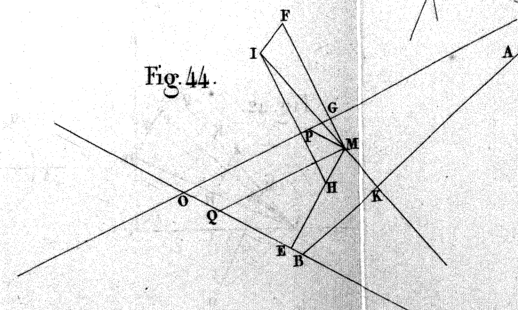
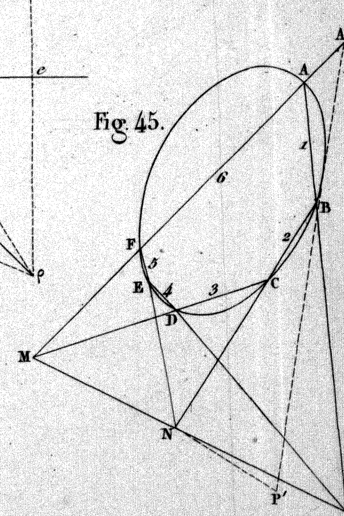


Fig. 45.



Lemaitre sc.

Fig. 46.

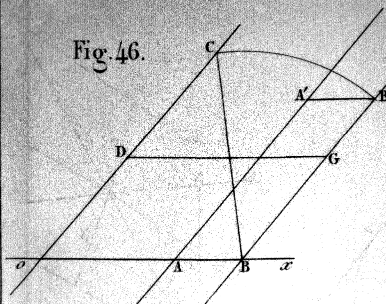


Fig. 47.

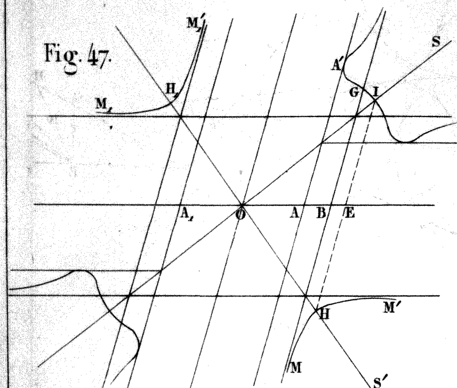


Fig. 48.

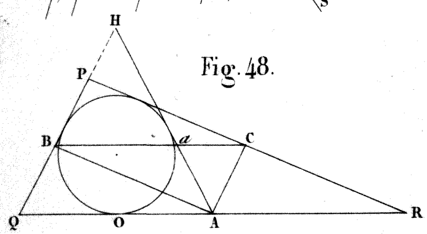


Fig. 49.

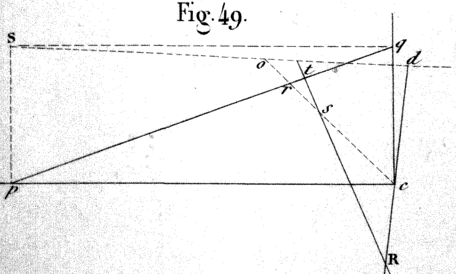


Fig. 50.

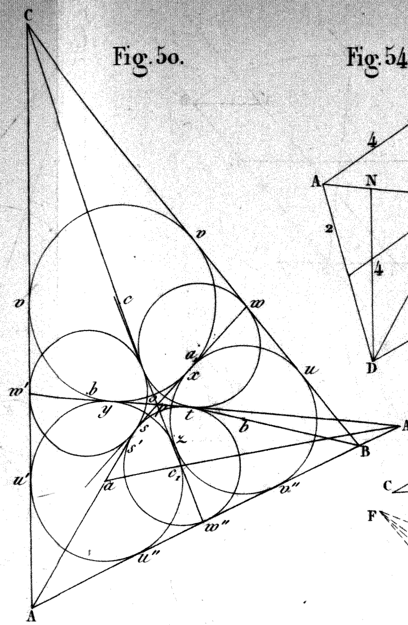


Fig. 51.

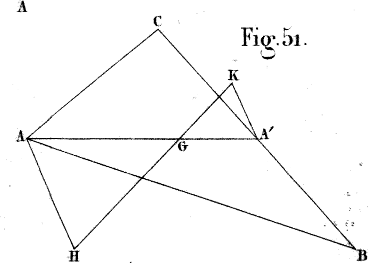


Fig. 52.

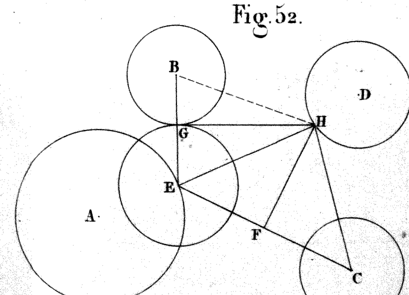


Fig. 54.

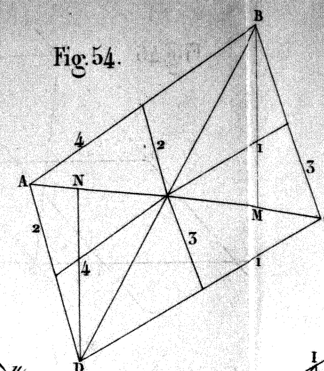


Fig. 53.

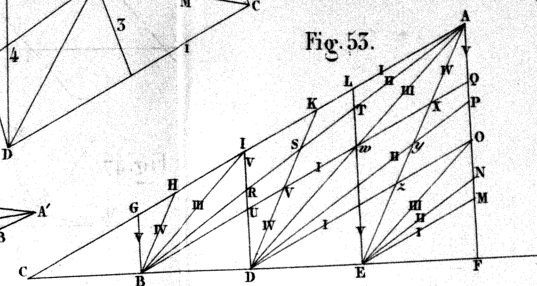


Fig. 55.

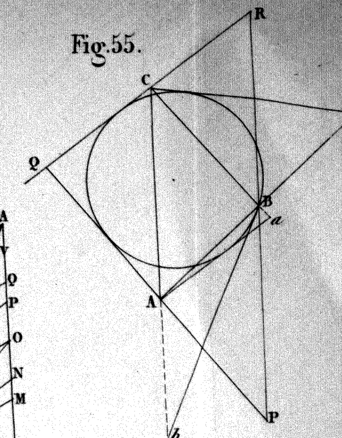


Fig. 56.