Lebesgue

Vérification analytique de la formule, question 69

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 350-353
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__350_1>

VÉRIFICATION ANALYTIQUE

de la formule, question 69. (II.327).

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

I. Soient a, b, c, trois quantités positives, rangées par ordre de grandeur ($a < b < c$). L'équation

$$abc = x\left\{a\sqrt{4x^2-a^2} + b\sqrt{4x^2-b^2} \pm c\sqrt{4x^2-c^2}\right\} \qquad (a)$$

où le signe supérieur est pour $a^2+b^2>c^2$ ou $=c^2$, et l'inférieur pour $a^2+b^2<c^2$, est satisfaite par

$$x=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}}=\frac{abc}{\sqrt{\mathrm{U}}}.$$

Les quatre radicaux étant pris positivement.

La division par x^3 réduit la première équation à celle-ci :

$$\frac{a}{x}.\frac{b}{x}.\frac{c}{x}=\frac{a}{x}\sqrt{4-\frac{a^2}{x^2}}+\frac{b}{x}\sqrt{4-\frac{c^2}{x^2}}\pm\frac{c}{x}\sqrt{4-\frac{c^2}{x^2}}.\;(b)$$

Or on a :

$$\mathrm{U}=(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)=$$
$$\{(b+c)^2-a^2\}\ \{a^2-(b^2-c)^2\}=$$
$$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\ \{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$$
$$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)=$$
$$=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$$

De là on tire :

$$1^{\circ}\quad 4-\frac{\mathrm{U}}{b^2c^2}=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)^2=4-\frac{a^2}{x^2}\text{ à cause de }\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{bc},$$

de même

$$2^{\circ}\quad 4-\frac{\mathrm{U}}{a^2b^2}=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\right)^2=4-\frac{b^2}{x^2}\text{ à cause de }\frac{b}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ac},$$

$$3^{\circ}\quad 4-\frac{\mathrm{U}}{a^2b^2}=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right)^2=4-\frac{c^2}{x^2}\text{ à cause de }\frac{c}{x}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ab}.$$

Ces valeurs réduisent l'équation (a) à celle-ci :

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{U}}}{a^2b^2c^2}=\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{bc}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)+\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ac}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\right)\pm\frac{\sqrt{\mathrm{U}}}{ab}\left(\pm\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right),$$

ce qui revient à :

$$\mathrm{U}=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$$

N. B. Pour $a^2+b^2-c^2=0$; $\mathrm{U}=4a^2b^2$, $x=\frac{c}{2}$, $\sqrt{4x^2-c^2}=0$.

Le troisième terme du deuxième membre de l'équation (a) disparaît.

II. Quand les trois nombres a, b, c peuvent être regardés comme les trois côtés d'un triangle, voici la signification géométrique de l'équation (a). Soit x le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et O le centre. On a.

$$ABC = BOC + AOC \pm AOB,$$

selon que le centre est intérieur ou extérieur au triangle.

$$AOB \text{ devient nul pour } x = \frac{c}{2}.$$

Or :

$$BOC = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{4}a\sqrt{4x^2 - a^2}, \quad AOC = \frac{1}{4}b\sqrt{4x^2 - b^2}$$

$$AOB = \frac{1}{4}c\sqrt{4x^2 - c^2}; \quad ABC = \frac{1}{2}ab\sin C; \quad \sin C = \frac{1}{2}\frac{C}{x};$$

d'où $ABC = \frac{1}{4}\frac{abc}{x}$, de là l'équation

$$\frac{abc}{4x} = \frac{1}{4}a\sqrt{4x^2 - a^2} + \frac{1}{4}b\sqrt{4x^2 - b^2} \pm \frac{1}{4}c\sqrt{4x^2 - c^2},$$

qui revient à l'équation (a).

Comme on a aussi :

$$ABC = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4},$$

il en résulte :

$$x = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Ainsi cette valeur de x satisfait à l'équation (a).

III. L'équation (b) est satisfaite par $x = \infty$, c'est le cas de $U = 0$; $a + b = c$. Il n'y a pas triangle.

L'équation (b) est satisfaite par $a + b < c$, il n'y a plus de triangle, U est négatif, et x imaginaire.

La démonstration algébrique embrasse tous les cas.

Prouver que l'on a :

$$4 \sin A \sin B \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C. \qquad (c)$$

quand $A + B + C = 2$ quad.

L'équation (c) revient à l'équation (b).