GEORGES RITT

Solution de la question 151

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 388-389

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__388_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 151 (p. 242).

PAR M. GEORGES RITT.

Supposons m', m'', m''' sur une ellipse; menons par les poins m', m'' des tangentes à cette courbe que nous supposons se couper en un point T; joignons le point m'' au point m''', et, par le point T, menons une sécante parallèle à la corde $m''m'''$; cela fait, si l'on joint le point m''' au premier point m', la ligne de jonction $m'''m'$ passe au milieu de la corde, interceptée sur la sécante partant du point T et parallèle à $m''m'''$. (Brassine.)

Prenant pour axes le diamètre parallèle à $m''m'$ et le diamètre passant par T, l'équation de la courbe sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

et la distance du centre au point T sera $\frac{b^2}{y'}$.

Les coordonnées étant pour $m'(-x'y')$, pour $m''(x'y')$, pour $m'''(x'', y'')$, l'équation de $m''m'''$ sera

$$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \text{ ou } y - y' = -\frac{b^2.x''+x'}{a^2.y''+y'}(x-x').$$

En vertu de l'équation de la courbe.

L'équation de la parallèle menée par T,

$$y - \frac{b^2}{y'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'' + x'}{y'' + y'}x. \tag{1}$$

Enfin l'équation de $m'm'''$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' + x'}(x + x') \text{ ou } y - y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'' - x'}{y'' + y'}(x + x'). \tag{2}$$

L'élimination directe entre (1) et (2) donne pour les coordonnées du point de rencontre

$$X = \frac{x'y'' + y'x''}{2y'},$$

$$Y = \frac{a^2y'y'' - b^2x'x'' + a^2b^2}{2a^2y'}.$$

Et l'on vérifie aisément que la relation

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\frac{y'' + y'}{2}\right)}{\left(\frac{x'' + x'}{2}\right)},$$

ou bien $\dfrac{a^2y'y'' - b^2x'x'' + a^2b^2}{a^2(x'y'' + y'x'')} = -\dfrac{b^2(x'' - x')}{a^2(y'' - y')}$,

est satisfaite; ce qui démontre le théorème.