

ABEL TRANSON

Diviseurs commensurables du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 305-311

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__305_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIVISEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ.

PAR M. ABEL TRANSON.

—

L'objet de cette note est de faciliter la pratique de la méthode exposée par feu M. Durville (*Nouv. Ann.*, t. IV, p. 329).

I. Soit $F(x) = 0$ l'équation proposée. Si on divise $F(x)$ par $x^2 + px - q$, on aura l'identité

$$F(x) = (x^2 + px - q)Q + Mx + N,$$

dans laquelle M et N sont des fonctions rationnelles et entières de p et q .

Pour que $x^2 + px - q$ soit diviseur de $F(x)$, on doit avoir $M = 0$, $N = 0$, équations en p et q dont les finales seront du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, si m est le degré de $F(x) = 0$. Mais, eu égard à la recherche des diviseurs commensurables, on peut éviter l'élimination. En effet, premièrement le nombre q ne pouvant être que l'un des diviseurs du terme tout connu de $F(x) = 0$, puisqu'on réduit la recherche actuelle au cas des *diviseurs entiers*, il ne reste qu'à associer à un tel nombre q quelque détermination convenable du nombre p . Imaginons donc que les deux équations $M = 0$ et $N = 0$ aient été ordonnées par rapport à p ; de plus, représentons par G et H les parties indépendantes de cette lettre d'ordre, dans M et N respectivement. G et H sont des polynômes entiers en q , et le caractère d'une valeur de q appartenant à un diviseur commensurable et entier, $x^2 + px - q$, c'est que, substituée dans les polynômes G et H , elle donne pour résultat deux nombres g et h ayant, parmi leurs communs diviseurs, la valeur correspondante de p . C'est sur cette remarque ingénieuse qu'est fondée la méthode de M. Durville.

II. La première observation propre à faciliter cette méthode, c'est que les polynômes G et H peuvent à leur tour être formés presque sans calcul. C'est à eux, en effet, que se réduisent respectivement M et N , dans la supposition de $p = 0$; or l'identité

$$F(x) = (x^2 + px - q)Q + Mx + N$$

devient, dans cette même supposition :

$$F(x) = (x^2 - q)Q + Gx + H.$$

Et alors on voit que G est l'ensemble des termes qui con-

tiennent \sqrt{q} dans $F(\sqrt{q})$; H est en même temps l'ensemble des termes rationnels.

Pour fixer les idées , je suppose que le degré de $F(x)$ soit impair, de la forme $2n + 1$; on modifiera aisément les résultats pour la forme paire.

Soit donc l'équation proposée

$$F(x) = A_0 x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} + \dots + A_{2n} x + A_{2n+1} = 0.$$

On posera immédiatement :

$$G = A_0 q^n + A_1 q^{n-1} + A_2 q^{n-2} + \dots + A_{2n},$$

$$H = A_1 q^n + A_2 q^{n-1} + \dots + A_{2n+1}.$$

Et c'est dans ces deux polynômes qu'on devra substituer pour q un diviseur quelconque de A_{2n+1} , positif ou négatif. Mais , comme après une telle substitution , le nombre q devient nécessairement diviseur de H , s'il arrive que ce même nombre q ait un diviseur commun avec A_{2n} , ce diviseur commun devra être essayé (dans le sens positif ou négatif) pour valeur de p . C'est pourquoi, dans la recherche actuelle, on devra , avant tout , *déterminer le plus grand commun diviseur des deux derniers coefficients A_{2n} et A_{2n+1} . Soit D ce plus grand commun diviseur. Avec q diviseur de A_{2n+1} , on essayera pour p tout diviseur commun à D et q .*

Ces premiers essais accomplis , et en supposant l'équation débarrassée de tout diviseur du second degré correspondant, on pourra sans inconvénient considérer les valeurs g et h que prennent pour un même nombre q les polynômes G et $\frac{H}{q}$.

III. Soit donc p un commun diviseur de g et h . Il y a , dans l'essai des nombres p et q , indépendamment des caractères d'exclusion qu'on tire des deux conditions :

$$\frac{F(1)}{1+p-q} = (\text{entier}); \quad \frac{F(-1)}{1-p-q} = (\text{entier});$$

il y a , dis-je , une précaution à observer qui procurera sou-

vent une grande simplification dans le calcul. C'est qu'il ne faudra entreprendre la division de $F(x)$ par $x^2 + px - q$, qu'après avoir ordonné le dividende et le diviseur *suivant les puissances croissantes de x* , comme déjà MM. Thibault (*Nouv. Annales*, II, 517) et Finck (*Traité d'Algèbre*, 2^e édit.) le pratiquent pour la recherche des diviseurs rationnels et entiers du premier degré. On aura ainsi l'avantage d'être souvent averti de l'impossibilité d'un diviseur, bien avant d'avoir poussé la division jusqu'au dernier terme du quotient.

On peut d'ailleurs obtenir un nouveau caractère d'exclusion comme il suit. Si M et N ont été ordonnées par rapport à la lettre q ; soient I et L les parties indépendantes de la lettre d'ordre, respectivement dans M et N . Toute valeur convenable de p étant substituée dans I et L donnera deux résultats i et l , multiples de la valeur correspondante du nombre q . Or I et L résultent dans M et N de la supposition $q = 0$; et l'identité

$$F(x) = (x^2 + px - q)Q + Mx + N$$

donne, dans cette supposition :

$$F(x) = (x^2 + px)Q_0 + Ix + L;$$

d'après quoi on voit aisément que l est le même que $F(0)$ ou A_{2n+1} ; de plus, on a $-ip + l = F(-p)$; d'où résulte :

$$i = A_0 p^{2n-1} - A_1 p^{2n-2} + \dots - A_{2n}.$$

Or il est clair que A_{2n+1} est multiple de q ; mais la condition

$$A_0 p^{2n} - A_1 p^{2n-1} + \dots - A_{2n} = m(q)$$

donnera pour p un caractère utile.

Enfin, on pourra encore s'aider des remarques suivantes qui ne sont, à vrai dire, qu'une application aux diviseurs du second degré $x^2 + px - q$ des moyens proposés par M. Durville pour ceux de degré supérieur.

IV. La question étant réduite à trouver les diviseurs communs qu'acquièrent les polynômes G et H , lorsqu'on y substitue certains nombres à la lettre d'ordre q , il sera aisé de remplacer dans cette recherche le système $[G, H]$ par des systèmes plus simples; et cela à l'aide d'un calcul analogue à celui de l'élimination par la méthode du plus grand commun diviseur.

Observez premièrement, d'après la valeur ci-dessus des polynômes G et H , que leurs coefficients ne sauraient avoir un diviseur commun.

Mais les coefficients de G pourraient admettre un commun diviseur g ; et ceux de H un autre commun diviseur h , et alors on pourra substituer au système proposé les trois systèmes suivants :

- 1° g avec $\frac{H}{h}$;
- 2° h avec $\frac{G}{g}$;
- 3° $\frac{G}{g}$ avec $\frac{H}{h}$.

Et d'abord, un système tel que g avec $\frac{H}{h}$, ou bien h avec $\frac{G}{g}$, sera bien facile à résoudre; car, pour le premier, par exemple, on substituera toutes les valeurs de q dans $\frac{H}{h}$, et on reconnaîtra à chaque fois les diviseurs que le résultat acquiert en commun avec g ; ainsi on n'aura à faire de substitution que dans un seul polynôme. Et c'est à cela que nous ramènerons le calcul pour le troisième système, que nous représenterons encore par $[G, H]$; mais en supposant qu'aucun des deux polynômes G et H n'admette un facteur numérique.

Soit divisé G par H, et le résultat de la division représenté par

$$aG = HQ + R_1 r_1,$$

a est le plus petit nombre par lequel il a fallu multiplier G pour obtenir un quotient et un reste entiers; r_1 est le facteur numérique commun à tous les termes du reste.

Dès lors on prouvera aisément que a et r_1 sont premiers entre eux, et que G et H ne peuvent acquérir par la substitution d'une valeur de q aucun autre facteur commun que ceux qui seront acquis en même temps aux systèmes

$$[H, r_1] \text{ et } [H, R_1].$$

On divisera H par R_1 , et en appliquant ici le beau théorème de Labatie, on remplacera de nouveau le système de $[H, R_1]$ par deux autres plus simples :

$$[R_1, r_2] \text{ et } [R_1, R_2],$$

et ainsi de suite.

V. *Application.* Soit l'équation

$$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 24 = 0,$$

donnée en exemple par M. Finck (p. 358 du *Traité d'Algèbre*, 2^e édition). On a ici :

$$G = -6q - 30, \quad H = q^2 + 19q + 24.$$

Ce système, en adoptant une notation déjà admise dans la théorie de l'élimination, sera remplacé par le suivant :

$$[H, 6] + [q+5, 46],$$

ou même par

$$[H, 6] + [q+5, 2],$$

puisque aucun diviseur de 24, substitué à q dans $q+5$, ne peut lui faire acquérir le diviseur premier 23.

Étudions donc premièrement le système $[q+5, 2]$, lequel n'admet évidemment pour q que des nombres impairs.

Et comme on suppose qu'on ait préalablement essayé les diviseurs dans lesquels p et q sont ± 1 , on voit que q ne peut avoir ici que les valeurs ± 3 , avec lesquelles on pourra essayer $p = \pm 2$.

Examinons donc les quatre formes :

$$x^2 + 2x + 3 ;$$

$$x^2 + 2x - 3 ;$$

$$x^2 - 2x + 3 ;$$

$$x^2 - 2x - 3 ;$$

or les valeurs $f(1) = 8$ et $f(-1) = 80$ font exclure immédiatement la première et la troisième.

J'essaye ensuite par la division les seconde et troisième, en ordonnant selon les puissances croissantes, et l'impossibilité se manifeste dès les seconds termes des quotients.

Dès lors les essais doivent se porter sur le système

$$[q^2 + 19q + 24, 6],$$

et comme 6 est diviseur de 24, on doit essayer premièrement, avec chaque valeur de q multiple de 6, les valeurs de p qui en sont diviseurs. Pour commencer par les formes les plus simples, $q = \pm 6$ avec $p = \pm 1$; elles se trouveront exclues immédiatement par la simple considération de $f(+1)$ et $f(-1)$.

On passera donc à $q = \pm 6$ avec $p = \pm 3$, d'où les formes

$$x^2 + 3x + 6$$

$$x^2 + 3x - 6$$

$$x^2 - 3x + 6$$

$$x^2 - 3x - 6.$$

La première s'exclut par la même considération de $f(1)$ ou $f(-1)$; la seconde ne permet pas de pousser la division au delà du second terme, et la troisième réussit.