

JULES CARON

Grand concours (année 1847)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 377-380

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__377_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GRAND CONCOURS (année 1847).

(Fig. 56). Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un deuxième triangle ABC, dont les sommets A, B, C, sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets du deuxième triangle on mène au cercle les tangentes Aa, Bb, Cc, qui rencontrent respectivement en a , b , c , les côtés opposés à ces sommets. On demande de prouver que ces trois points a , b , c , sont en ligne droite.

On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle inscrit, on prend une section conique tangente aux trois côtés du triangle.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. CARON (JULÉS),

Né le 14 novembre 1829, à Gien (Loiret), élève interne au collège royal Saint-Louis, classe de M. AMIOT.

Après avoir effectué les constructions indiquées par l'énoncé, nous allons chercher les polaires des points a , b et c ; si nous démontrons que ces polaires se coupent en un seul et même point, il sera démontré par là même que abc est une ligne droite.

a appartient à la tangente Aa, donc sa polaire passe au point de contact l ; d'un autre côté, a se trouve sur la droite BC; sa polaire passe donc par le pôle de BC. Soient m , n , T, U, les points de tangence de Bb, Cc, PR, QR; B est le pôle de mT , C est le pôle de nU , d'où le pôle de BC est en D, point d'intersection des deux lignes mT , nU , et la polaire de a est D l .

Les polaires de b et de c se déterminent par la même série de raisonnements et de constructions ; la polaire de b est Em , la polaire de c est Fn . Soit H le point d'intersection de Dl , Em , nous allons démontrer que Fn passe en H .

Ces trois droites sont trois transversales menées par les sommets du triangle DEF . Pour qu'elles se coupent en un même point, il faut et il suffit que, des six segments qu'elles interceptent sur les côtés du triangle, le produit de trois quelconques non consécutifs soit égal au produit des trois autres. Tout se réduit donc à vérifier la relation

$$(\alpha) Fl. En. Dm = El. Fm. Dn.$$

Nous savons que la perpendiculaire abaissée du pôle D sur la polaire BC passe par le centre ; elle est d'ailleurs perpendiculaire à PQ , qui est parallèle à BC ; donc elle passe par le point S de tangence de PQ .

Joignons de même ET , FU : ces trois lignes se coupent en un même point, qui est le centre O du cercle donné ; donc les segments qu'elles interceptent sur les côtés du triangle DEF satisfont à la relation de condition :

$$(1) FS. EU. DT = ES. DU. FT.$$

On a d'ailleurs, d'après les propriétés des sécantes dans le cercle :

$$FS. Fl = Fm. FT.$$

$$EU. En = El. ES.$$

$$DT. Dm = Dn. DU.$$

En multipliant membre à membre, il vient :

$$(2) FS. EU. DT. Fl. En. Dm = FT. ES. DU. Fm. El. Dn.$$

Si l'on tient compte de la relation (1), on retombe sur l'égalité (α) qu'il s'agissait de vérifier ; donc les trois polaires des points a , b , c , se coupent en un même point ; donc ces trois points sont en ligne droite.

Pour une conique quelconque, la ligne qui joint le pôle et le point de contact de la tangente parallèle à la polaire est le diamètre conjugué des cordes parallèles à la polaire; donc les droites DS, ET, FU, se coupent en un même point, qui est le centre de la conique (pour la parabole, le point d'intersection est à l'infini, et les droites sont parallèles); donc la relation (1) est satisfaite. En second lieu, d'après le théorème de Carnot, des 12 segments interceptés par une conique sur les côtés d'un triangle, le produit de six quelconques non consécutifs est égal au produit des six autres; donc la relation (2) est encore satisfaite; donc l'égalité (α), conséquence des relations (1) et (2), a également lieu, et le théorème s'étend à une conique quelconque.

(*) Ce théorème a également lieu toutes les fois que les points A, B, C, sont tellement choisis sur les côtés du triangle PQR, qu'en joignant PC, QB, RA, ces transversales concourent en un même point. Nous ne ferons qu'indiquer la démonstration.

Dans l'hypothèse ci-dessus énoncée, si l'on prolonge les côtés du triangle ABC jusqu'à leur intersection avec les côtés respectivement opposés du triangle PQR, les trois points d'intersection sont en ligne droite, et cette droite est précisément la polaire du point d'intersection des lignes DS, ET, FU. Donc ces lignes se coupent en un même point, et la relation (1) est satisfaite. La relation (2) est d'ailleurs aussi satisfaite. Par suite, l'égalité (α) est vérifiée, et le théorème est généralisé.

On voit maintenant pourquoi, dans l'hypothèse particulière où A, B, C, sont les points milieux des côtés du triangle PQR, les lignes DS, ET, FU, passent par le centre de la conique; car chaque côté de ABC étant parallèle au côté op-

(*) Ce qui suit a été ajouté par le lauréat.

posé de PQR, les points d'intersection, qui, à la limite, ne cessent pas d'être en ligne droite, se transportent à l'infini; le pôle de cette droite, située à l'infini, sera le centre de la conique; DS, ET, FU, doivent donc se couper au centre.