

**Sur l'élimination par les fonctions
symétriques, d'après M. Liouville**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 295-301

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__295_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLIMINATION

par les fonctions symétriques, d'après M. Liouville. (Journal de mathématiques, t. XII, p. 68, 1847.)

1. Euler, car on revient toujours à ce nom-là, a fondé l'élimination sur la *communauté* de racines entre deux équations; c'est ce qui a donné naissance au procédé du *plus grand commun diviseur*. Au moyen des équations qui précèdent l'équation finale, ce procédé fait connaître les groupes de valeurs qui satisfont aux équations données, ce qu'on ne pouvait obtenir jusqu'aujourd'hui par la méthode des fonctions symétriques. Toutefois cet avantage de la méthode des *divisions* est racheté par de graves inconvénients. D'abord la longueur de calculs pénibles à exécuter, et qu'il faut recommencer pour chaque exemple; on a ensuite l'embaras des solutions étrangères, que Bret, il est vrai, nous

a appris à écarter, mais qui donnent encore lieu à des discussions épineuses, comme nous le voyons dans un mémoire publié récemment sur cette discussion, et dont l'analyse, hérissée de formidables formules, ne semblerait pas proportionnée à l'importance de l'objet, si le savant auteur n'avait eu en vue d'autres conséquences. Par contre, l'équation finale s'obtient, dans la seconde méthode, sans calcul pour ainsi dire, par une simple *transcription*, puisque Waring a donné les formules pour écrire immédiatement toute fonction symétrique des racines en fonctions des coefficients. Bien plus, Vandermonde a calculé et réduit en tables toutes ces fonctions, depuis la puissance de 2 jusqu'à la puissance de 10, ce qui dépasse de beaucoup tous les besoins de la pratique. Nous nous proposons de reproduire dans notre recueil ces tables d'une extrême utilité dans l'analyse appliquée; elles permettent, sans avoir besoin d'effectuer l'élimination, de connaître le degré d'un lieu géométrique. Il était donc à désirer qu'on pût, au moyen de l'équation finale relative à une inconnue, calculer les valeurs correspondantes de la seconde inconnue. C'est ce nouveau service que M. Liouville vient de rendre à la science, en se servant d'un moyen ingénieux imaginé par Poisson.

2. Soient $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, (1) deux équations algébriques à deux inconnues. On suppose qu'il n'y a pas de solutions infinies, qu'on peut d'ailleurs trouver directement, Posons $x = t - \alpha y$, t et x étant deux nouvelles inconnues. Substituant cette valeur de x dans les équations (1), on a deux équations entre les trois inconnues y , t , α , et éliminant y , on obtient une équation entre t et α , que l'on peut concevoir ordonnée suivant les puissances de α ; de sorte qu'on aura $\psi(t, \alpha) = \psi_0 t + \alpha \psi_1 t + \alpha^2 \psi_2 t + \alpha^3 \psi_3 t + \dots = 0$; $\psi_1 t, \psi_2 t$ sont des fonctions connues de t . Prenant les dérivées par rapport à α , on a

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dx} = 0;$$

d'où

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{d\psi}{dx} : \frac{d\psi}{dt} = - \frac{\psi_1 t + 2 \gamma \psi_2 t + 3 x^2 \psi_3 t + \dots}{\psi_1' t + x \psi_1' t + 3 x^2 \psi_3' t - \dots}. \quad (2)$$

$\psi_1, \text{ etc.},$ indiquent les dérivées de $\psi, \psi_1,$ pris par rapport à t .

Faisant $\alpha = 0$, on a généralement parlant $t = x$; donc $\psi(x) = 0$ n'est autre chose que l'équation qu'on obtiendrait en éliminant y entre les équations (1). Soient x_1 une des racines de cette équation, et γ_1 la valeur correspondante de γ , on a donc $x_1 = t - \alpha \gamma_1$; et pour ces valeurs $\frac{dt}{dx} = \gamma_1$, quelle que soit la valeur de α . Faisant donc $\alpha = 0$, l'équation (2) donne:

$$\gamma_1 = - \frac{\psi_1(x_1)}{\psi_1'(x_1)};$$

or $\psi_1(x)$ et $\psi_1'(x)$ sont des fonctions connues; donc cette valeur de x fait connaître celle de γ , et ainsi des autres.

Observation. On voit donc que dans $\psi(t, \alpha)$ il n'est besoin de calculer que les deux premiers termes ψt et $x \psi_1 t$.

3. Si l'équation $\psi(x) = 0$ a deux racines égales à x , alors $\psi'(x_1) = 0$, et comme y n'est pas infini, il faut donc que l'on ait aussi $\psi_1(x_1) = 0$; pour avoir la valeur de γ , passons à la dérivée seconde de l'équation prise par rapport à α de $\psi(x, t) = 0$, on a:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2 d \psi}{dx dt} \frac{dt}{dx} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{dt^2}{dx^2} + \frac{d \psi}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2} = 0, \text{ faisant } \alpha = 0;$$

alors

$$\frac{dt}{dx} = \gamma_1; \quad \frac{d^2 t}{dx^2} = 0;$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = 2 \psi_2(x_1); \quad \frac{d^2 \psi}{dx dt} = \psi_1'(x_1); \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \psi''(x_1).$$

Donc $2\psi_2(x_i) + \psi_1'(x_i)y_i + \psi''(x_i)y_i^2 = 0$; x_i entre donc dans deux groupes avec deux valeurs généralement différentes de y . Si $\psi(x) = 0$ a trois racines égales à x , on a recours à la dérivée troisième, et ainsi de suite.

4. Soient maintenant trois équations à trois inconnues :

$$f(x, y, z) = 0, F(x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = 0; \text{ faisons } x = t - \alpha y - \beta z.$$

α , β et t étant trois quantités arbitraires, éliminant x, y, z entre les quatre équations, et ordonnant l'équation résultante par rapport à α et β , on a :

$$\psi(t, \alpha, \beta) = \psi t + \alpha \psi_1 t + \alpha^2 \psi_2 t + \beta \psi_3 t + \alpha \beta \psi_4 t + \beta^2 \psi_5 t;$$

de plus

$$\frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dz} = 0; \quad \frac{d\psi}{d\beta} + \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{d\beta} = 0; \quad \frac{dt}{dz} = y; \quad \frac{dt}{d\beta} = z;$$

et faisant $\alpha = \beta = 0$, $t = x$ et $\psi t = \psi(x)$; alors

$$\frac{d\psi}{dz} = \psi_1 x; \quad \frac{d\psi}{d\beta} = \psi_2(x);$$

donc

$$\psi_1(x) + \frac{d\psi}{dx} y = 0; \quad \psi_2(x) + \frac{d\psi}{dx} z = 0;$$

ainsi y et z sont connues dès qu'on connaît x .

Observation. Il suffit donc de calculer les trois premiers termes de $\psi(t, \alpha, \beta)$.

5. On pouvait aussi poser $x = t - \alpha y - \alpha^2 z$; éliminant x, y, z , on obtient une équation à deux inconnues t, α ; et raisonnant de la même manière, on voit qu'il faut aussi calculer les termes en α^2 .

6. Lorsque l'équation finale en x ayant des racines égales, il y correspond des valeurs égales de y , alors les deux courbes représentées par les équations données ont pour point d'in-

tersection un point de contact, d'un ordre indiqué par la multiplicité des racines; si les valeurs de y sont inégales, alors la parallèle à l'axe de x est au point d'intersection tangente à l'une de ces courbes seulement, et selon la multiplication des racines, ce point est aussi d'inflexion visible ou invisible.

7. La méthode des fonctions symétriques fournit l'équation finale, mais pas *immédiatement* ordonnée suivant les puissances de l'inconnue; tandis que la méthode d'Euler donne de prime abord l'équation ordonnée; avantage précieux dans les questions où il s'agit seulement de connaître certains coefficients de l'équation finale ordonnée. L'équation *somme* de Bezout jouit aussi de cet avantage, et encore d'un autre dont les deux précédentes méthodes sont complètement privées; elle s'applique à toute espèce de solutions infinies, et donne l'équation de condition qui entraîne un abaissement de degré dans l'équation finale, relative à une des inconnues, sans que cet abaissement ait lieu pour l'autre inconnue. Dans les procédés d'Euler et de Waring, le coefficient du terme le plus élevé est le même pour chacune des équations finales, soit en x , soit en y . Ce coefficient égalé à zéro est la condition pour que les deux équations s'abaissent *simultanément* d'une unité; mais si l'on veut que l'une s'abaisse sans l'autre, aucun des deux procédés n'en fournit le moyen, tandis que le procédé Bezout a un *facteur* spécial qui satisfait à cette condition. Voici comme s'exprime à ce sujet l'illustre analyste: « Si c'est donc une perfection dans une méthode d'élimination, de ne point donner de facteur qui accroisse le » degré général, il faut convenir que ce n'est pas la seule » qui soit à désirer pour les besoins, et même pour la certitude de l'analyse. Il ne faut pas toujours se proposer d'éviter les facteurs que l'analyse présente: quand l'analyse est appliquée comme il convient à une question, elle ne

» donne rien qui n'ait quelque rapport à la question. Si,
» outre l'objet qu'on a particulièrement en vue, elle donne
» certains facteurs que l'on ne prévoyait pas, ces facteurs
» énoncent quelque chose de relatif à la question. En les
» omettant, en les prévenant, on court le risque d'omettre
» des connaissances utiles à la question, et même d'admettre
» des conséquences qu'elle rejette. C'est ainsi que nous
» verrons que faute de connaître le facteur qui est le symp-
» tôme de la dépression de l'équation finale, on serait exposé
» à admettre des racines qui n'appartiennent nullement aux
» équations proposées.

» Ce n'est donc un vice dans une méthode d'élimination,
» de donner des facteurs à l'équation finale, que lorsque ces
» facteurs n'ont aucun rapport à la question. Mais c'en serait
» un dans l'analyse de ne pas faire connaître tout ce qui peut
» appartenir à la question. » (*Théorie générale des équations*,
p. 224).

Ces judicieuses réflexions auraient dû faire accorder la préférence à la méthode du célèbre examinateur (*), la plus *analytique* qu'on ait présentée; elle obtiendrait cette préférence, si l'on pouvait la délivrer des longueurs dont elle est embarrassée, et qui rendent si pénible la lecture de la *théorie générale*; ouvrage qui est encore resté aujourd'hui le plus complet, le plus satisfaisant sur la matière, et dont on ne saurait trop recommander l'étude aux jeunes professeurs qui cultivent la science pour elle-même.

Ceci nous rappelle le distique de Schiller, *Die Wissenschaft* :

Einem ist sie die hohe, himmlische Göttin, Dem Andern,
Eine tüchtige Küche, die ihn mit Butter versorgt.

(*) On voit son tombeau dans l'église du village d'Avon, qui est au bout du parc de Fontainebleau. Il repose à côté de Daubenton et de Monaldeschi.

Voici une première traduction que nous devons à M. le colonel d'artillerie de Bressolles :

Pour l'adepte qui la revere
La science est du ciel un lumineux reflet;
Quand pour le sectateur vulgaire
Elle n'est qu'une vache à lait.

Et une seconde , aussi en quatrain , du même :

Au seuil du temple auguste où trône la science
Deux flots de pèlerins se pressent tour à tour,
Ceux-ci pour s'impregner de sa divine essence,
Ceux là pour demander le pain de chaque jour.

Et enfin une troisième en distique , par M. le colonel d'artillerie Nancy.

La science :
Pour l'un c'est de Dieu même un sublime reflet,
C'est pour l'autre une vache à lait.

Nous citons ces traductions , pour montrer qu'on sait encore faire des vers français en France.
