

DE PERRODIL

**Démonstration de la formule de M. Brassine
relative au rayon de la sphère circonscrite**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 396-398

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_396_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION

De la formule de M. Brassine relative au rayon de la sphère circonscrite (p. 227).

PAR M. DE FERRODIL,

Élève de la Flèche.

—

Je prends trois axes rectangulaires se croisant à l'un des sommets S, et soient α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; les coordonnées des trois autres sommets A, B, C; a', b', c' étant les arêtes qui aboutissent au sommet S, nous aurons les quatre équations :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2; \\ (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 + (z - \gamma')^2 = R^2; \quad (x - \alpha'')^2 + (y - \beta'')^2 + (z - \gamma'')^2 = R^2.$$

Retranchant les trois dernières de la première, il vient :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{a^3}{2}$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \frac{b^3}{2}$$

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \frac{c^3}{2}$$

$$\text{d'où : } x = \frac{N}{2D}; \quad y = \frac{N'}{2D}; \quad z = \frac{N''}{2D}.$$

$$\begin{aligned} D &= \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \gamma\alpha'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' - \gamma\beta'\alpha'', \\ N &= \alpha^3(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + b^3(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + c^3(\beta\gamma'' - \gamma\beta''), \\ N' &= \alpha^3(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + b^3(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + c^3(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma''), \\ N'' &= \alpha^3(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + b^3(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + c^3(\alpha\beta'' - \beta\alpha''). \end{aligned}$$

La valeur de D représente six fois le volume du tétraèdre (*Géom. anal.* de M. Lefébure, p. 449). En substituant donc les valeurs de x, y et z dans la première des équations (1), on aura :

$$R = \frac{1}{12V} \sqrt{N^2 + N'^2 + N''^2}.$$

Si l'on remplace N, N', N'' par leurs valeurs, le résultat contiendra six sortes de termes; ceux qui multiplient a^4 , savoir :

$$(x^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2.$$

Ceux qui multiplient b^4 et c^4 , qui se déduisent des précédents, les premiers en changeant α', β', γ' en α, β, γ , et les seconds en changeant $\alpha'', \beta'', \gamma''$ en α, β, γ .

Ceux qui multiplient $2a^2b^2$, savoir :

$$(x'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')(x\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'') - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(x''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2).$$

Et les deux parties analogues qui multiplient $2a^2c^2$ et $2b^2c^2$, et qui, considérées avec la précédente, contiennent symétriquement les facteurs $(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') \dots, (x^2 + \beta^2 + \gamma^2) \dots$. Or ces facteurs s'expriment très-simplement en fonction des arêtes; en effet, on a évidemment :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 \quad \text{et} \quad 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = a^2 + b^2 - c^2.$$

Donc en multipliant les six parties précédentes par 4, et désignant le résultat par A, nous aurons $R = \frac{1}{24} \sqrt{A}$

$$\begin{aligned} \text{et } A = & [4b'^2c'^2 - (b'^2 + c'^2 + a'^2)^2]a'^4 + [4a'^2c'^2 - (a'^2 + c'^2 - b'^2)^2]b'^4 \\ & + [4a'^2b'^2 - (a'^2 + b'^2 - c'^2)^2]c'^4 \\ & + 2[(b'^2 + c'^2 - a'^2)(a'^2 + c'^2 - b'^2) - 2c'^2(a'^2 + b'^2 - c'^2)]a'^2b'^2 \\ & + 2[(b'^2 + c'^2 - a'^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2) - 2b'^2(a'^2 + c'^2 - b'^2)]a'^2c'^2 \\ & + 2[(a'^2 + c'^2 - b'^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2) - 2a'^2(b'^2 + c'^2 - a'^2)]b'^2c'^2. \end{aligned}$$

Développant et réduisant, on trouve, toutes réductions faites :

$$A = 2a^2a'^2 \cdot b^2b'^2 + 2a^2a'^2 \cdot c^2c'^2 + 2b^2b'^2 \cdot c^2c'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4,$$

ou

$$A = (aa' + bb' + cc')(aa' + bb' - cc')(aa' + cc' - bb')(bb' + cc' - aa').$$