NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Théorèmes sur les polygones inscrits dans une conique, et solutions des questions 108, 109 et 110

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 356-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__356_1>

THÉORÈMES

sur les polygones inscrits dans une conique, et solutions des questions 108, 109 *et* 110. (*Voir* p. 112.)

PAR M. PAUL SERRET,
Élève d'Avignon.

---

1. Théorème I. Soient deux quadrilatères ABCD, *abcd* inscrits dans la même conique : si l'on prend successivement chaque côté AB du premier quadrilatère, qu'on cherche les deux points de rencontre $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{AB}\cdot\overline{cd}$ de ce côté, avec le côté homologue *ab* et son opposé *cd* du second quadrilatère, on obtiendra huit points de rencontre, qui seront situés sur une même conique (*).

Démonstration. Prenons les deux côtés homologues AB et *ab* pour axes des y et des x.

Soit (1) $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$,

(*) On est prié de faire les figures.

l'équation de la conique. Les systèmes des droites AD,BC ; ad, bc seront représentés par les équations suivantes :

(2) $Ay^2 + B'xy + C'x^2 + Dy + E'x + F = 0.$ [AD, BC].

(3) $A''y^2 + B''xy + Cx^2 + D''y + Ex + F = 0.$ [ad, bc].

Cela posé, retranchons successivement (2) et (3) de (1), nous obtiendrons ainsi les équations des droites CD, cd.

$$\text{CD}, \ (a)\,;\ (B-B')y + (C-C')x + E - E' = 0.$$
$$cd, \ (b)\,;\ (A-A'')y + (B-B'')x + D - D'' = 0.$$

Retranchons (3) de (2), l'équation résultante :

$$(c)\ \ (A-A'')y^2 + (B'-B'')\,xy + (C'-C)\,x^2 + (D-D'')\,y + (E'-E)\,x = 0\,;$$

sera satisfaite par les cinq points, $\overline{AB} \cdot \overline{ab}$; $\overline{AD} \cdot \overline{ad}$; $\overline{AD} \cdot \overline{bc}$; $\overline{BC} \cdot \overline{ad}$; $\overline{BC} \cdot \overline{bc}$; la conique qu'elle représente passera donc par ces cinq points. Démontrons de plus que cette même conique (c) passe par les trois points $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$; $\overline{CD} \cdot \overline{ab}$, $\overline{cd} \cdot \overline{AB}$.

1° Elle passe par $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$; car si x et y désignent spécialement dans (a) et (b) les coordonnées du point $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$, en multipliant ($a$) par x, et (b) par y, on aura les deux égalités :

$$(B-B')\,xy + (C-C')\,x^2 + (E-E')\,x = 0,$$
et
$$(A-A'')y^2 + (B-B'')xy + (D-D'')y = 0.$$

Par suite, en retranchant la première de la seconde, on aura l'égalité

$$(A-A'')y^2 + (B'-B'')xy + (C'-C)x^2 + (D-D'')y + (E'-E) = 0,$$

égalité qui n'est autre chose que l'équation de la conique (c), dans laquelle x et y sont remplacés par les coordonnées du point $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$; donc, etc...

2° Elle passe par $\overline{AB} \cdot \overline{cd}$. Faisant en effet $x = 0$, dans (b)

et (c), on arrive dans l'une et l'autre équation, à la relation $(A-A'')y+D-D''=0$.

3° Elle passe par $\overline{ab} \cdot \overline{CD}$. Faisant de même $y=0$, dans (a) et (c), on arrive pour l'une et l'autre équation à la relation $(C-C')x+(E-E')=0$.

La proposition est donc démontrée.

Conséquences.

2. Le théorème de M. Plücker, qui fait l'objet de la question 108 (tom. V, p. 112), n'est, *dans le cas général*, qu'une conséquence du théorème précédent, et même qu'une conséquence restreinte. On peut en effet énoncer *généralement* le théorème suivant :

THÉORÈME II. Soient deux quadrilatères ABCD, *abcd* inscrits dans la même conique.

Si les trois points $\overline{AB} \cdot \overline{ab}$, $\overline{BC} \cdot \overline{bc}$, $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$, sont sur une même droite XY. Généralement : 1° le point $\overline{AD} \cdot \overline{ad}$ sera sur la même droite XY ; 2° les quatre points

$$\overline{AB} \cdot \overline{cd},\ \overline{BC} \cdot \overline{ad},\ \overline{CD} \cdot \overline{ab},\ \overline{AD} \cdot \overline{bc},$$

seront sur une seconde droite xy.

Démonstration. Dans le cas ordinaire, les huit points sont sur une même conique ; donc, comme une conique ne peut être coupée en plus de deux points par une droite, et trois de ces points sont sur une même droite XY, la conique, lieu des huit points, sera remplacée par un système de deux droites XY, xy. Donc, déjà, les huit points seront répartis sur deux droites.

Or, 1° je dis que dans le cas général, $\overline{AD} \cdot \overline{ad}$ sera sur la droite XY, qui contient déjà les trois points $\overline{AB} \cdot \overline{ab}$, $\overline{BC} \cdot \overline{bc}$, $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$.

En effet, dans le cas général, aucun des trois points $\overline{AB} \cdot \overline{cd}$, $\overline{BC} \cdot \overline{ad}$, $\overline{CD} \cdot \overline{ab}$, ne se trouve sur XY ; car si, par exemple, $\overline{AB} \cdot \overline{cd}$ était sur XY, comme $\overline{BA} \cdot \overline{ba}$ s'y trouve déjà, il ne pourrait arriver que deux choses : 1° ou bien ab et cd rencontreraient la droite AB en deux points différents, et alors la droite AB serait la droite XY elle-même, ce qui est un cas très-particulier, et que l'on doit même rejeter, car alors la droite bc passerait par le point B, ce qui amènerait ou une absurdité, ou l'hypothèse que les deux quadrilatères auraient un sommet commun ; 2° ou bien ab et cd se rencontreraient au même point de AB, c'est-à-dire au point O, ce qui est encore un cas particulier.

Ainsi donc *généralement* les trois points $\overline{AB} \cdot \overline{cd}$, $\overline{BC} \cdot \overline{ad}$, $\overline{CD} \cdot \overline{ab}$ sont sur xy ; et je dis que $\overline{AD} \cdot \overline{ad}$ ne saurait être sur xy. Car, comme $\overline{BC} \cdot \overline{ad}$ est déjà sur cette droite, on retomberait dans les cas particuliers de tout à l'heure. De même $\overline{AD} \cdot \overline{bc}$ ne peut être sur XY. Donc enfin, *généralement*, etc...

Note. J'ai cherché à déduire directement des considérations précédentes, les modifications que peut subir le théorème dans les cas particuliers qui peuvent se présenter, je n'y ai pas réussi. Dans ce qui suit, je supposerai le théorème de M. Plücker, démontré pour tous les cas.

Généralisation du théorème de M. Plücker.

3. Théorème III. Soient deux polygones ABCD. . . . . KL, *abcd*. . . . . *kl* d'un nombre pair $2n$ de côtés, inscrits à la même conique ; les côtés homologues AB, ab.... donnent $2n$ points d'intersection ; si $2n - 1$ de ces points sont sur une même droite XY, le point restant sera sur la même droite.

Soit en effet le théorème vrai pour les polygones de quatre et de $2n$ côtés, je dis qu'il sera vrai aussi pour les polygones de $2(n+1)$ côtés.

Soient en effet ABCD....HKLMN, *abcd....hklmn*, deux polygones inscrits de $2n+2$ côtés; menons les diagonales AL, *al*. Par hypothèse les $2n+1$ points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$,... $\overline{HK}\cdot\overline{hk}$, $\overline{KL}\cdot\overline{kl}$; $\overline{LM}\cdot\overline{lm}$, $\overline{MN}\cdot\overline{mn}$ sont sur une droite XY; et il faut prouver que $\overline{AN}\cdot\overline{an}$ est aussi sur XY.

Or les diagonales AL, *al* décomposent chaque polygone total en un quadrilatère, et un polygone de $2n$ côtés inscrits l'un et l'autre.

Dans les deux polygones de $2n$ côtés ABCD......HKL, *abcd......hkl*, par hypothèse les $2n-1$ points $\overline{AB}\cdot\overline{ab}$, $\overline{BC}\cdot\overline{bc}$...... $\overline{HK}\cdot\overline{hk}$, $\overline{KL}\cdot\overline{kl}$ sont sur XY; donc $\overline{AL}\cdot\overline{al}$ est sur XY.

Dans les deux quadrilatères ALMN, *almn*, les deux points $\overline{LM}\cdot\overline{lm}$, $\overline{MN}\cdot\overline{mn}$ sont sur XY; mais $\overline{AL}\cdot\overline{al}$ est sur XY; donc le théorème étant vrai pour les quadrilatères, $\overline{AN}\cdot\overline{an}$ sera aussi sur XY.

Donc, le théorème étant vrai pour les quadrilatères, le sera pour les hexagones, les octogones, etc., c'est-à-dire ponr tous les polygones inscrits d'un nombre pair de côtés.

Corollaire I. Pour un système de deux polygones inscrits dans la même conique d'un nombre impair quelconque, $2n+1$, de côtés on aura un théorème analogue à celui du § 3, en prenant pour $\overline{2n+2}^{ième}$ côté, les tangentes et des sommets homologues. Ainsi, soient ABC....HKL, *abc....hkl* deux polygones inscrits de $2n+1$ côtés, désignons par TA et *ta* les tangentes aux points A et *a*; si les $2n+1$ points de concours des côtés homologues des deux polygones, sont sur une même droite XY, le point $\overline{TA}\cdot\overline{ta}$ sera sur XY; de même $\overline{TB}\cdot\overline{tb}$ sera sur XY, et ainsi de suite; on a donc ce théorème ·

Théorème : Soient deux polygones ABC....KL, *abc....kl* de $2n+1$ côtés inscrits à la même conique ; si les $2n+1$ points de concours des côtés homologues sont sur une même droite XY, les $2n+1$ points de concours des tangentes menées par les sommets homologues seront sur la même droite XY.

Corollaire II. Par la théorie des polygones polaires réciproques, on arrive à un théorème général pour les polygones circonscrits aux coniques, analogue au théorème généralisé de M. Plücker, et que j'énoncerai pour deux quadrilatères.

Théorème IV. Soient ABCD, *abcd* deux quadrilatères circonscrits à la même conique, si les trois droites Aa, Bb, Cc se coupent en un même point O, la droite Dd passera aussi par ce point.

Corollaire III. Le théorème généralisé de M. Plücker, énoncé sous une autre forme, donne un théorème qui n'est autre que celui de M. Finck. (Question 53), dans lequel on remplace le système des n droites concourantes, par une conique, théorème que voici :

Théorème V. Soient $2n-1$ points X_1, X_2....X_{2n-1} sur la même droite ; soient pris un nombre quelconque de points A_1, B_1, C_1.... sur une conique située dans le même plan que la droite ; en les joignant au point X_1, les droites résultantes coupent la conique en de nouveaux points A_2, B_2, C_2..., qui joints eux-mêmes au point X_2, donnent des droites qui déterminent sur la conique de nouveaux points A_3, B_3, C_3..., et ainsi de suite. Soient ainsi A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}... les points déterminés sur la conique par les droites joignant le point X_{2n-1} aux points A_{2n-1}, B_{2n-1}, C_{2n-1}.... ; les droites A_1A_{2n}, B_1B_{2n}, C_1C_{2n}.... concourront en un même point X_{2n}, situé sur la droite X_1X_{2n-1}.

Pour démontrer la proposition, il suffit de considérer les polygones de $2n$ côtés inscrits dans la même conique $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$, et $B_1B_2B_3 \ldots B_{2n-1}B_{2n}$.

Par hypothèse, les $2n-1$ points $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{B_1B_2}$, $\overline{A_2A_3} \cdot \overline{B_2B_3} \ldots \overline{A_{2n-1}A_{2n}} \cdot \overline{B_{2n-1}B_{2n}}$; ou ce qui revient au même, les points X_1, $X_2 \ldots X_{2n-1}$, sont sur une même droite, donc, d'après le théorème généralisé, le point restant $\overline{A_1A_{2n}} \cdot \overline{B_1B_{2n}}$, sera aussi sur la droite X_1X_{2n-1}; ou en d'autres termes, les droites A_1A_{2n}, B_1B_{2n} concourront en un même point de la droite $X_1 \ldots X_{2n-1}$. Il est d'ailleurs évident qu'il suffit de considérer le cas où l'on prend deux points A_1, B_1 sur la conique.

4. De la combinaison du théorème généralisé de M. Plücker, avec le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, se déduit une démonstration très-simple de la question 109, la question 110 se déduisant elle-même de cette dernière. Voici l'énoncé de cette question.

Théorème VI. Soit un polygone de $4m+2$ côtés inscrit à une conique; les côtés opposés donnent $2m+1$ points de rencontre; si $2m$ de ces points sont sur une même droite, le point restant sera aussi sur cette droite.

Ce théorème est comme on voit une généralisation de celui de Pascal.

Démonstration. Soit pris par exemple un polygone de dix côtés ABCDE $abcde$; les quatre points $\overline{AB} \cdot \overline{ab}$, $\overline{BC} \cdot \overline{bc}$, $\overline{CD} \cdot \overline{cd}$, $\overline{DE} \cdot \overline{de}$ sont sur une même droite XY; le point $\overline{Ea} \cdot \overline{Ae}$ sera aussi sur XY.

Menons les diagonales Ac, aC.

Nous décomposons ainsi le décagone en un hexagone ABCabc, et les deux quadrilatères opposés $Acde$, aCDE.

Par hypothèse $\overline{AB} \cdot \overline{ab}$, $\overline{BC} \cdot \overline{bc}$ sont deux points sur XY, donc le point $\overline{Ac} \cdot \overline{Ca}$ est aussi sur XY.

Considérons les deux quadrilatères, et appliquons le théorème de M. Plücker, les trois points $\overline{Ac}\cdot\overline{aC}$, $\overline{cd}\cdot\overline{CD}$, $\overline{de}\cdot\overline{DE}$ sont sur XY, donc $\overline{Ae}\cdot\overline{aE}$ est aussi sur XY.

Maintenant supposons qu'au lieu d'être des quadrilatères, les figures opposées aCDE, Acde soient des polygones d'un nombre pair quelconque de côtés aCDE....KL, Acde....kl, le théorème de M. Plücker servira pour ces polygones, c'est-à-dire que, puisque par hypothèse $\overline{CD}\cdot\overline{cd}$, $\overline{DE}\cdot\overline{de}$.... $\overline{KL}\cdot\overline{kl}$ sont sur la droite XY, que d'ailleurs $\overline{Ac}\cdot\overline{Ca}$ est aussi sur XY, le point $\overline{Al}\cdot\overline{aL}$ sera aussi sur XY. Mais alors le polygone ABC....KLabc....kl aura $4+4m-2=4m+2$ côtés. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. Par la théorie des polygones polaires réciproques, on déduira sans peine du théorème précédent la démonstration de la question 110, ou du théorème suivant.

Théorème VII. Soit un polygone de $4m+2$ côtés circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés forment $2m+1$ diagonales ; si $2m$ d'entre elles se coupent au même point, la diagonale restante passera aussi par le même point.

5. *Scholie.* Tous les théorèmes précédents sont applicables aux polygones inscrits ou circonscrits aux lignes cono-sphériques, ainsi que nous le verrons dans un prochain article sur la démonstration des questions 116 et 117, relatives à ces lignes.