

LEBESGUE

## Sur la question 70e

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 427-431

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_427\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__427_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA QUESTION 70<sup>e</sup> (*Voy.* p. 399),

PAR M. LEBESGUE,

—

Si l'on veut trouver la somme des puissances  $m^{\text{èmes}}$  des racines  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  de l'équation

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \dots \pm ux \mp \nu = 0,$$

il faut, comme Waring l'a montré (*Meditationes algebraicæ*, p. 1, à la notation près), prendre pour  $S_m = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \dots$  une somme de termes compris dans la formule

$$M p^a q^b r^c \dots \nu^\sigma = (1 - )^{m-a+\pi} \frac{m \cdot a + 1 \dots a + \pi - 1}{1 \cdot 2 \dots b \times 1 \cdot 2 \dots c \times \dots} p^a q^b r^c \dots \pi \nu^\sigma \quad (A)$$

On doit supposer

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ a + 2b + 3c + 4d + \dots + n\nu = m \\ 2^\circ b + c + d + \dots + \nu = \pi \end{array} \right\} \quad (B)$$

$a, b, c, d \dots$  devant être positifs ou nuls.

*N. B.* Si  $\pi = 0, m = \alpha$ , le terme doit être réduit à  $p^m$ ;  $M = 1$ .

Si  $\pi = 1$ , le terme a pour coefficient  $M = (-1)^{m-a+1}$ .

Pour  $\pi > 1$ , on appliquera la formule (A), en ayant soin de donner à  $a, b, c \dots$  toutes les valeurs possibles qui satisfont aux équations (B).

La démonstration de Waring revient à montrer que si la

valeur de  $S_m$  est exacte pour les indices 1, 2, 3...  $k$  égal ou inférieur à  $n$ , elle l'est aussi pour un indice plus grand, en vertu de la formule

$$S_{k+1} = pS^k - qS_{k+1} - \dots$$

La vérification est facile.

Si on considère l'équation  $x^3 - px + q = 0$ , il faudra dans les formules de Waring poser  $r = s = \dots = 0$ ; alors, en supprimant les racines nulles, on trouvera

$$\begin{aligned} \alpha^m \beta^m + \dots = & p^m - \frac{m}{1} p^{m-2} q + \frac{m \cdot m - 3}{1 \cdot 2} p^{m-4} q^2 - \frac{m \cdot m - 5 \cdot m - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{m-6} q^3 \dots \\ & + \dots + \frac{m \cdot (m - 2p + 1) \dots (m - p - 1)}{1 \cdot 2 \dots p} p^{m-2p} (-q)^p. \end{aligned}$$

Dans cette formule, il faut avoir soin de prendre pour  $m - 2p$  zéro si  $m$  est pair, et 1 si  $m$  est impair, ce qui détermine  $p$ .

Si l'on change  $p$  en  $\alpha + \beta$  et  $q$  en  $\alpha\beta$ , puis  $\alpha, \beta, m$  en  $a, b, n$ , on aura la formule 70<sup>e</sup> des *Nouvelles Annales*, t. II, p. 327.

Pour l'équation  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ , on trouverait une formule analogue, mais susceptible d'une simplification; ainsi l'on aura pour un exposant impair  $n = 2\nu - 1$

$$\alpha^{2\nu-1} + \beta^{2\nu-1} + \gamma^{2\nu-1} = p^{2\nu-1} - Q_{2\nu-1}(pq - r).$$

Pour un exposant pair

$$\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu} = p^{2\nu} - Q_{2\nu}(pq - r) + 2(-q)^\nu.$$

Il s'agit de trouver la loi des fonctions entières  $Q$ .

On fera remarquer ici que  $p = \alpha + \beta + \gamma$ ,  $q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ ,  $r = \alpha\beta\gamma$  donnent  $pq - r = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)$ . Ainsi l'on aura

$$(\alpha + \beta + \gamma)^{2\nu-1} = \alpha^{2\nu-1} + \beta^{2\nu-1} + \gamma^{2\nu-1} + (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \cdot Q_{2\nu-1}.$$

On reconnaîtra que la fonction  $Q_{2\nu-1}$  est une fonction entière de  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2 \dots$ ; voici un moyen particulier de la trouver avec facilité.

Dans le développement de  $(x + y + z)^{2\nu-1}$ , les termes sont de trois espèces ; ils renferment 1, 2 ou 3 des lettres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et comme la somme des exposants est impaire  $= 2\nu-1$ , un seul exposant est impaire, ou les trois sont impaires, de sorte que l'on peut poser, en supposant  $2\nu-1 = n$  impaire :

$$(x + y + z)^n = xP + yQ + zR + xyzS,$$

P, Q, R, S étant des fonctions entières de  $x^2, y^2, z^2$ . D'après cela,

$$(-x + y + z)^n = -xP + yQ + zR - xyzS$$

$$(x - y + z)^n = xP - yQ + zR - xyzS$$

$$(x + y - z)^n = xP + yQ - zR - xyzS$$

d'où il suit que l'on a

$$(x + y + z)^n - (-x + y + z)^n - (x - y + z)^n - (x + y - z)^n = 4xyzS.$$

Si l'on pose

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 2\alpha \\ x - y + z = 2\beta \\ x + y - z = 2\gamma \end{array} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} z = \alpha + \beta; \quad x + y + z = 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ y = \alpha + \gamma \\ x = \beta + \gamma \end{array} \right.$$

il viendra

$$(\alpha + \beta + \gamma)^n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \cdot \frac{S_1}{2^{n-2}},$$

en représentant par  $S_1$  ce qui devient S quand on y fait  $z = \alpha + \beta, y = \alpha + \gamma, x = \beta + \gamma$ .

La fonction S est l'ensemble des termes de  $(x + y + z)^n$ , qui contiennent les trois lettres  $x, y, z$  avec des exposants impaires, en ayant soin de diviser cette somme par  $xyz$ . Si donc on a égard au coefficient du terme  $x^a y^b z^c$ , qui est égal à

$$\frac{1.2.3.\dots n-1.n}{1.2..a \times 1.2..b \times 1.2..c},$$

$a, b, c$  étant impaires, on trouvera très-aisément les formules suivantes :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \\(\alpha + \beta + \gamma)^5 &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + 5(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma] \\(\alpha + \beta + \gamma)^7 &= \alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7 + 7(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma]^2 + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)\end{aligned}$$

La dernière formule a été employée avec succès pour démontrer l'impossibilité de l'équation

$$x^7 + y^7 = z^7.$$

On est ramené à une équation biquadratique

$$t^2 = p^4 + Ap^3q^2 + Br^4,$$

dont l'impossibilité s'établit par une méthode très-élémentaire, dont je donnerai quelques exemples dans un autre article.

L'impossibilité des équations  $x^3 + y^3 = z^3$ ,  $x^5 + y^5 = z^5$  ne se présente pas aussi facilement; on est conduit aux équations

$$p^2 + 3q^2 = r^3 \text{ ou } 4r^3, \quad p^2 - 5q^2 = r^5 \text{ ou } 4r^5.$$

On sait les résoudre généralement, mais cela exige des recherches préliminaires assez étendues; les formules générales de solution conduisent ensuite assez facilement à la démonstration de l'impossibilité.

Il y a pour cela deux modes de démonstration. Le premier, dû à Fermat, conduit à faire voir qu'étant donnée une solution en nombres entiers  $a, b, c$ , on en déduirait une autre en nombres entiers  $a', b', c'$  plus petits, et ainsi de suite à l'infini, ce qui implique contradiction.

Le second, beaucoup plus simple, conduit à faire voir que de l'équation donnée, on en déduit une autre  $P = Q$ , qui est impossible, parce qu'en divisant les deux membres par un nombre convenablement choisi, on obtient nécessairement des restes différents. Cette méthode est celle de non-congruence ou non-équivalence, car on appelle nombres congrus ou équivalents pour un module (diviseur entier positif

déterminé, ceux qui, divisés par ce module, donnent des restes égaux.

Les méthodes employées pour démontrer l'impossibilité de l'équivalent  $x^n + y^n = z^n$  lorsque  $n = 3, 5, 7$  ne jettent que très-peu de jour sur le mode général de démonstration. Il reste à savoir si l'emploi des expressions imaginaires, formées avec des racines de l'unité et dites nombres complexes, dont l'étude est fort importante d'ailleurs, est bien de nature à faciliter la démonstration du théorème de Fermat, qui a un sens beaucoup plus restreint que celui qu'il aurait si  $x, y, z$  devenaient des nombres dits complexes ; le théorème pourrait même avoir lieu dans ce cas, celui de Fermat étant impossible.

*Note.* Le profond arithmologue de Bordeaux travaille à un traité méthodique et complet d'analyse indéterminée : celle du premier degré est achevée et prête à paraître. La méthode réunit la rigueur et la généralité que réclame la dignité de la science, à la clarté et à la simplicité qu'exige une exposition élémentaire. La doctrine des nombres s'est enrichie de beaucoup de théories nouvelles et postérieures à l'ouvrage de Legendre, qui laisse des lacunes que le traité de M. Lebesgue remplira, et dont nous jouirions bientôt si le savant professeur avait à sa disposition les sources et ressources qu'on rencontre difficilement hors de la capitale. Tm.

---