

GÉRONO

**Seconde note sur cette question : trouver
les conditions nécessaires et suffisantes
pour qu'une équation admette un nombre
donné de racines égales entre elles**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 113-119

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__113_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE NOTE SUR CETTE QUESTION :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation admette un nombre donné de racines égales entre elles.

(Fin , v. p. 75.)

3. Je terminerai ce second article par une analyse de ma première note (tome I, page 92) sur le même sujet.

Dans cette note, j'ai d'abord examiné la question suivante :

Les $(n-2)$ conditions nécessaires pour que le polynôme d du degré $(n-1)$ devienne une puissance exacte de ce degré, sont-elles, toutes, différentes des $(n-1)$ conditions qui doivent être remplies pour que ce polynôme soit le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de sa dérivée ?

Quand le nombre n est précisément égal au degré m de l'équation proposée $f(x)=0$, les $(n-2)$ relations qui donnent au diviseur commun la forme $(x-\alpha)^{n-1}$ rentrent, toutes, dans celles qu'on obtient en égalant à zéro le reste du degré $(n-2)$. C'est ce que l'on démontre dans tous les éléments d'algèbre.

Et cela ne conduit pas à conclure, sans examen, que si n devenant inférieur au degré de l'équation proposée, est, par exemple, égal à $m-1$, alors on trouvera $(n-2)$ équations de conditions nouvelles, pour exprimer que le diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ est une puissance exacte du degré $(n-1)$.

Il résulte de la démonstration donnée (tome I, page 93) que dans le cas particulier où $n=m-1$, les $(n-2)$ équations dont il s'agit peuvent être remplacées par une seule équation (*); que si $n=m-2$, on trouve au plus deux conditions nouvelles, et ainsi de suite.

Il sera utile de rappeler ici cette démonstration.

Nommons p et q les quotients qu'on obtient en divisant $f'(x)$ et $f(x)$ par d ; les restes de ces deux divisions doivent être considérés comme étant identiquement nuls, d'après les $(n-1)$ relations qui donnent $r=0$. Donc, en n'admettant pour les coefficients A, B, C, etc., des termes de $f(x)$, que des valeurs satisfaisant aux conditions ($r=0$), on peut écrire les égalités $f(x)=dq, f'(x)=dp$.

Soient d', q' les dérivées de d et q : la dérivée du produit dq sera $(dq'+qd')$, et par conséquent l'égalité $f(x)=dq$, donne $f'(x)=dq'+qd'$.

Remplaçant $f'(x)$ par sa valeur dp , il vient :

$$dp=dq'+qd', \text{ ou } d(p-q')=qd'.$$

(*) Le principal objet de la démonstration donnée (tome I, page 93) est d'indiquer par quel calcul on parvient à des équations dont le nombre peut être inférieur à $(n-2)$, et qui, cependant, expriment que le diviseur d est une puissance exacte du degré $(n-1)$. Il n'est besoin d'aucune démonstration particulière pour établir que le nombre total des conditions différentes ne surpasse jamais $(m-1)$; si ce nombre était seulement égal à m , les conditions trouvées suffiraient pour déterminer les m coefficients de l'équation proposée : ce qui est impossible puisque la valeur des racines égales n'est pas donnée.

D'ailleurs, dans le cas particulier où $n=m-1$, l'équation $d=0$, obtenue en égalant à zéro le commun diviseur du degré $m-2$, ayant au plus deux racines de valeurs différentes, on ne voit guère pourquoi il faudrait plus d'une condition nouvelle pour exprimer que ces deux racines deviennent égales entre elles.

Cette dernière égalité montre que d est divisible par d' , lorsque le polynôme q est lui-même divisible par $(p-q')$, et réciproquement. Ainsi, on exprimera que d devient une puissance exacte du degré $(n-1)$, en égalant à zéro les coefficients des différents termes du reste obtenu en divisant le polynôme q par $(p-q')$. Le nombre des termes de ce reste est, au plus, $(m-n)$, puisque $(m-n)$ est le degré du diviseur $(p-q')$. D'ailleurs $(m-n)$ est moindre que $(n-2)$ quand $m < 2n-2$; donc on ne trouve pas $(n-2)$ conditions nouvelles en exprimant que d est une puissance exacte du degré $(n-1)$, lorsque le nombre $(2n-2)$ surpasse le degré de l'équation proposée, comme il était facile de le prévoir.

Mais, dans l'hypothèse même où le nombre $(2n-2)$ n'ex-cède pas le degré de l'équation proposée $f(x)=0$, il faut encore, pour trouver $(n-2)$ conditions nouvelles, en exprimant que d devient exactement divisible par d' , que d et d' n'aient primitivement aucun facteur commun (*). Or, les valeurs des coefficients de ces deux polynômes d et d' ne sont pas entièrement arbitraires, puisqu'elles doivent satisfaire aux $(n-1)$ équations de conditions obtenues en égalant à zéro le reste r du degré $(n-2)$. Et, comme il y a différentes manières de remplir ces conditions, le diviseur commun, d , prend plusieurs formes essentiellement différentes les unes des autres. Admettre que d et d' n'ont aucun facteur commun, c'est considérer seulement une des formes que le diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$, peut prendre, en vertu des $(n-1)$ relations qui donnent $r=0$. Afin d'indiquer plus nettement la restriction dont nous voulons parler ici, reprenons l'exemple déjà considéré (page 80).

Le premier reste obtenu est px^2+qx+r .

(*) C'est ce que j'ai, plusieurs fois, fait observer dans ma première note voir tome 1, page 94).

En égalant à zéro les deux coefficients du reste suivant, on a les deux relations :

$$(1)..... p^3 + 3A^2p^2 - 16pr - 12Apq + 16q^2 = 0,$$

$$(2)..... Ap^3 + 3A^2p^2 + 4qp^2 - 144.Apr + 192.qr = 0$$

Pour que le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ soit le polynôme du second degré $px^2 + qx + r$, il faut satisfaire aux équations (1) et (2), sans annuler le coefficient p de la plus haute puissance de x dans le polynôme $px^2 + qx + r$.

Cela posé, représentons les équations (1) et (2) par $M=0$, $N=0$; on pourra les remplacer par les deux suivantes :

$$M=0, \quad M(Ap+4q) - Np=0.$$

Car, toute solution de ces deux dernières qui n'annule pas le coefficient p , convient aux équations $M=0$, $N=0$, et réciproquement. Or, l'équation $M(Ap+4q) - Np=0$ revient à celle-ci .

$$(q' - 4pr) (2q - Ap) = 0.$$

On en déduit .

$$q = \pm 2 \sqrt{pr}, \text{ ou } q = \frac{Ap}{2}.$$

Le diviseur du second degré a donc l'une ou l'autre de ces deux formes

$$px^2 \pm 2x \sqrt{pr} + r, \quad px^2 + \frac{Ap}{2} x + r:$$

et les coefficients p, r , doivent encore satisfaire à la condition $M=0$.

Le trinôme $px^2 \pm 2x \sqrt{pr} + r$ est évidemment un carré ; par conséquent, si l'on trouve une condition nouvelle pour que le diviseur commun devienne une puissance exacte du second degré, c'est parce que l'on prend pour diviseur $px^2 + \frac{Ap}{2} x + r$.

En exprimant que $px^2 + \frac{Ap}{2}x + r$ est exactement divisible par sa dérivée $2px + \frac{Ap}{2}$, on obtient la condition : $A^2p - 16r = 0$.

Les $(2n - 3)$ équations trouvées de cette manière sont donc :

$$(1) \dots p^3 + 3A^2p^2 - 16pr - 12Apq + 16q^2 = 0,$$

$$2q - Ap = 0,$$

$$A^2p - 16r = 0.$$

Elles expriment que la proposée a $(2n - 2)$ racines égales ; car elles reviennent à $p = 0, q = 0, r = 0$ (*).

Le polynôme d ou $px^2 + qx + r$ se réduit alors à zéro, et le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ est d'un degré supérieur à $(n - 1)$ ou 2. Il est facile d'expliquer pourquoi on a trouvé $p = 0, q = 0, r = 0$.

En effet, remarquons d'abord que si l'on remplace dans l'équation (1) Ap par $2q$, cette équation devient

$$p^3 + 12q^2 - 16pr - 24q^2 + 16q^2 = 0,$$

d'où
$$p^3 + 4(q^2 - 4pr) = 0.$$

Si l'on veut que le plus grand commun diviseur $px^2 + qx + r$ de $f(x)$ et $f'(x)$ soit du second degré, il faut donner au coefficient p une valeur différente de zéro ; par conséquent, $q^2 - 4pr$ ne doit pas être nul. Ainsi, les relations

$$p^3 + 3A^2p^2 - 16pr - 12Apq + 16q^2 = 0, \quad 2q - Ap = 0$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x)$ et $f'(x)$ aient un plus grand commun diviseur du second de-

*) En remplaçant q et r par les valeurs $\frac{Ap}{2}, \frac{A^2p}{16}$, que donnent les relations $2q - Ap = 0, A^2p - 16r = 0$, l'équation (1) se réduit immédiatement à $p^3 = 0$; il en résulte $p = 0$, et par suite $q = 0, r = 0$.

gré, qui soit premier avec sa dérivée; en admettant toujours que l'on satisfasse aux deux équations par des valeurs qui n'annulent pas le coefficient p . Si à ces deux relations on joint une nouvelle équation $A^3p-16r=0$, indiquant que le diviseur commun du second degré est une puissance exacte, il en résulte une contradiction qui ne peut disparaître qu'en supposant $p=0$, $q=0$, $r=0$.

En général, si parmi les différentes manières de satisfaire aux $(n-1)$ équations de conditions, obtenues en égalant à zéro le reste r du degré $(n-2)$, on choisit celle qui ne donne aucun facteur commun au diviseur d et à sa dérivée d' , il est évident que les $(n-2)$ conditions nécessaires pour que d soit une puissance exacte du degré $(n-1)$ seront des conditions nouvelles; on obtiendra ainsi $(2n-3)$ relations, différentes assurément. Il n'est pas moins évident qu'on ne pourra, sans annuler tous les coefficients du polynôme d , satisfaire à ces $(2n-3)$ équations exprimant, d'une part, que d et d' n'ont aucun facteur commun; et d'autre part, que d est exactement divisible par d' . Les $(2n-3)$ relations ainsi obtenues sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée admette $(2n-2)$ racines égales entre elles, on le démontre facilement.

Mais il s'agit seulement ici d'une solution particulière des $(2n-3)$ équations trouvées en posant $r=0$, et $d=(x-a)^{n-1}$. Considérées d'une manière générale, ces équations de conditions répondent à plusieurs questions différentes; leurs solutions donnent à l'équation proposée $f(x)=0$ des racines égales dont le nombre aura une des valeurs suivantes :

$$n, (n+1), (n+2) \dots (2n-3), (2n-2);$$

le nombre de ces racines égales sera précisément n , si la solution adoptée ne réduit pas à zéro le coefficient de la plus haute puissance de x dans le polynôme d ; car, dans ce cas

particulier, $f(x)$ et $f'(x)$ auront un commun diviseur d du degré $(n-1)$, qui sera : 1° leur plus grand commun diviseur ; 2° une puissance exacte du degré $(n-1)$. Donc, si l'on ajoute aux $(2n-3)$ relations générales [$r=0$, $d=(x-\alpha)^{n-1}$] une inégalité exprimant que le coefficient du premier terme de d doit être différent de zéro, on aura les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que l'équation $f(x)=0$ ait n racines égales entre elles.

On sait qu'au moyen d'autres méthodes les mêmes conditions s'expriment par $(n-1)$ équations seulement ; par conséquent, il est possible de réduire à $(n-1)$ les $(2n-3)$ équations [$r=0$, $d=(x-\alpha)^{n-1}$], en ayant toutefois égard à ce que le coefficient du premier terme du polynôme d ne doit pas être annulé. D'ailleurs, toutes les solutions des $(n-1)$ équations données par ces autres méthodes conviennent aux équations ($r=0$) ; mais ces dernières contiennent, de plus, des solutions étrangères et correspondantes aux différents cas particuliers où le diviseur d n'est pas une puissance exacte du degré $(n-1)$. On est donc conduit à conclure que

Les équations de conditions, obtenues en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$ se partagent en plusieurs systèmes correspondants aux différentes formes que le diviseur commun du degré $(n-1)$ peut avoir. Les $(n-1)$ équations de l'un de ces systèmes expriment les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que l'équation proposée ait précisément n racines égales entre elles.

Cette conclusion a été confirmée par un exemple (p. 82) ; elle est amenée par un raisonnement facile à suivre. Si l'on ne peut lui opposer que l'explication dont il s'est agi dans la première partie de ce second article, il n'existe contre elle aucune objection sérieuse.

G.