

VANNSON FOURNIER

Question 138

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 122-123

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__122_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION 138 (Voir t. V, p. 672).

Une parabole ayant un foyer fixe touche constamment une conique de même foyer; si on mène par ce foyer une ligne qui fasse un angle constant avec l'axe de la parabole, le lieu du point d'intersection de cette ligne avec la parabole variable est une conchoïde du cercle (limaçon de Pascal).

PAR M VANNSON (FOURNIER),

Professeur.

Supposons, pour fixer les idées, que la courbe donnée soit une ellipse. Soit f le foyer commun à cette ellipse et à la parabole (*fig. 22*) variable; g le deuxième foyer. Soit A le point de contact de la parabole et de l'ellipse dans une position particulière de la parabole mobile. Si nous joignons gA , cette droite sera parallèle à l'axe de la parabole; abaissons fo perpendiculaire sur la tangente Ao , et oi perpendiculaire sur Ag ; cette ligne oi sera la tangente au sommet de parabole que l'on considère. Donc, la distance ft du foyer f à cette droite sera le $\frac{1}{4}$ du paramètre de la parabole. Pour calculer ft , je joins oC par une ligne qui est parallèle à l'axe ft de

la parabole. Si donc j'abaisse $f\dot{x}$ perpendiculaire sur Co , j'aurai $ft = Cx = Co - xC = a - c \cos AgC$. Ainsi le $\frac{1}{2}$ paramètre de notre parabole $= 2(a - c \cos AgC)$. Soit maintenant $Sfg = \alpha$ à l'angle constant que doit faire la sécante avec l'axe variable de la parabole; appelons cet angle α ; prenons fS pour axe polaire, et soit fR la position particulière de la sécante, l'angle Rmg sera égal à α ; et l'angle Agc sera égal à $\alpha - g f R = \omega$. Ainsi le paramètre de notre parabole sera représenté par $2(a - c \cos \omega)$. Si donc on appelle ρ la distance du point f au point où la sécante fR rencontre la parabole, on aura, d'après l'équation de la parabole en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{2(a - c \cos \omega)}{1 - \cos \alpha} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{c \cos \omega}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Il est facile de reconnaître dans cette équation la courbe indiquée par l'énoncé.

Si on considère le cas particulier où $\alpha = \pi$, on trouvera :

$$\rho = a - c \cos \omega.$$

équation qui donne le lieu des sommets des paraboles tangentes à une ellipse de même foyer. On peut, pour cette dernière question, démontrer sans aucun calcul que la courbe demandée est une conchoïde du cercle. En effet, le point t (*fig. 22*) est un point du lieu. Si nous prolongeons t' jusqu'à ce qu'on ait $tp = Co = a$; puis que nous joignons Cp , l'angle p sera droit, et le lieu du point p sera un cercle décrit sur fC comme diamètre. Or, $tp = a$; on voit donc que, pour construire la courbe demandée, il suffit de mener du point f des droites aux divers points du cercle ayant Cf pour diamètre, et de prolonger chacune de ces droites jusqu'à ce que la distance tp soit égale à a , construction qui donne bien la conchoïde du cercle.

Note. Le même problème a été résolu par M. Rispal.