

JOHN

## Solution de la question 143

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 195-196

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__195_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 143 (p. 134).

PAR M. JOHN (de Marseille).

Connaissant le centre et un point d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers (Serret).

*Lieu des sommets.* Prenons pour axe des  $x$  la droite passant par le centre et le point donné, et pour axe des  $y$  une perpendiculaire à cette droite élevée par le centre.

L'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Ca^2 + F = 0;$$

puisqu'elle est équilatère,  $C = -A$ . D'ailleurs  $A$  peut être supposé égal à 1. L'équation de l'hyperbole équilatère sera donc  $y^2 + Bxy - x^2 + F = 0$ ; soit  $m$  le coefficient angulaire de l'axe de la courbe; ce coefficient angulaire sera donné par l'équation  $Bm^2 - 4m - B = 0$ ;  $x', y'$  désignant les coordonnées de l'un des sommets  $y' = mx'$ ;  $y'^2 + Bx'y' - x'^2 + a^2 = 0$ ;  $a$  désignant l'abscisse du point commun à toutes les hyperboles; il faudra donc éliminer  $m$ ,  $B$  et  $F$ . Entre les trois équations :

$$(1) y' = mx', (2) Bm^2 - 4m - B = 0, (3) y'^2 + Bx'y' - x'^2 + F = 0,$$

il vient :

$$y'^4 - x'^2 y'^2 + 4x'^2 y'^2 - x'^2 y'^2 + x'^4 + a^2 (y'^2 - x'^2) = 0;$$

l'équation du lieu est donc  $(y^2 + x^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ . C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère dont l'axe serait  $a$ , sur ses tangentes (Voir Charpentier, *Annales*, t. IV, p. 142). C'est une lemniscate de Bernoulli; il est d'ailleurs évident que le lieu des

foyers est une courbe semblable à celle des sommets et semblablement placée.

*Note.* L'équation est  $y^2 + Bxy - x^2 + F = 0$ , ou  $F = a^2$ ;  $\alpha, \beta$  désignant les coordonnées des foyers, on connaît leurs valeurs (voir t. II, p. 430); il faut y faire  $\gamma = 90^\circ$ ;  $N = 0$ ;  $L = mF$ ;  $A = -C = 1$ ; éliminant  $m$  entre les deux équations, on obtient de suite  $(x^2 + \beta^2)^2 = 2F(x^2 - \beta^2)$ . **Tm.**