

MENTION

Solution de la question 70

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 399-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__399_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 70 (t. II, p. 327).

PAR M. MENTION.

—

$$a^n + b^n = (a+b)^n - \frac{n}{1} ab (a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{n-4} - \dots$$

$$\dots + (-1)^p a^p b^p \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2p+1}{2} \dots \frac{n-p-1}{p} (a+b)^{n-2p},$$

n est entier et positif.

Cette formule est évidente pour les valeurs 1 et 2 de n .
 Supposons donc la proposition vraie pour une certaine valeur de n , et une valeur inférieure d'une unité; multipliant les deux membres de l'équation par $a + b$, le premier membre devient alors égal à $a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1})$. On tire de là

$a^{n+1} + b^{n+1}$, en mettant pour $a^{n-1} + b^{n-1}$ sa valeur, et le reste s'achève de soi-même.

Corollaire. Si dans cette formule, on fait :

$$a = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi; \quad b = \cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

on obtient cette formule connue :

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= 2^{n-1} (\cos \varphi)^n - n 2^{n-3} (\cos \varphi)^{n-2} + \dots \\ &\dots + (-1)^p \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2p+1}{2} \dots \frac{n-p-1}{p} 2^{n-2p-1} \cos \varphi^{n-2p}. \end{aligned}$$

(Voir t. V, p. 223, formule 43, et t. VI, p. 95.)

THÉORÈME.

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a - b} &= (a+b)^{n-1} - (n-2)ab(a+b)^{n-3} \\ &+ \frac{(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a+b)^{n-5} - \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a+b)^{n-7} \\ &+ (-1)^p \frac{n-2p \cdot n-2p+1 \cdot n-2p+2 \dots n-p-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p} a^p b^p (a+b)^{n-2p-1}. \end{aligned}$$

(n est entier et positif.)

La démonstration est identique à la précédente.

On peut aussi tirer de là des formules trigonométriques connues.