

A. HAILLECOURT

Hexagramme de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 269-270

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__269_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HEXAGRAMME DE PASCAL,

PAR M. A. HAILLECOURT,

Ancien élève de l'École normale,
Professeur de mathématiques spéciales au collège royal de Tours.

Soit ABCDEF l'hexagone inscrit dans la conique donnée par l'équation $\varphi(x, y) = 0$. (Fig. 45.)

Designons par $F_1(x, y) = 0$ l'équation du troisième degré qui représente les droites d'ordre impair, 1, 3, 5; par $F_2(x, y) = 0$ celle qui représente les droites d'ordre pair; il s'agit de montrer que six des neuf points communs à ces deux lieux étant sur une conique, les trois autres sont en ligne droite.

Supposons la réciproque démontrée, savoir : si trois des neuf points communs à deux courbes du troisième degré sont en ligne droite, les six autres sont sur une conique. La proposition directe s'ensuit aisément ; car, supposons que P n'appartienne plus à MN, et soit P' le point où ED coupe MN, l'intersection de P'B avec MF devrait appartenir à une conique passant par FEDCB, ce qui n'est pas possible.

Il suffit donc de démontrer la réciproque.

Pour cela, prenons pour axe des x , la droite passant par les trois points communs à $F_1 = 0$, $F_2 = 0$; $F_1(x, 0) = 0$ et $F_2(x, 0) = 0$ ayant les mêmes racines, leurs premiers membres ne peuvent différer que par un facteur q , et par conséquent $F_1(x, 0) - qF_2(x, 0) = 0$; ce qui démontre que

$$F_1(x, y) - qF_2(x, y) = y\varphi(x, y).$$

Or, tout point commun aux deux lieux $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ est aussi sur le lieu de l'équation $y\varphi(x, y) = 0$, par suite sur l'axe des x donné par $y = 0$, ou sur la conique de l'équation $\varphi(x, y) = 0$. Donc ...

Remarque. Cette démonstration, de même que celle de M. Roguet (tome III, page 304), permet de supposer que les lieux représentés par les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, sont quelconques du troisième degré, au lieu d'être l'ensemble de trois droites chacune. La conclusion en est facile à tirer.

Note. Ce mode de démonstration, dû à Bobillier, a été appliqué à l'hexagramme de Pascal par M. Gergonne, et ensuite à d'autres polygones inscrits par divers géomètres, et particulièrement par M. Plücker. Tm.