NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BELLION

Théorèmes sur les normales dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 231-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__231_1>

THÉORÈMES

sur les Normales dans les coniques.

PAR M. BELLION,
élève du collége Sainte-Barbe.

—

On sait que la tangente est divisée, au point de contact G et par les axes, en deux segments DG, GC, dont le produit est égal au carré du demi-diamètre conjugué de oG, diamètre qui passe par son point de contact (*fig.* 43).

Théorème I. Il existe pour la normale un théorème analogue à celui de la tangente; et de même que $DG.GC=b'^2$, de même aussi $GI.GK=b'^2$. En effet, les deux triangles rectangles DKG et GIC étant semblables, on a :

$$DG:GI::GK:GC, \text{ d'où } GI.GK=DG.GC=b'^2.$$

Théorème II. Le produit des segments que forme la normale en un point avec chaque axe et le diamètre parallèle à la tangente qui passe par ce point est égal au carré de l'autre demi-axe.

En effet, on a, d'après le théorème précédent :

$$GI.GK=b'^2 \text{ et } \overline{HG}^2=\overline{Go}^2, \sin^2 GoH=a'^2\sin^2\gamma;$$

do c

$$GL.\ GK.\ HG.\ HG = a'^2 b'^2 \sin^2\gamma = a^2 b^2, \qquad (1)$$

parce que a' et b' sont des demi-diamètres conjugués ; d'un autre côté,

$$\overline{OH}^2 = KH.\ HI = (GK - GH)\ (GH - IG)\ ;$$

donc, en développant et en observant que

$$\overline{oH}^2 + \overline{HG}^2 = a'^2 \text{ et } GI.GK = b'^2,$$

il vient

$$IG.HG + GK.GH = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Or, les équations (1) et (2) montrent que le plus grand produit $GK.GH = a^2$, et le plus petit $IG.HG = b^2$, c. q. f. d.