NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BRASSINE

Sur quelques propriétés des polygones et des polyèdres inscriptibles. Expression du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. Rayons de courbure des courbes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 226-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__226_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

des Polygones et des Polyèdres inscriptibles. — Expression du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. — Rayons de courbure des courbes à double courbure.

PAR E. BRASSINE,
professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

—

1° Si a, b, c désignent les trois côtés d'un triangle dont s est l'aire et R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation très-connue : $R = \frac{a.b.c}{4s}$, d'où $4s = \frac{a.b.c}{R}$; cela posé, considérons un polygone inscriptible, que nous décomposerons en triangles par des diagonales partant d'un même sommet, la formule précédente appliquée à chacun des triangles prouve que quatre fois l'aire du polygone égale la somme des produits des trois côtés de chaque triangle, divisée par le rayon du cercle circonscrit, et comme le sommet d'où partent les diagonales qui divisent le polygone est quelconque, il résulte ce théorème général :

Si l'on décompose un polygone inscriptible en triangles par des diagonales partant d'un même sommet, la somme des produits formés, en multipliant entre eux les trois côtés de chacun des triangles, sera la même, quel que soit le sommet d'où partent les diagonales qui opèrent la division du polygone.

Ce théorème comprend comme cas particulier la proposition qui donne le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit en fonction des côtés.

2° On arriverait à une proposition moins simple pour le polyèdre inscriptible, mais son énoncé suppose l'expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre, en fonction des côtés de ce tétraèdre. Or, en employant les mêmes lettres avec ou sans accent pour désigner les côtés opposés du tétraèdre, nous représenterons dans notre formule ses six arêtes par a, a', b, b', c, c' (a, a' étant deux arêtes opposées, etc.). Si V est le volume de ce solide et R le rayon de la sphère circonscrite, nous écrirons, sans la démontrer, la relation :

$$R = \frac{1}{24.V}\sqrt{(aa'+bb'+cc')(aa'+bb'-cc')(aa'+cc'-bb')(cc'+bb'-aa')}.$$

Si l'on désigne par $2p$ la somme $aa'+bb'+cc'$, l'expression précédente s'écrira ainsi :

$$R = \frac{1}{6.V}\sqrt{p(p-aa')(p-bb')(p-cc')}.$$

3° Supposons que sur un plan trois points consécutifs d'une ligne courbe m, m', m'', aient pour coordonnées x, y, $x+dx$, $y+dy$, $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$. Si on prolonge mm' jusqu'à l'ordonnée du point m'' que nous supposerons coupée en k, il est visible que le triangle

$$mm'm'' = mm''k - m''m'k = \frac{1}{2}(dx.d^2y - dyd^2x);$$

en appelant ds le premier élément de la courbe, on aura, d'après la formule du § 1°, $R = \frac{abc}{4s}$, l'expression du rayon de courbure de la courbe

$$R = \frac{2ds^3}{4mm'm''} = \frac{ds^3}{(dxd^2y - dyd^2x)}.$$

Si M, M', M'' sont trois points consécutifs d'une courbe à double courbure, dont le premier élément mm' sera ds, le rayon de courbure de cette courbe au point M sera $R = \frac{ds^3}{2A}$, A étant l'aire du triangle MM'M''; mais les points M, M', M'' se projetant sur les plans des xy en m, m', m'', et en considérant successivement $mm'm''$ ou MMM'' comme les bases du tronc du prisme formé par les six points M, M', M'', m, m', m'', et mesurant de deux manières ce solide, on trouve que l'aire du triangle $mm'm''$, que nous désignerons par $A' = A\cos\alpha$, α étant l'angle du plan osculateur MM'M'' avec celui des x, y; en appelant de même A'', A''' les projections de A sur les plans des xz, yz, et remarquant que $A = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2}$, on a, pour le rayon de courbure, $R = \frac{ds^3}{2\sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2}}$; mais, d'après ce qui précède, $A' = \frac{1}{2}(dxd^2y - dyd^2x)$; A'', A''', se déduisant de A', en changeant les y ou les x en z.

On pourrait aussi exprimer R au moyen des rayons de courbure des trois projections de la courbe, et on parviendrait à une relation assez simple. Enfin il est évident que si on désigne par E, e', e'', e''' les angles de contingence de la courbe à double courbure et de ses projections, relatifs au point M et aux projections de ce point, on aura, en appelant R', R'', R''' les rayons de courbure des projections de la courbe :

$$2R^2\sin^2 E = R'^2\sin^2 e' + R''^2\sin^2 e'' + R'''^2\sin^2 e'''.$$

Le cosinus des angles que fait le plan osculateur MM'M'' avec les trois plans coordonnés étant $\frac{A'}{A}$, $\frac{A''}{A}$, $\frac{A'''}{A}$, on aura pour l'équation de ce plan :

$$A'''(x'-x) + A''(y'-y) + A'(z'-z)=0,$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point quelconque.

4° Considérons trois éléments consécutifs, MM', M'M'', M'', M''', de la courbe à double courbure, dont nous supposerons les équations connues. Dans le plan osculateur MM'M'' formé par les deux premiers éléments, et par les milieux de ces éléments, je mène deux droites, r, r', faisant avec ces éléments des angles égaux à φ; ces droites se couperont en un point I. Dans le plan osculateur suivant, je mène des droites r'', r''', faisant avec le second et le troisième élément des angles φ, et se coupant en un point I'; en continuant ainsi, je formerai une courbe II'I''..., dont on pourra aisément trouver les équations en combinant l'équation du plan osculateur avec celle des deux cônes consécutifs dont les axes seront MM', M'M'', et dont les génératrices feront avec ces axes des angles φ. Si nous représentons par ω l'angle de deux plans osculateurs consécutifs ou l'angle de torsion, on trouvera, géométriquement ou analytiquement, pour l'expression de l'arc infiniment petit II' de la courbe II'I''..., l'expression $ds^2=dr'^2+r'^2\omega^2\sin^2\varphi$; on pourrait trouver aussi l'équation de la surface gauche formée par la suite des perpendiculaires élevées aux points I, I', I''... sur les plans osculateurs consécutifs. Dans le cas où $\varphi = 90°$, la courbe II'I''... sera le lieu des centres de courbure sur les plans osculateurs; la surface gauche deviendra développable, et la relation précédente deviendra $ds^2=dr'^2+\omega^2r'^2$, qui a été déjà donnée par M. Molins, *Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 382

Note. M. Bérard a donné la relation suivante pour le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre :

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{144V^2}[A^2+B^2+C^2];\ A^2 = a^2\sin^2\alpha - 2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma);$$

γ, β, α sont les angles respectivement compris entre ab, ac, bc, on trouve B en changeant dans A : a en b, α en β, et vice-versâ ; de même C en changeant a et α en c et γ ; il faut en déduire la relation, d'une élégance si remarquable, de M. Brassine (*Annales de Gergonne*, t. VI, p. 228).

Tm.