

GUILMIN

Définitions précises arithmétiques des racines et des logarithmes incommensurables

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 313-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_313_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉFINITIONS PRÉCISES ARITHMÉTIQUES

des racines et des logarithmes incommensurables.

PAR M. GUILMIN,

Ancien élève de l'Ecole normale.

1. Qu'est-ce que la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait? Qu'est-ce que $\sqrt{2}$, par exemple? Dans la géométrie, on rencontre ce nombre et on conçoit parfaitement son existence; c'est pour nous alors un nombre bien déterminé. Mais ne serait-il pas bon de définir arithmétiquement, d'une manière précise, indépendamment de toute application, ce qu'on entend par $\sqrt{2}$? C'est ce que nous allons essayer de faire (*).

2. Nous avons remarqué que le calcul de $\sqrt{2}$, à des approximations décimales de plus en plus grandes, effectué d'après la définition et la règle données en arithmétique, conduisait à des nombres qui, s'ils ne croissaient pas toujours nécessairement, au moins ne décroissaient jamais. Nous nous sommes demandé si cela était particulier aux approximations décimales, surtout en voyant que le calcul de cette même racine de 2 à moins de $\frac{1}{5}$, de $\frac{1}{6}$, de $\frac{1}{7}$, de $\frac{1}{8}$, était loin de conduire au même résultat: car la première racine approchée est plus grande que chacune des trois autres.

L'examen de la question nous a conduit à formuler cette proposition générale: *Si l'on prend successivement la racine*

(*) Voir t. VI, p. 110.

carrée d'un même nombre, $\sqrt{2}$ par exemple, à moins de deux fractions $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$, telles que n soit multiple de m , la seconde racine approchée n'est jamais moindre que la première. Par exemple, la racine de 2 à $\frac{1}{15}$ près ne saurait être moindre que $\sqrt{2}$ calculée à $\frac{1}{5}$ près.

En effet, soient $\frac{a}{5}$ et $\frac{b}{15}$ les deux racines approchées. Si $\frac{a}{5}$ était plus grand que $\frac{b}{15}$, on aurait $\frac{3a}{15} > \frac{b}{15}$. Mais le carré de $\frac{a}{5}$ ou de $\frac{3a}{15}$ est moindre que 2, et contenu dans 2. Donc $\frac{b}{15}$ ne serait pas le plus grand nombre de quinzièmes dont le carré soit contenu dans 2, ne serait pas la racine de 2 à $\frac{1}{15}$ près ; ce qui serait contraire à l'hypothèse.

En calculant $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ près, on trouve des nombres égaux à $\frac{7}{5}$ qui est la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5}$. Cela peut-il toujours continuer ainsi ? Il est évident que non. Mais quand la valeur approchée sera-t-elle plus grande que $\frac{7}{5}$? Pour le savoir, partons du calcul de notre racine, à $\frac{1}{5}$ près : on a multiplié 2 par 5^2 , extrait la racine du produit 2×5^2 à moins d'une unité, ce qui a donné 7. Désignons, pour généraliser, le reste de cette opération par r (ici $r = 1$). Nous avons $2 \times 5^2 = 7^2 + r$. Multiplions les deux membres de cette égalité par le carré d'un nombre entier indéterminé n ; nous avons :

$$2 \times 5^2 \times n^2 = 7^2 \times n^2 + r \times n^2. \quad (1)$$

Nous voyons déjà que la racine carrée de $2 \times 5^2 \times n^2$ à moins d'une unité sera au moins $7 \times n$, et la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5 \times n}$, au moins de $\frac{7 \times n}{5 \times n} = \frac{7}{5}$; ce qui démontre autrement la proposition énoncée plus haut. Continuons :

pour que la racine de 2 à moins de $\frac{1}{5 \times n}$ surpasse $\frac{7 \times n}{5 \times n}$, il suffit que le deuxième membre de l'égalité (1) soit au moins égal à $(7 \times n + 1)^2$; car la racine approchée sera alors $\frac{7 \times n + 1}{5 \times n}$.

Mais $(7 \times n + 1)^2 = 7^2 \times n^2 + 2 \times 7 \times n + 1$. Comparant à l'égalité (1), on voit qu'il suffit pour notre but que l'on ait $r \times n^2 > 2 \times 7 \times n$ ou bien $r \times n > 2 \times 7$, ou enfin $n > \frac{2 \times 7}{r}$.

En prenant pour n le nombre entier immédiatement supérieur à ce quotient, on sera certain que $\sqrt{2}$ calculée à moins de $\frac{1}{5 \times n}$ sera un nombre plus grand que $\sqrt{2}$, à $\frac{1}{5}$ près.

Dans notre exemple, $r = 1$. Il faut prendre $r > 14$; prenant $r = 15$, nous cherchons la racine à moins de $\frac{1}{5 \times 15} = \frac{1}{75}$.

On trouve $\frac{106}{75}$, tandis que $\frac{7}{5} = \frac{105}{75}$. En prenant un quelconque des multiples de 5 inférieurs à 5×15 pour dénominateur de la fraction d'approximation, l'approximation n'avance pas. Ce n'est pas à dire qu'il en serait ainsi pour tout dénominateur inférieur à 75. On voit de plus que $\frac{1}{75}$ est une

limite inférieure de la différence entre $\sqrt{2}$ et $\frac{7}{5}$, en ce sens

que $(\frac{7}{5} + \frac{1}{75})^2$ est inférieur à 2 aussi bien que $(\frac{7}{5})^2$ lui-même.

4. Maintenant que nous avons un moyen assuré d'avoir

des racines approchées croissantes, revenons à notre sujet principal. Qu'est-ce que $\sqrt{2}$?

Calculons $\sqrt{2}$ à des approximations décimales successives poussées aussi loin que l'on voudra. Écrivons sur deux colonnes: 1° les racines approchées par défaut; 2° les racines correspondantes approchées par excès, lesquelles ne sont autre chose que les premières augmentées chacune d'une unité décimale du dernier ordre. Voici le commencement des deux suites.

1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
1,41421	1,41422
.
.

Deux nombres correspondants des deux suites, à partir des seconds nombres, sont compris entre les deux nombres immédiatement supérieurs: 1,41 et 1,42, par exemple, sont compris entre 1,4 et 1,5. Un nombre de gauche peut être quelquefois égal à son supérieur; le nombre de droite, *d'autres fois*, égal au sien.

Supposons que l'un de ces cas se présentant, deux ou plusieurs nombres consécutifs de la colonne de gauche étant égaux, on ne conserve, chaque fois, que l'un de ces nombres, en supprimant tous les autres, ainsi que leurs correspondants de droite. Cela fait, nous pouvons certainement établir les conséquences suivantes: Les nombres de la colonne de gauche forment une suite croissante; ces nombres ont cependant une limite supérieure, car aucun d'eux ne peut dépasser un quelconque des nombres de la colonne à droite. Les nombres de cette colonne de droite forment une suite décroissante; ils

ont une limite inférieure, car aucun d'eux ne peut être inférieur à un nombre quelconque de la colonne de gauche. Les deux limites dont nous parlons sont, par leur nature même, comprises entre deux nombres correspondants quelconques des deux colonnes. Or on peut trouver deux nombres correspondants dont la différence soit une unité décimale aussi petite que l'on voudra. Donc la différence entre les deux limites en question est moindre que tout nombre assignable; donc ces deux limites sont un seul et même nombre. Cette limite commune est ce qu'on appelle $\sqrt{2}$.

Pourquoi? C'est que 2 est la limite des carrés des nombres de gauche, aussi bien que des carrés des nombres de droite; limite supérieure pour les uns, inférieure pour les autres. On sait, en effet, que les carrés des nombres de gauche sont tous inférieurs à 2; les carrés des nombres de droite tous plus grands que 2. Ce nombre 2 est donc compris entre les carrés de deux nombres correspondants quelconques. Par cela même que la différence entre deux de ces nombres correspondants, a et $a + \delta$, décroît au-dessous de tout nombre assignable, il en est de même de la différence de leurs carrés (*). Il arrivera donc alors que la différence entre 2 et chacun de ces carrés sera moindre que tout nombre assignable, quand ces nombres approcheront de leur limite. 2 est évidemment le carré de la limite de ces nombres, et on a bien fait d'appeler cette limite, $\sqrt{2}$.

Mais, d'après ce qu'on a dit précédemment, n étant un nombre entier quelconque, nous pouvons, en prenant des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n \times p}$, $\frac{1}{n \times p \times q}$, ... ou

(*) $(a + \delta)^2 - a^2 = 2a\delta + \delta^2 = \delta(2a + \delta) = \delta(a + a + \delta)$ Or $a + a + \delta$ est moindre que le double de $a + \delta$, c'est-à-dire du plus grand nombre; or $a + \delta$ est moindre que 1,5 le premier des nombres de droite. $2 \times 1,5 \times \delta$ ou 3δ est donc une limite supérieure de la différence des carrés.

plus simplement, à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{4n}$, $\frac{1}{8n}$, former deux colonnes pareilles aux précédentes, et arriver aux mêmes conséquences pour les limites des nombres écrits dans ces deux colonnes. Nous serons tout aussi fondés à appeler $\sqrt{2}$ la limite commune des nombres de nos deux nouvelles colonnes. Cependant, à ne voir que les deux tableaux, il ne paraît pas évident que les deux limites soient les mêmes pour les nombres décimaux du tableau que nous avons écrit, et les nombres du tableau que nous venons d'indiquer sans l'écrire. Ne peut-on pas croire à deux limites différentes, l et l' , à deux définitions pour $\sqrt{2}$, qui n'en aurait alors aucune ?

Non ; car l'une et l'autre définition sont fondées sur cette proposition : 2 est la limite des carrés des nombres de chaque suite décimale ; 2 est la limite des carrés des nombres des deux nouvelles suites obtenues en changeant la fraction primitive qui marquait l'approximation ; supposons, comme il est dit plus haut, deux limites différentes, l et l' , pour les racines approchées des deux tableaux ; prenons deux nombres à l'extrême voisinage de chaque limite dans les suites correspondantes, l'un intérieur à l , l'autre supérieur à l' ; la différence entre ces deux nombres aurait une valeur déterminée plus grande que $l-l'$; la différence entre leurs carrés, qui comprennent le nombre 2, aurait aussi une valeur déterminée (*). L'un de ces carrés, au moins, aurait avec 2 une différence qui ne pourrait être moindre qu'un nombre assigné quelconque, comme cela doit être cependant pour les nombres des deux tableaux, quand on approche suffisamment de la

(*) Cette différence entre les carrés serait au moins égale à $2(1,4) \times (l-l')$, ou bien à $2 \times \alpha \times (l-l')$, en appelant α le plus petit nombre de la suite de gauche, deuxième tableau. On tire cette limite de la formule $2\alpha^2 + \beta^2 = (2\alpha + \beta)^2$; 1,4 ou α étant moindres l'un ou l'autre que α .

limite de chacun. On peut faire, au lieu de la démonstration précédente, celle que nous faisons plus loin à propos de logarithmes, pour prouver l'identité de toutes les limites. Tout ce que nous venons de dire s'applique évidemment à la racine carrée d'un nombre quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable, mais bien déterminé. Cela s'applique même à une racine quelconque.

n étant d'ailleurs un nombre entier quelconque, on voit que l'on arrive à la même limite, quelle que soit la fraction primitive marquant l'approximation. On peut employer le même raisonnement à l'égard d'autres nombres appelés incommensurables, pour les définir au point de vue purement arithmétique.

Faisons-le pour les logarithmes.

Sur la définition des logarithmes incommensurables.

Considérons le système de logarithmes dont la base est 10. Écrivons les deux progressions :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{:} 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \dots \\ \text{:} 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad \dots \end{array} \right\}$$

et faisons quelques remarques préliminaires. Quand on insère entre les termes de la progression géométrique considérés 2 à 2 un nombre indéterminé m de moyens, on a pour raison nouvelle $q = \sqrt[m+1]{10}$; q étant plus grand que 1, car $q^{m+1} = 10$, tous les termes de la nouvelle progression vont en croissant et peuvent dépasser toute limite donnée. On sait de plus que l'on peut toujours choisir m assez grand pour que deux termes consécutifs de grandeur finie, pris dans la nouvelle progression, aient entre eux une différence aussi petite que l'on veut. La formule générale d'un terme de cette nouvelle progression est $q^n = \sqrt[m+1]{10^n}$.

Considérons deux progressions géométriques ainsi obtenues, en prenant deux valeurs différentes, m et m' , de m ; prenons un terme dans chacune d'elles, et comparons entre eux ces deux termes $q^n = \sqrt[m+1]{10^n}$ et $q'^{n'} = \sqrt[m'+1]{10^{n'}}$. Pour savoir quel est le plus grand des deux, il suffit de comparer les deux fractions $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n'}{m'+1}$. Si, par exemple, $\frac{n}{m+1}$ est plus grande que $\frac{n'}{m'+1}$, il est certain que $\sqrt[m+1]{10^n}$ est plus grand que $\sqrt[m'+1]{10^{n'}}$; en effet, on peut réduire ces fractions $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n'}{m'+1}$ au même dénominateur D . Soient $\frac{N}{D}$ et $\frac{N'}{D}$ les deux résultats. On voit facilement que $\sqrt[m+1]{10^n} = \sqrt[\frac{D}{m+1}]{10^{\frac{Dn}{m+1}}}$ et $\sqrt[m'+1]{10^{n'}} = \sqrt[\frac{D}{m'+1}]{10^{\frac{Dn'}{m'+1}}}$ (*). On sait que $\frac{N}{D}$ est plus grand que $\frac{N'}{D}$, ou N plus grand que N' . Donc $10^{\frac{Dn}{m+1}} > 10^{\frac{Dn'}{m'+1}}$, et $\sqrt[\frac{D}{m+1}]{10^{\frac{Dn}{m+1}}}$ plus grand que $\sqrt[\frac{D}{m'+1}]{10^{\frac{Dn'}{m'+1}}}$, ce qu'il fallait prouver.

Écrivons la progression géométrique pour les cas de $m+1=10$; insérons le même nombre m de moyens entre les termes de la progression arithmétique (1); nous aurons ainsi les deux nouvelles progressions

$$(2) \quad \begin{cases} 1 : \sqrt[10]{10} : \sqrt[10]{10^2} : \sqrt[10]{10^3} \dots \sqrt[10]{10^{10}} : \sqrt[10]{10^{11}} : \sqrt[10]{10^{12}} \dots \\ 0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \dots \quad \frac{10}{10} \quad \frac{11}{10} \quad \frac{12}{10} \quad \dots \end{cases}$$

(*) L'égalité $\sqrt[m+1]{10^n} = \sqrt[\frac{D}{m+1}]{10^{\frac{Dn}{m+1}}}$, revient à celle-ci, $10^{n \times \frac{D}{m+1}} = 10^{N(m+1)}$. Or $\frac{n+1}{m}$ étant égal à $\frac{N}{D}$, $n \times \frac{D}{m+1} = N \times (m+1)$. Donc l'égalité précédente est vraie, et la première aussi.

Si nous faisons la même chose dans le cas de $m+1=100$, nous aurons un troisième système :

$$(3) \begin{cases} :: 1 : \sqrt[100]{10} : \sqrt[100]{10^2} : \sqrt[100]{10^3} \dots \sqrt[100]{10^{100}} : \sqrt[100]{10^{101}} \dots \\ : 0 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{100} \dots \frac{100}{100} \cdot \frac{101}{100} \dots \end{cases}$$

et ainsi de suite indéfiniment.

De même que tous les termes des progressions (1) font partie des progressions (2), tous les termes des progressions (2) font partie des progressions (3). On peut considérer le système (3) comme obtenu en insérant neuf moyens entre les termes, pris deux à deux de chacune des quatre progressions (2). Si on écrit le système (4) pour $m+1=1000$, on verra de même que ce système (4) se déduit de (3), de la même manière que (3) de (2). $m+1$ croissant indéfiniment, deux termes consécutifs d'une progression géométrique pourront différer aussi peu que l'on voudra; de même pour la progression arithmétique correspondante.

Tout cela posé, considérons un nombre quelconque, 7 par exemple. Il est compris entre deux termes de la progression géométrique (2), comme entre deux termes de la progression géométrique (3), et ainsi de suite. On ne saurait d'ailleurs avoir $\sqrt[m+1]{10^n} = 7$ pour des valeurs entières de $m+1$ et n , car il en résulterait $7^{m+1} = 10^n$, égalité impossible. Pour avoir les nombres qui comprennent 7 dans une progression quelconque, on observe qu'on doit avoir

$$\sqrt[m+1]{10^n} < 7 < \sqrt[m+1]{10^{n+1}},$$

d'où

$$10^n < 7^{m+1} < 10^{n+1}.$$

$m+1$ étant un nombre donné, et n un nombre cherché. On élèvera 7 à la puissance $m+1$, on comptera les chiffres du

nombre obtenu ; si on trouve p chiffres , 7^{m+1} sera compris en 10^{p-1} et 10^p ; $n=p-1$; n étant ainsi trouvé , on aura , à la fois , les deux nombres $\sqrt[m+1]{10^n}$ et $\sqrt[m+1]{10^{n+1}}$, qui comprennent 7 dans chaque progression géométrique , et les deux nombres $\frac{n}{m+1}$ et $\frac{n+1}{m+1}$, écrits sous ceux-là dans la progression arithmétique correspondante .

Il nous sera donc possible de former le tableau suivant : En suivant l'ordre des progressions géométriques tel qu'il est indiqué ci-dessus , nous écrivons sur deux colonnes verticales , 1° les termes immédiatement inférieurs à 7 ; 2° les termes immédiatement supérieurs , en mettant à côté l'un de l'autre les deux nombres qui comprennent 7 dans une même progression géométrique . Sur deux autres colonnes verticales , que nous faisons correspondre aux précédentes , terme à terme , nous mettons les nombres qui dans les progressions arithmétiques correspondent aux termes des progressions géométriques que nous venons d'écrire . Voici le commencement de ces suites :

(a)	(b)	(a')	(b)'
1	10	0	1
$\sqrt[10]{10^8}$	$\sqrt[10]{10^9}$	0,8	0,9
$\sqrt[100]{10^{84}}$	$\sqrt[100]{10^{85}}$	0,84	0,85
$\sqrt[1000]{10^{845}}$	$\sqrt[1000]{10^{846}}$	0,845	0,846
.
.

Deux termes correspondants des colonnes (a) et (b) , à partir de la deuxième ligne horizontale , sont compris entre les correspondants supérieurs : il en est de même de deux

termes correspondants quelconques des colonnes (a') et (b').

Par exemple : $\sqrt[100]{10^{84}}$ et $\sqrt[100]{10^{85}}$ ne peuvent être moindres que $\sqrt[10]{10^8}$, ni plus grands que $\sqrt[10]{10^9}$. En effet, 7 étant compris entre $\sqrt[10]{10^8}$ et $\sqrt[10]{10^9}$, qui correspondent aux termes 0,8, 0,9 de la progression arithmétique (2), si l'on cherche les termes qui comprennent (7) dans la progression géométrique (3), on doit trouver deux des termes qui s'intercalent entre $\sqrt[10]{10^8}$ et $\sqrt[10]{10^9}$ quand on passe des progressions (2) aux progressions (3). Les deux termes correspondants de la progression arithmétique (3) seront deux des termes intercalés entre 0,8 et 0,9 ; l'un de ces termes pouvant être 0,8 ou 0,9.

Après tout ce que nous venons de dire, on pourra répéter mot pour mot, au sujet des colonnes (a) et (b), ce qui a été dit des deux colonnes verticales formées à propos de $\sqrt{2}$. Seulement, pour la conclusion dernière, observant que 7 est constamment compris entre deux termes correspondants de ces colonnes (a) et (b), on conclura que la limite commune des nombres de ces colonnes est 7.

En répétant de nouveau, et mot à mot, ledit raisonnement cité, on conclura que les nombres des colonnes (a') et (b') ont une limite commune vers laquelle ils tendent indéfiniment en correspondant toujours dans les progressions successives aux nombres des colonnes (a) et (b). Concevant donc continuée indéfiniment la comparaison des progressions telles que (2), (3), (4) ... , on trouve des nombres différant de (7) d'une quantité aussi petite que l'on veut, correspondant à des nombres des colonnes (a') et (b') continuées suffisamment loin. On est donc fondé à établir cette définition : Le logarithme d \cdot 7 n'est autre chose que la limite des nombres (a') et (b'), limite dont nous avons prouvé l'existence.

6. Il y a une infinité de manières d'arriver à cette limite qu'on appelle logarithme de 7.

Au lieu de faire $m + 1 = 10$, on peut lui donner une valeur quelconque p ; puis, pour continuer, une valeur multiple quelconque de p ; $m + 1 = p \times q$; puis encore une valeur multiple $p \times q \times r$, et ainsi de suite. Tout ce que nous avons dit sera vrai. Tous les termes de la progression géométrique obtenue pour $m + 1 = p$ feront partie de la progression obtenue pour $m + 1 = p \times q$. On passera évidemment de la progression ($m + 1 = p$) à la progression $m + 1 = (p \times q)$, en insérant $q - 1$ moyens entre les termes pris deux à deux de la première de ces progressions. D'ailleurs, $m + 1$ croissant et pouvant croître au delà de toute limite, de cette manière-là aussi bien que si $m + 1$ égalait 10^n , deux termes consécutifs d'une progression géométrique obtenue pourront différer aussi peu que l'on voudra. D'ailleurs $\frac{1}{p \times q \times r \dots}$ peut décroître indéfiniment. On peut donc, pour nos hypothèses actuelles, recommencer tout le raisonnement précédent, et arriver à former un tableau semblable à celui que composent les colonnes (a), (b), (a'), (b'). On arrivera à cette même conclusion que le logarithme de (7) est la limite des nombres des colonnes remplaçant (a') et (b'). Ce qu'il faudrait faire voir, c'est que cette nouvelle limite, quels que soient $p \times q \times r \dots$, ne saurait différer de celle qui existe pour les nombres (a') et (b'). Admettons que ces deux limites diffèrent; soient l la limite de la suite décimale, et l' la limite de la suite nouvelle, que j'appellerai suite fractionnaire. Supposons l plus grand que l' . Puisque la différence $l - l'$ existe, on peut la regarder comme étant plus grande qu'un certain nombre commensurable $\frac{1}{H}$, H pouvant être un nombre très-grand. Dans la suite fractionnaire

des nombres inférieurs à l , on peut prendre un nombre $\frac{A}{N}$ dont le dénominateur N soit plus grand que H . Alors $\frac{1}{N}$

est moindre que $\frac{1}{H}$.

$\frac{A}{N}$ inférieur à l' est inférieur à l , et diffère de l d'une quantité plus grande que $l - l'$, plus grande que $\frac{1}{H}$, et encore plus grande que $\frac{1}{N}$. Il résulte de là que $\frac{A+1}{N}$, terme

de la deuxième suite fractionnaire correspondant à $\frac{A}{N}$ est encore moindre que l d'une certaine quantité que nous désignerons par k . Mais on peut prendre dans la suite décimale des nombres inférieurs à l , un nombre qui en diffère d'une valeur moindre que k . Soit $\frac{A'}{10^{kr}}$ le nombre ainsi choisi. On

aurait $\frac{A'}{10^{kr}} > \frac{A+1}{N}$. Par suite, $\sqrt[10^{kr}]{10^{A'}} > \sqrt[N]{10^{A+1}}$, ce qui

est absurde; car, d'après nos raisonnements, $\sqrt[10^{kr}]{10^{A'}}$ est moindre que 7, et $\sqrt[N]{10^{A+1}}$ plus grand que 7. On voit donc que $\log. 7$ est un nombre bien déterminé; qu'on arrivera à la même valeur pour ce logarithme, quel que soit le mode d'approximation adopté.

7. Nous avons donné quelque étendue aux considérations précédentes. Elles sont fondées sur cette remarque générale : le plus grand nombre de $n^{\text{ièmes}}$ contenu dans la valeur d'un nombre incommensurable A , n'est jamais moindre que le plus grand nombre de $p^{\text{ièmes}}$ contenus dans ce nombre A , si p est un multiple de n ; ce qui se démontre comme on l'a fait pour $\frac{a}{5}$ et $\frac{b}{15}$, valeurs approchées de $\sqrt{2}$. Pour em-

ployer les considérations précédentes afin de définir arithmétiquement un nombre incommensurable A , il suffira donc qu'on ait le moyen de déterminer le plus grand nombre de $n^{\text{ièmes}}$ contenus dans A , n étant quelconque; et on le peut, dès qu'on a, pour déterminer A , une méthode d'approximation quelconque, le développement en fraction continue, par exemple.