NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Seconde note sur cette question : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation admette un nombre donné de racines égales entre elles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 75-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__75_0>

SECONDE NOTE SUR CETTE QUESTION :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation admette un nombre donné de racines égales entre elles.

—

Si je reviens sur une question déjà traitée (tome Ier, page 90), ce n'est pas que sa difficulté mérite qu'on s'en occupe deux fois; certes, après avoir lu ce second article, on sera bien autorisé à croire qu'elle tient une trop grande place, même, dans un recueil destiné à des commençants : ce serait aussi mon avis, si tous ceux qui se sont proposé de la résoudre étaient demeurés d'accord sur sa solution; mais il n'en est pas ainsi.

Une des méthodes suivies pour parvenir aux conditions cherchées conduit à un résultat qui a semblé paradoxal; déjà on en avait donné une explication lorsque j'en ai cherché une autre (tome Ier, page 92) : pour rejeter la première, j'avais alors des raisons que je trouve encore bonnes aujourd'hui, quoique cette même explication ait été, depuis, reproduite dans plusieurs ouvrages justement estimés, et enseignée dans quelques colléges par des professeurs dont le mérite est incontestable.

On comprend sans doute que le motif, fondé ou non, qui m'a déterminé à remplacer ainsi une démonstration par une autre, ne consiste pas entièrement dans une préférence accordée à telle ou telle forme de raisonnements, à tel ou tel ordre d'idées, à un mode particulier d'exposition dont le choix n'admettrait pour arbitre que le bon goût. Ces deux démonstrations présentent une différence plus facilement saisissable : fondées toutes deux sur le même principe, elles s'écartent assez l'une de l'autre dans l'interprétation de ses conséquences pour aboutir finalement à des conclusions contradictoires. Des dissidences de cette nature, dans une science qui ne se prête guère à des controverses, révèlent la présence d'un paralogisme. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'examiner de quel côté il se trouve, en reprenant une question dont les proportions se sont momentanément agrandies de tous les égards que l'on doit à la logique.

J'énoncerai d'abord les principes adoptés d'un commun accord, de manière à éviter toute espèce d'équivoque ; puis, je parlerai des conséquences qu'ils ont dans l'opinion que je refute ; j'ajouterai ensuite quelques développements à ma première note sur les différentes manières de traiter la question proposée.

1. Lorsqu'une équation, $f(x)=0$, a un certain nombre, n, de racines égales entre elles, le premier membre $f(x)$ de cette équation et sa dérivée $f'(x)$ ont un commun diviseur d, du degré $(n-1)$, qui est une puissance exacte de ce degré.

Si l'équation n'admet pas d'autres racines égales, le diviseur commun d est le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$.

Réciproquement, lorsque le premier membre, $f(x)$, d'une équation $f(x)=0$, et sa dérivée $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, qui est une puissance exacte de ce degré, l'équation a n racines égales.

Si le diviseur commun d, du degré $(n-1)$, est le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$, l'équation ne peut admettre plus de n racines égales.

De là on peut, sans aucun doute, conclure que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation $f(x)=0$ admette un nombre donné n de racines égales, et pas davantage, s'obtiendront en exprimant rigoureusement que le premier nombre $f(x)$ de cette équation, et sa dérivée $f'(x)$, ont un commun diviseur d du degré $(n-1)$, qui est : 1° leur plus grand commun diviseur ; 2° une puissance exacte du degré $(n-1)$.

Alors, pour obtenir les conditions cherchées, on divise $f(x)$ par $f'(x)$, puis $f'(x)$ par le reste de la première division, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, au moyen de ces divisions successives, on soit parvenu à un reste r du degré $(n-2)$; le diviseur correspondant d sera du degré $(n-1)$. On égale à zéro les coefficients des différentes puissances de x dans le reste r, ce qui donne $(n-1)$ équations de conditions entre les coefficients de la proposée.

Ces $(n-1)$ équations expriment évidemment des conditions nécessaires pour que le plus grand commun diviseur de $f(x), f'(x)$ soit le polynôme d du degré $(n-1)$; mais elles ne donnent l'expression exacte des conditions suffisantes qu'autant que l'on satisfasse à ces $(n-1)$ équations de manière à ne pas annuler à la fois tous les coefficients du polynôme d qui précède r dans les divisions qu'on a faites; car il est évident que si tous les coefficients du polynôme d se réduisent à zéro, le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f'(x)$ sera d'un degré superieur à $(n-1)$.

Il reste encore a exprimer que le diviseur d est une puissance exacte du degré $(n-1)$. A cet égard, voici ce que j'admets. Lorsque les coefficients d'un polynôme du degre $(n-1)$ en x sont entièrement indépendants les uns des autres ; lorsqu'ils ne sont liés ensemble par aucune relation : pour exprimer que ce polynôme devient une puissance exacte du degré $(n-1)$, il faut établir entre ses coefficients $(n-2)$ relations distinctes.

II. J'arrive maintenant aux conséquences qu'on a voulu déduire de ces principes.

Après avoir supposé que le nombre n est plus grand que *deux*, et moindre que le degré de l'équation proposée, $f(x)=0$, on a dit :

Les $(n-1)$ équations de conditions obtenues en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$, exprimant uniquement que $f(x)$ et $f'(x)$ ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, conviennent également aux cas où l'équation proposée devrait avoir $(n-1)$ racines doubles ; ou $(n-3)$ racines doubles et une racine triple ; ou $(n-4)$ racines doubles et une racine quadruple ; ou, etc. : elles sont donc insuffisantes ; il faut encore exprimer que le diviseur d du degré $(n-1)$ est une puissance exacte de ce degré. On obtiendra *ainsi* $(n-2)$ *nouvelles* équations de conditions, de sorte qu'on en trouvera en tout $(n-1)+(n-2)$, ou $2n-3$.

Afin d'expliquer pourquoi on trouve ainsi $(2n-3)$ différentes équations de conditions, tandis que d'autres méthodes en donnent seulement $(n-1)$, on ajoute :

Puisque les $(n-1)$ équations de conditions obtenues, en égalant à zéro les coefficients du reste r du degré $(n-2)$, expriment uniquement que le reste précédent d du degré $(n-1)$ est commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$, rien n'indique que l'équation $d=0$, formée en égalant à zéro le commun diviseur, ait des racines égales entre elles. Chacune des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ de cette équation, $d=0$, entrera donc deux fois dans la proposee $f(x)=0$. On voit alors que cette dernière équation revient à

$$(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_{n-1})^2.\mathrm{X}=0.$$

Or, si l'on pose $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}$ (au moyen des $(n-2)$ équations qui expriment que d devient une puissance exacte), $f(x)$ deviendra $(x-\alpha_1)^{2n-2}\mathrm{X}$, et on a ainsi exprimé que la proposée a, non pas n, mais $(2n-2)$ racines égales : ce qui exige effectivement $(2n-3)$ équations de conditions, comme on le sait d'ailleurs.

C'est là une explication que je ne puis admettre : on verra bientôt pourquoi

Je suppose, par exemple, que l'équation proposée soit du vingtième degré, et qu'on veuille trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle ait 19 racines égales entre elles. Dans ce cas, $n=19$; le reste r est du $17^{ième}$ degré, le diviseur d du $18^{ième}$, et $2n-3=35$.

Suivant l'explication dont il s'agit, on trouvera 35 conditions différentes entre les coefficients de l'équation (qui sont seulement au nombre de 20) ; puisque, en exprimant que d est une puissance exacte du $18^{ième}$ degré, on obtient 17 conditions *nouvelles*, après en avoir déjà obtenu 18 pour exprimer que $r=0$. Et, afin de rendre compte de ce résultat, on devra dire : les 18 relations qui donnent $r=0$, n'indiquant *en rien* que l'équation $d=0$ ait des racines égales, chacune des 18 racines α_1, α_2, etc., de $d=0$, entre deux fois dans l'équation proposée (dont le degré est 20), qui, alors, devient, etc., etc.

Mais je ne veux pas, en insistant sur des résultats semblables, faire perdre à la question son côté sérieux. Il est trop évident qu'on ne peut établir, *comme règle générale*, que la méthode suivie pour parvenir aux conditions cherchées donnera $(2n-3)$ conditions différentes, et $(2n-2)$ racines égales, puisque le nombre $(2n-2)$ peut être supérieur au degré de l'équation proposée. J'admettrai donc qu'on ait seulement voulu parler du cas particulier où $(2n-2)$ ne surpasse pas le degré de l'équation ; je supposerai que cette restriction soit implicitement comprise dans le raisonnement qui a conduit aux valeurs $(2n-3)$, $(2n-2)$; mais au moins, cette fois, les conclusions du raisonnement seront-elles confirmées par l'exemple? Il n'en est encore rien. En effet, prenons pour exemple l'équation du quatrième degré :

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

et supposons $n=3$, il en résultera $2n-2=4$.

Pour parvenir aux conditions cherchées, on divisera d'abord le premier membre de l'équation par sa dérivée, puis la dérivée par le reste obtenu.

La première de ces divisions conduit au reste

$$(8B-3A^2)x^2+(12C-2AB)x+16D-AC,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$px^2+qx+r,$$

en posant :

$$8B-3A^2=p, \quad 12C-2AB=q, \quad 16D-AC=r.$$

Le reste de la seconde est :

$$(2Bp^2-4pr-3Apq+4q^2)x+Cp^2-3Apr+4qr.$$

Ce dernier doit être nul, indépendamment de toute valeur attribuée à x; il faut d'ailleurs que le reste précédent soit un carré exact; on a donc :

$$2Bp^2-4pr-3Apq+4q^2=0\ldots\ldots (1)$$
$$Cp^2-3Apr+4qr=0\ldots\ldots (2)$$
$$q^2-4pr=0\ldots\ldots (3)$$

Les équations (1)....(3) sont bien ces $(2n-3)$ équations dont on a dit : « Elles expriment que la proposée a non pas n, mais $(2n-2)$ racines égales. » Si on a eu raison de le dire, les équations (1)....(3) doivent exprimer que la proposée $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ a non pas *trois*, mais *quatre* racines égales entre elles. Alors il faut que les valeurs qui satisfont aux conditions (1)....(3) réduisent à zéro les coefficients p, q, r, du diviseur px^2+qx+r, car autrement la proposée ne pourrait avoir quatre racines égales. Or il existe au contraire une infinité de manières différentes de satisfaire aux trois conditions, sans annuler les coefficients p, q, r, comme il est facile de s'en assurer. Par exemple, posons :

$$p=-27, q=-54, r=-27, A=1, B=-3, C=-5, D=-2,$$

les premiers membres des relations (1)....(3) se réduisent identiquement à zéro, et la proposée, en prenant la forme $(x+1)^3(x-2)=0$, devient une équation qui a non pas *quatre* mais *trois* racines égales.

Voilà déjà un résultat directement contraire aux conclusions du raisonnement : ce ne sera pas le seul qui viendra contredire une argumentation formée d'idées mises à la suite les unes des autres sans liaison réelle. Nous en donnerons la preuve, après avoir préalablement établi un fait que le calcul rend incontestable.

Les équations (1), (2) obtenues en égalant à zéro les deux coefficients du reste du premier degré, conduisent à celles-ci :

$$\left.\begin{array}{c} p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0 \\ (q^2-4pr)(2q-Ap)=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha)\ (*)$$

(*) En effet, les relations $8B-3A^2=p$, $12C-2AB=q$ (page 80), donnent :

$$B=\frac{p+3A^2}{8},\quad C=\frac{pA+3A^3+4q}{48}.$$

Reportez ces valeurs de B et C dans les équations (1), (2); elles deviendront d'abord :

$$p^3+3A^2p^2-16pr-12Apq+16q^2=0\ldots\ldots (4),$$
$$Ap^3+3A^3p^2+4qp^2-144Apr+192.qr=0\ldots\ldots (5).$$

Multipliez l'équation (4) par $Ap+4q$, l'équation (5) par p; puis, retranchez le second produit du premier, et il viendra, toute réduction faite :

$$(q^2-4pr)(2q-Ap)=0.$$

Or ces dernières se partagent évidemment en deux systèmes qui sont :

$$\left.\begin{array}{c} p^3 + 3A^2p^2 - 16pr - 12Apq + 16q^2 = 0 \\ q^2 - 4pr = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (\delta)$$

$$\left.\begin{array}{c} p^3 + 3A^2p^2 - 16pr - 12Apq + 16q^2 = 0 \\ 2q - Ap = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (\gamma)$$

Les deux équations du premier, (δ), sont les équations de conditions cherchées. Car toute solution du système (δ), satisfaisant aux conditions (1) et (2), annule le reste du premier degré ; et par suite, donne au premier membre de la proposée et à sa dérivée, un commun diviseur $px^2 + qx + r$, qui est du second degré (*). De plus, ce diviseur commun est un carré.

Réciproquement, pour que la proposée et sa dérivée aient un commun diviseur qui soit un carré, il faut satisfaire aux deux équations (δ). En effet, il est d'abord évident qu'on ne peut obtenir un diviseur commun du second degré, qu'en satisfaisant à l'un ou à l'autre des systèmes (δ), (γ). Or aucune solution du second (γ) ne donne un carré pour diviseur commun, car en ajoutant aux deux équations de ce dernier système, la condition $q^2 - 4pr = 0$, on a trois équations qui donnent $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Dans ce cas, le diviseur commun est la dérivée elle-même, et l'équation proposée a ses quatre racines égales.

D'où il faut conclure que les deux équations (δ) expriment les conditions suffisantes et nécessaires pour que l'équation proposée ait trois racines égales. Toute solution de ce premier système qui n'annule pas le coefficient p, donne à l'équation proposée la forme $(x - \alpha_1)^3 (x - \alpha_2) = 0$.

(*) Il est sous-entendu qu'il faut satisfaire aux équations (δ), sans annuler le coefficient p ; sans quoi le diviseur commun ne serait pas du second degré. Quand nous parlerons d'un commun diviseur, il s'agira du plus grand de tous.

Les solutions du second système, (γ), conviennent au cas particulier où l'équation doit avoir deux racines doubles; elles font prendre à cette équation la forme

$$(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2=0.$$

Si aux deux équations (γ) on ajoute la condition $q^2-4pr=0$, on a trois équations qui se réduisent à $p=0$, $q=0$, $r=0$; et alors, la proposée devient $(x-\alpha_1)^4=0$.

On le voit, la méthode du plus grand commun diviseur conduit aux mêmes résultats que toutes les autres : elle donne deux conditions quand l'équation du quatrième degré doit avoir trois racines égales; et trois conditions, si l'on veut que l'équation ait ses quatre racines égales entre elles.

Actuellement examinons comment on a été amené à conclure que cette méthode donne : pour exprimer qu'une équation du quatrième degré a trois racines égales, des conditions qui expriment qu'elle en a quatre.

Le raisonnement qu'on a fait se subdivise en deux parties. L'objet de la première est d'établir que, dans le cas particulier dont il s'agit, le nombre des conditions trouvées est réellement *trois*. La seconde a pour but de prouver qu'en vertu de ces trois conditions différentes, l'équation a nécessairement ses quatre racines égales entre elles.

Je suivrai le même ordre dans ma réfutation, et afin de la rendre plus précise je rappellerai les termes mêmes du raisonnement, en les appliquant à l'équation considérée.

« *Les équations de condition* (1) *et* (2), *obtenues en égalant* » *à zéro le reste du premier degré, exprimant uniquement que* » f(x), f'(x) *ont un commun diviseur du second degré, con-* » *viennent également au cas où l'équation proposée devrait* » *avoir deux racines doubles : elles sont donc insuffisantes.* » *Il faut encore exprimer que le diviseur du second degré* » px^2+qx+r *est un carré. On obtient ainsi une nouvelle*

» *équation, de sorte qu'on en trouvera* 2 + 1, *ou* trois, *ce*
» *qui, etc.* »

Les équations (1) et (2) conviennent également, comme on vient de le dire, aux cas où la proposée doit avoir trois racines égales, ou deux racines doubles : si elles renferment toutes les solutions de ces deux questions différentes, c'est un motif pour supposer qu'elles se partagent en deux systèmes correspondants aux deux cas mentionnés. Il convenait au moins d'examiner si ce partage est théoriquement impossible, avant d'affirmer qu'on trouvera trois conditions différentes : à cet égard, on n'a rien démontré.

C'est surtout lorsqu'il s'agit, ensuite, d'expliquer pourquoi on a ainsi trouvé trois équations, tandis que d'autres méthodes en donnent seulement deux, que le raisonnement me semble s'égarer.

« *Puisque les équations* (1), (2), *obtenues en égalant à zéro*
» *le reste du premier degré, expriment uniquement que le reste*
» *précédent est commun diviseur de* $f(x)$ *et* $f'(x)$, *rien n'indique*
» *que l'équation* $px^2 + qx + r = 0$, *formée en égalant à zéro*
» *le commun diviseur, ait des racines égales. Chacune des*
» *racines* α_1, α_2 *de cette équation, entrera donc deux fois dans*
» *la proposée. On voit alors que cette dernière équation revient*
» *à* $(x-\alpha_1)^2\ (x-\alpha_2)^2 = 0$. *Si l'on pose ensuite* $\alpha_1 = \alpha_2$ (*ou*
» $q^2 - 4pr = 0$), *elle devient* $(x-\alpha_1)^4 = 0$, *etc.* »

Mais si les relations (1), (2) n'indiquent en rien que les racines de l'équation $px^2 + qx + r = 0$, sont égales, elles n'indiquent pas davantage que ces racines sont différentes l'une de l'autre, puisque les relations conviennent également aux deux cas. Cette seconde partie du raisonnement est en contradiction avec la première. Les conditions (1), (2) paraissent d'abord insuffisantes, parce qu'elles expriment que l'équation proposée prend l'une ou l'autre de ces deux formes : $(x-\alpha_1)^3\ (x-\alpha_2) = 0$, $(x-\alpha_1)^2\ (x-\alpha_2)^2 = 0$; et peu après, on les trouve suffisantes pour que l'équation devienne $(x-\alpha_1)^2 (x-\alpha_2)^2=0$; et par suite $(x-\alpha_1)^4=0$, lorsqu'on aura posé $\alpha_1=\alpha_2$, ou $q^2-4pr=0$.

S'il est vrai que les relations (1)......(3) expriment que l'équation proposée a ses quatre racines égales entre elles, il en faut conclure qu'il est absolument impossible qu'une équation du quatrième degré ait trois racines égales. Quelle autre conclusion, en effet, pourrait-on tirer des deux affirmations suivantes : 1° Pour que l'équation ait trois racines égales, il faut que ses coefficients satisfassent aux conditions (1).....(3) ; 2° Les relations (1).....(3) expriment que l'équation a, non pas trois, mais quatre racines égales.

En affirmant que l'équation proposée devient $(x-\alpha_1)^4=0$, on a confondu les équations (1).....(3), avec un des deux systèmes en lesquels elles se partagent : c'est prendre le tout pour la partie. G.

(*La fin prochainement*).