

J.-G. DOSTOR

Rectification d'un arc de cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 287-293

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__287_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RECTIFICATION D'UN ARC DE CERCLE.

PAR M. J.-G. DOSTOR,

Docteur ès sciences mathématiques.

—

1. LEMME. Soit ABC un triangle rectangle en C, AD la bissectrice de l'angle BAC, DE une perpendiculaire à la bissectrice AC interceptée entre cette bissectrice et l'hypoténuse AB; faisons $AB=a$, $AC=b$, $AE=a_1$, $AD=b_1$, on a

$$a_1 = \frac{2ab}{a+b}; \quad b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{\frac{2ab^2}{a+b}}; \quad (a+b)(a_1^2 - b_1^2) = \\ = b_1^2(a-b); \quad a_1 - b_1 < \frac{1}{4}(a-b).$$

Limites de l'arc du cercle.

2. THÉORÈME (*). *Lorsqu'on mène aux extrémités d'un arc AC (fig. 42), moindre qu'une demi-circonférence, la tangente AB et la droite CB perpendiculaire à la corde, qu'on tire la bissectrice AD de l'angle BHC, et DE perpendiculaire sur AD, puis la bissectrice AF de l'angle BAD, et FG perpendiculaire sur AF, et ainsi de suite; la longueur de l'arc AC est comprise entre les longueurs des côtés issus du sommet A, dans chacun des triangles rectangles ABC, ADE, AEG...*

Par le milieu de la corde AC élevons la perpendiculaire IH; cette droite passe par le centre O et par les milieux de l'arc AHC et des lignes AD, AB; joignons KC.

On a $AK=KC$; par suite $BK=KC$; donc

$$\text{corde AC} < \text{arc AHC} < \text{tang AB.}$$

(*) Cet énoncé est extrait du *Traité de Géométrie* de Prosz, professeur à Stuttgart, page 167. Stuttgart, chez F.-H. Koehler. 1842. J. G. D.

Ensuite les angles CAD, DAB ont pour mesures respectives la moitié des arcs CH, AH; or ces angles sont égaux; donc la bissectrice AD passe par le milieu de l'arc AHC, et y est divisée en parties égales.

Cela étant, menons la droite Hh perpendiculaire sur AD; elle passe par le milieu de AD, et par suite par le milieu de AE. On prouve comme précédemment que

$$\text{corde AH} < \text{arc ALH} < \text{tang Ah.}$$

Multipliant par 2, il vient

$$2\text{AH} < 2\text{ALH} < 2\text{Ah},$$

ou

$$\text{bissect AD} < \text{arc AHC} < \text{segment AE,}$$

et ainsi de suite.

3. Évaluation approchée de l'arc de cercle.

3. THÉORÈME. *On peut assigner une ligne droite, dont la différence avec un arc quelconque AHC soit moindre que toute ligne donnée.*

En effet, la différence entre AE et AD est moindre que le quart de la différence entre AB et AC (1); de même la différence entre AG et AF est moindre que le quart de celle entre AE et AD, ou moindre que $\frac{1}{16}$ de la différence entre AB et AC, etc. Donc, si l'on continue les bisections des semi-divisions successives de l'angle BAC, on pourra trouver une bissectrice, dont la différence avec le segment de AB, dont elle est la projection, soit une fraction aussi petite qu'on voudra de la différence AB—AC, ou une fraction plus petite que la grandeur de toute ligne donnée. Donc cette bissectrice et le segment correspondant de AB, qui comprennent l'arc AHC, différeront chacun de l'arc AHC d'une quantité moindre que toute ligne donnée.

4. *Remarque I.* Si l'on veut avoir la longueur de l'arc AHC à moins de $\frac{1}{10^m}$ près, et que n représente l'ordre de la bissectrice à laquelle il faut s'arrêter, ou qui satisfait à cette condition, on déterminera cette limite n de la manière suivante.

On observera d'abord que (1)

$$a_1 - b_1 < \frac{1}{4} (a - b),$$

$$a_2 - b_2 < \frac{1}{4} (a_1 - b_1),$$

$$a_3 - b_3 < \frac{1}{4} (a_2 - b_2),$$

.....

$$a_{n-1} - b_{n-1} < \frac{1}{4} (a_{n-2} - b_{n-2}),$$

$$a_n - b_n < \frac{1}{4} (a_{n-1} - b_{n-1}).$$

Multipliant toutes ces inégalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'inégalité résultante, on trouve

$$a_n - b_n < \frac{1}{4^n} a - b.$$

Or l'arc AHC est compris entre a_n et b_n (3); donc sa différence avec chacune de ces deux lignes sera inférieure à $\frac{1}{10^m}$, si l'on a

$$a_n - b_n < \frac{1}{10^m},$$

ce qui aura lieu à *fortiori*, si

$$\frac{1}{4^n} (a - b) < \frac{1}{10^m}.$$

On en déduit, en prenant les logarithmes,

$$m + \log(a-b) \stackrel{=}{<} n \log 4;$$

par suite

$$n \stackrel{=}{>} \frac{m + \log(a-b)}{\log 4};$$

c'est la valeur de la limite cherchée (*).

5. *Remarque II.* Les valeurs de a , et b , a_2 et b_2 ,... se déterminent à l'aide des formules $a_2 = \frac{2ab}{a+b}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$. On peut simplifier le calcul en transformant ces formules en deux autres, dont l'emploi est plus facile. A cet effet, on posera

$$a = \frac{1}{c}, \quad b = \frac{1}{d}, \quad a_2 = \frac{1}{c_2}, \quad b_2 = \frac{1}{d_2}.$$

La substitution de ces valeurs inverses dans les relations du § 1^{er} les change dans les suivantes :

$$c_2 = \frac{1}{2}(c+d), \quad d_2 = \sqrt{c_1 d_1}. \quad (f)$$

A l'aide de ces formules on calcule les valeurs de c_2 et d_2 , puis celles de c_3 et d_3 ,... jusqu'à celles de c_n et d_n ; les inverses de c_n et d_n seront a_n et b_n .

L'inspection des formules fait voir que la valeur inverse de l'arc AHC a pour limite une suite de nombres, dont les deux premiers sont les inverses de AE et AD, et dont les suivants sont alternativement moyens différentiels et moyens proportionnels entre les deux qui les précèdent (**).

6. COROLLAIRE. La différence de $d_2 - c_2$ est aussi moindre que le quart de la différence $d - c$.

(*) Voir tome IV de ces Annales, page 159.

J.-G. D.

(**) C'est la méthode d'Archimède. Voir Nouvelles Annales, t. III, p. 588. Tm.

Car, puisque la moyenne différentielle $\frac{1}{2}(c_i+d_i) > \sqrt{c_i d_i} = d_i$,
on peut poser

$$d_i < \frac{1}{2} c_i + \frac{1}{2} d_i,$$

ou, en retranchant c_i de part et d'autre,

$$d_i - c_i < \frac{1}{2} d_i - \frac{1}{2} c_i;$$

mettant à la place de $\frac{1}{2} c_i$ sa valeur $\frac{1}{4}(c_i+d_i)$, il vient

$$d_i - c_i < \frac{1}{2} d_i - \frac{1}{4} c_i - \frac{1}{4} d_i, \text{ ou } d_i - c_i < \frac{1}{4}(d_i - c_i).$$

Rapport de la circonférence au diamètre.

7. THÉORÈME. Lorsque l'arc AHC (fig. 42) est une partie aliquote de la circonférence, les droites AC, AB sont les côtés de polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit; et les droites AD, AE sont le double des côtés des polygones semblables inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.

En effet, si l'arc AHC est la n° partie de la circonférence, l'arc AH en sera la $2n^\circ$ partie; les cordes AC, AH seront les côtés des polygones réguliers inscrits de n et $2n$ côtés; et les tangentes AK, AM seront les demi-côtés des polygones réguliers circonscrits de n et $2n$ côtés. On peut donc écrire, d'après une notation facile à saisir,

$$AB = c_n = \frac{1}{n} P_n, \quad AK = \frac{1}{2} C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} P_n,$$

$$AH = c_{2n} = \frac{1}{2n} P_{2n}, \quad AM = \frac{1}{2} C_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} P_{2n}.$$

Or $AK = KB, AH = HD, AM = Mh = Ah = hE$.

Donc

$$\left. \begin{aligned} b = AC = c_n &= \frac{1}{n} P_n, \\ a = AB = C_n &= \frac{1}{n} P_n, \\ b_i = AD = 2c_{2n} &= \frac{1}{n} P_{2n}, \\ a_i = AE = 2C_{2n} &= \frac{1}{n} P_{2n}. \end{aligned} \right\} \text{ [A]}$$

8. PROBLÈME I. *Exprimer les valeurs des périmètres des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit de 2n côtés en fonction des valeurs des périmètres des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit de n côtés.*

Si l'on substitue les valeurs [A] dans les formules (1), on trouvera les relations

$$P_{2n} = \frac{2P_n \cdot p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n} p_n}, \quad \text{[F]}$$

qui mèneront aux valeurs cherchées.

9. *Corollaire.* Les formules (F), ou la substitution des valeurs [A] dans l'inégalité $a_i - b_i < \frac{1}{4}(a - b)$, feront facilement trouver que la différence

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{4}(P_n - p_n).$$

10. *Remarque.* Si l'on substitue dans les relations (F), à la place de P_{2n}, p_{2n}, P_n, p_n , leurs valeurs inverses Q_{2n}, q_{2n}, Q_n, q_n , on trouvera les formules plus simples

$$Q_{2n} = \frac{1}{2}(Q_n + q_n), \quad q_{2n} = \sqrt{Q_{2n} q_n}, \quad \text{[F']}$$

qui conduiront plus facilement au même but.

Ces formules donneront, comme celles de n° 6,

$$q_{2n} - Q_{2n} < \frac{1}{4}(q_n - Q_n).$$

11. PROBLÈME II. *Calculer la valeur approchée de la circonférence au diamètre.*

Voir Géométrie de M. Cirotte, 2^me édit., p. 174.

Géométrie de M. Lionnet, 3^me édit., p. 162.

Géométrie de M. Finck, 3^me édit., p. 97 et suiv.

Géométrie de M. Catalan, p. 133 et 145.
