

JULES VIEILLE

**Note sur un point de la théorie générale
des équations**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 174-176

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__174_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur un point de la théorie générale des équations.

PAR M. VIEILLE (JULES),
Professeur.

Ayant eu récemment l'occasion de traiter dans mon cours les questions relatives à l'abaissement des équations, j'ai remarqué dans plusieurs traités fort estimables d'algèbre, une erreur qu'il est bon de rectifier dans l'intérêt des élèves.

Il s'agit de cette question : *Étant donnée une équation*

$f(x)=0$ dans laquelle il y a deux racines dont la somme est égale à une quantité donnée s , déterminer ces racines.

La méthode générale, qui consiste à égaler à zéro le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f(s-x)$, est en défaut lorsque toutes les racines de l'équation $f(x)=0$ se distribuent par couples (a, b) , (c, d) ... tels que $a+b=s$, $c+d=s$; mais, dans ce cas, on remarque que si l'on prend pour inconnue auxiliaire le produit z de deux racines d'un même couple, le trinôme x^2-sx+z devra, pour les valeurs convenables de z , diviser $f(x)$. On effectue donc cette division, et le reste qui suit celui du deuxième degré en x est égalé à zéro. Jusqu'ici rien que de parfaitement exact; mais on ajoute que ce reste sera du premier degré en x , de la forme $Px+Q$, P et Q étant des fonctions de z , et qu'en conséquence on devra poser $P=0$; $Q=0$, puis chercher le plus grand commun diviseur entre P et Q . Ceci n'est pas exact. Le reste de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z ne saurait être du premier degré en x , mais il sera toujours indépendant de x .

En effet soit

$$(1) \quad f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\dots$$

l'équation $f(x)=0$ a par hypothèse n couples de racines (a, b) , (c, d) ... telles que $a+b=s$, $c+d=s$, et par suite z a n valeurs qui sont les produits ab , cd ... Supposons pour un instant que le reste de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z soit du premier degré en x , $Px+Q$, et soit k le quotient, on aurait

$$f(x)=(x^2-sx+z)k+Px+Q.$$

Si dans cette égalité on fait $z=ab$ et qu'on y mette successivement pour x les valeurs a , b , on aura

$$Pa+Q=0$$

$$Pb+Q=0$$

d'où il suit que les fonctions P et Q s'annuleront à la fois pour $z=ab$. Elles s'annuleront de même pour $z=cd$, etc. L'équation $P=0$ admettra donc n racines. Or, cela est impossible, à moins que P ne soit identiquement nul ; car il est aisé de voir que P sera d'un degré en z au plus égal à $n-1$.

En effet, en procédant à la division des polynômes (1) par x^2+sx+z , on voit sans peine que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel, de degré impair $2n-1-2p$, contient z à la puissance p . Si donc on pouvait parvenir à un reste du premier degré en x , c'est-à-dire du degré $2n-1-2(n-1)$, le coefficient P de x dans ce reste serait du degré $n-1$ en z . Ainsi, le reste de la division de $f(x)$ par x^2-sx+z sera indépendant de x , et en l'égalant à zéro, on aura immédiatement les valeurs cherchées de z .

Au fond, la recherche de l'équation en z revient à l'élimination de x entre les deux équations $f(x)=0$, $x^2-sx+z=0$. *A chaque valeur de z tirée de l'équation finale en z , doivent correspondre les deux valeurs de x dont cette valeur de z est le produit, par conséquent le diviseur qui précède l'équation finale doit être du deuxième degré et n'est pas autre chose que x^2-sx+z . Ce second point de vue vient encore à l'appui de ce qui précède, et explique pourquoi on ne peut rencontrer un reste du premier degré en x .*
