

LEBESGUE

**Vérification analytique de la formule,
question 69**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 350-353

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_350_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

VÉRIFICATION ANALYTIQUE

de la formule, question 69. (II.327).

PAR M. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté de Bordeaux.

I. Soient a, b, c , trois quantités positives, rangées par ordre de grandeur ($a < b < c$). L'équation

$$abc = x \left\{ a\sqrt{4x^2 - a^2} + b\sqrt{4x^2 - b^2} \pm c\sqrt{4x^2 - c^2} \right\} \quad (a)$$

où le signe supérieur est pour $a^2 + b^2 > c^2$ ou $= c^2$, et l'inférieur pour $a^2 + b^2 < c^2$, est satisfaite par

$$x = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{U}}$$

Les quatre radicaux étant pris positivement.

La division par x^3 réduit la première équation à celle-ci :

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{c}{x} = \frac{a}{x} \sqrt{4 - \frac{a^2}{x^2}} + \frac{b}{x} \sqrt{4 - \frac{c^2}{x^2}} \pm \frac{c}{x} \sqrt{4 - \frac{c^2}{x^2}} \quad (b)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} U &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= \{(b+c)^2 - a^2\} \{a^2 - (b^2 - c^2)\} = \\ &= \{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\} \{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\} \\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = \\ &= a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2). \end{aligned}$$

De là on tire :

$$1^\circ \quad 4 - \frac{U}{b^2c^2} = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right)^2 = 4 - \frac{a^2}{x^2} \text{ à cause de } \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{U}}{bc},$$

de même

$$2^\circ \quad 4 - \frac{U}{a^2b^2} = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} \right)^2 = 4 - \frac{b^2}{x^2} \text{ à cause de } \frac{b}{x} = \frac{\sqrt{U}}{ac},$$

$$3^\circ \quad 4 - \frac{U}{a^2b^2} = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right)^2 = 4 - \frac{c^2}{x^2} \text{ à cause de } \frac{c}{x} = \frac{\sqrt{U}}{ab}.$$

Ces valeurs réduisent l'équation (a) à celle-ci :

$$\frac{U\sqrt{U}}{a^2b^2c^2} = \frac{\sqrt{U}}{bc} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right) + \frac{\sqrt{U}}{ac} \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} \right) \pm \frac{\sqrt{U}}{ab} \left(\pm \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right),$$

ce qui revient à :

$$U = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2).$$

$$\text{N. B. Pour } a^2 + b^2 - c^2 = 0; U = 4a^2b^2, x = \frac{c}{2}, \sqrt{4x^2 - c^2} = 0.$$

Le troisième terme du deuxième membre de l'équation (a) disparaît.

II. Quand les trois nombres a, b, c peuvent être regardés comme les trois côtés d'un triangle, voici la signification géométrique de l'équation (a). Soit x le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et O le centre. On a .

$$ABC = BOC + AOC \pm AOB,$$

selon que le centre est intérieur ou extérieur au triangle.

$$AOB \text{ devient nul pour } x = \frac{c}{2}.$$

Or :

$$BOC = \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{4} a \sqrt{4x^2 - a^2}, \quad AOC = \frac{1}{4} b \sqrt{4x^2 - b^2}$$

$$AOB = \frac{1}{4} c \sqrt{4x^2 - c^2}; \quad ABC = \frac{1}{2} ab \sin C; \quad \sin C = \frac{1}{2} \frac{C}{x};$$

d'où $ABC = \frac{1}{4} \frac{abc}{x}$, de là l'équation

$$\frac{abc}{4x} = \frac{1}{4} a \sqrt{4x^2 - a^2} + \frac{1}{4} b \sqrt{4x^2 - b^2} \pm \frac{1}{4} c \sqrt{4x^2 - c^2},$$

qui revient à l'équation (a).

Comme on a aussi :

$$ABC = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4},$$

il en résulte :

$$x = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Ainsi cette valeur de x satisfait à l'équation (a).

III. L'équation (b) est satisfaite par $x = \infty$, c'est le cas de $U = 0$; $a + b = c$. Il n'y a pas triangle.

L'équation (b) est satisfaite par $a + b < c$, il n'y a plus de triangle, U est négatif, et x imaginaire.

La démonstration algébrique embrasse tous les cas.

Prouver que l'on a :

$$4\sin A \sin B \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C. \quad (c)$$

quand $A + B + C = 2$ quad.

L'équation (c) revient à l'équation (b).
