NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Solutions de quelques questions sur l'origine des coordonnées dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 211-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__211_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS

De quelques questions sur l'origine des coordonnées dans les coniques.

—

Remarque. Nous prenons l'équation hexanôme de la conique, et désignons par γ l'angle des axes; nous faisons usage de la fonction principale L et de ses six fonctions dérivées k, k', l, l', n, m. (*Voir* page 206.)

1. Quelles sont les équations de condition pour que l'origine soit : 1° sur la courbe ; 2° un sommet ; 3° le centre ; 4° un foyer ; 5° un centre de courbure ; 6° sur un axe principal ; 7° sur une directrice.

Solutions. 1° *Sur la courbe* : $F=0$, équation de condition ;

2° *Un sommet* $\left\{\begin{array}{l} L^2(2A\cos\gamma - B^2) = k^2 l R^2 \\ L^2(2C\cos\gamma - B^2) = k'^2 l R^2 \end{array}\right\}$ équations de condition où $R^2=(A+C)^2+m\sin^2\gamma$; (*voy.* t. I, p. 26, équation (9)) ;

3° *Le centre :* $k=0$; $k'=0$;

4° *Un foyer :* $l=l'$; $n=l\cos\gamma$ (*voy.* t. II, p. 427) ;

5° *Un centre de courbure :* les axes étant rectangulaires.

Ellipse et hyperbole $4[Ak^2 - Bkk' + Ck'^2 - 4LR^2m^2]^3 + 27m^7L$ $[B(k^2 - k'^2) + 2(A-C)kk']^2 = 0$; on parvient à ce résultat, en remplaçant dans l'équation (1) de la développée (*voy.* p. 209) x et y par $-\frac{k}{m}$ et $-\frac{k'}{m}$;

Parabole. $27\,kN^2[2A\beta + B\alpha]^2 = 2\,[4AN\alpha + 2BN\beta - k]^3$; $N = A + C$; α, β sont les coordonnées du sommet. *Voir* la développée de la parabole (p. 210).

Observation. Si les coordonnées sont obliques, il faut les rendre rectangulaires, comme il a été dit pages 210 et 211.

6° *Sur un axe principal.* $k'[2A\cos\gamma - B] = k[C - A \pm R]$, où $R = \sqrt{(A+C)^2 + m\sin^2\gamma}$; il faut que l'une ou l'autre de ces deux équations soit satisfaite; on parvient à ce résultat, en remplaçant dans l'équation aux axes principaux x et y par $-\frac{k}{m}$ et $-\frac{k'}{m}$ (*voir* t. I, p. 496).

Observation. Cette équation de condition équivaut à celle-ci:

$$k\,[2A\cos\gamma - B] = k'[A - C \pm R],$$

et cela en vertu de la relation d'identité

$$(A-C)^2 + [2A\cos\gamma - B]\,[2C\cos\gamma - B] = R^2 \text{ (voy. t. I, p. 490).}$$

7° *Sur une directrice.* La polaire de l'origine doit dans ce cas passer par un foyer.

Ellipse et hyperbole. L'équation de la polaire de l'origine est $Dy + Ex + 2F = 0$; $\alpha + \frac{k}{m}$, $\beta + \frac{k'}{m}$ sont les coordonnées du foyer; α et β étant les coordonnées du même point lorsque l'origine est au centre; substituant ces valeurs, il vient pour équation de condition, $m(D\beta + E\alpha] = 2L$; d'où

$$m^2\,[D^2\beta^2 + 2DE\alpha\beta + E^2\alpha^2] = 4L^2;$$

mais on connaît les valeurs de α^2, β^2, et $\alpha\beta$ en fonction des coefficients de l'équation (t. II, p. 430). Pour avoir $\alpha\beta$, il faut avoir recours à l'équation, aux axes principaux

$$2(A-C)\alpha\beta+a^2[B-2C\cos\gamma]+a'^2[2A\cos\gamma-B]=0\ ;$$

on en déduit :

$$\alpha\beta\sin^2\gamma=\frac{2L}{m^2}\left[\cos\gamma[N-R]-B\sin^2\gamma\right]$$

ou $\quad R^2=N^2+m\sin^2\gamma$ et $N=A+C-B\cos\gamma$;

faisant les substitutions, on a, toute réduction faite :

$$[N-R]\,[D^2+E^2-2DE\cos\gamma]+2mF\sin^2\gamma=0.$$

Parabole. On a $D\beta+E\alpha=-2F$; remplaçant β et α par leurs valeurs trouvées (t. II, p. 432), on obtient pour équation de condition : $\cos\gamma\,[Dkl'+Fk'l]=L(l-l')$].