NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions d'examen sur les constructions géométriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 144-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__144_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES (*).

Il ne s'agit que de constructions avec la règle et le compas, dites *géométriques*.

I. *Lemme*. On sait construire les valeurs de x dans les équations $x = \frac{M}{N}$, $x^2 = \frac{P}{Q}$, M et P étant des monômes de degré n, N et Q des monômes de degré $n - 1$ et $n - 2$.

II. Problème. *Construire la valeur de x dans l'équation $x = \frac{M}{N}$, M étant un* polynôme *rationnel de degré n, et N un polynôme rationnel de degré $n - 1$.*

Solution. Prenons deux monômes quelconques A et B, l'un de degré $n - 1$ et l'autre de degré $n - 2$, et considérons A et B comme facteurs communs à tous les termes des polynômes M et N; on a $M = AM_1$ et $N = BN_1$, d'où $x = \frac{AM_1}{BN_1}$. Mais A et B, monômes du premier degré, peu-

(*) M. J. Bertrand examinateur.

vent être réduits à un seul terme; donc AM_1 et BN_1 devenant des monômes, on revient au cas du lemme.

III. Problème. *Construire la valeur de x dans l'équation $x^2 = \frac{M}{N}$; M étant un polynôme rationnel de degré n, et N un polynôme rationnel de degré $n-2$.*

Solution. Prenant deux monômes quelconques A et B de degré $n-1$ et $n-3$, et opérant comme au précédent problème, on a $x^2 = \frac{AM_1}{BN_1}$; le numérateur et le dénominateur étant des monômes, on retrouve le lemme.

Observation. Il est presque inutile d'ajouter qu'on doit et qu'on peut former A et B avec les lignes qui se trouvent déjà dans les polynômes.

IV. Problème. *Construire la valeur de x dans l'équation $x^{2n} = M$; M étant un polynôme rationnel de degré $2n$.*

Solution. On réduit d'abord le polynôme à un monôme par ce qui précède. Supposons donc que M soit un monôme de degré $2n$: deux facteurs peuvent être réduits à un carré; donc tout le monôme peut être converti en un produit de n carrés. Extrayant de part et d'autre la racine carrée, on obtient $x^n = M_1$, où M_1 est de degré n; si n est pair, on est amené à une équation de degré $\frac{n}{2}$; et ainsi de suite. Donc, si n est une puissance de 2, la valeur de x est constructible géométriquement; et, en tout cas, on peut parvenir à une équation de degré impair, mais qu'on ne sait pas construire.

Observation. Il est bien entendu que M n'est ni négatif, ni une puissance parfaite d'ordre $2n$.

V. Probleme. *Construire $x = a\sqrt[p]{m}$; a est une ligne, p un nombre entier positif et m un nombre.*

Solution. On a $x^p = ma^p$; faisant $ma = b$, on a $x^p = ba^{p-1}$, expression qu'on saura construire si p est une puissance de 2.

VI. Problème. *Construire*

$$x = \frac{a\sqrt[p]{m} + a_1\sqrt[p_1]{m_1} + a_2\sqrt[p_2]{m_2} + \ldots}{\sqrt[q]{n} + \sqrt[q_1]{n_1} + \ldots}.$$

a, a_1, a_2,... sont des lignes, p, p_1, p_2,..., q, q_1, q_2,... sont des puissances de 2, et m, m_1, m_2,... des nombres positifs.

Solution. Multipliant haut et bas par une ligne quelconque b, on obtient

$$x = \frac{\sqrt[p]{ma^p b^p} + \sqrt[p_1]{m_1 a_1^{p_1} b^{p_1}} + \ldots}{\sqrt[q]{nb^q} + \sqrt[q_1]{n_1 b^{q_1}} + \ldots}.$$

Chaque monône du numérateur se ramène à un carré, et chaque monôme du dénominateur à une ligne; donc on sait construire x.

Exemple. Partager la longueur a en deux segments qui soient entre eux comme $\sqrt[8]{3} : \sqrt[16]{7}$; les deux segments sont $\dfrac{a\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{3} + \sqrt[16]{7}}$ et $\dfrac{a\sqrt[16]{7}}{\sqrt[8]{3} + \sqrt[16]{7}}$.

Le premier segment est égal à

$$\frac{\sqrt[8]{3a^{16}}}{\sqrt[8]{3a^8} + \sqrt[16]{7a^{16}}} = \frac{\sqrt[8]{ba^{15}}}{\sqrt[8]{ba^7} + \sqrt[16]{b_1 a^{15}}},$$

ou

$$b = 3a, \quad b_1 = 7a.$$

On sait construire chacun de ces monômes; de même pour le second segment.

VII. Problème. *Construire* $x = a\mathrm{P}$; *a est une ligne et* P *une fonction trigonométrique rapportée aux angles* α, β, γ, *etc.*

Solution. L'angle α étant donné, on prend sur un des côtés de cet angle, à partir du sommet A, une longueur arbitraire AB; du point B on abaisse BC perpendiculaire sur l'autre côté; on remplace $\sin\alpha$ par $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$, $\cos\alpha$ par $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$, $\tang\alpha$ par $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$, etc.; de même pour les angles β, γ, etc., et $a\mathrm{P}$ ne renfermant que des lignes connues, on est ramené aux problèmes précédents.

VIII. L'élégance dans les constructions consiste à faire le moins d'opérations possible et à ne se servir que des données de la figure.

Exemple. Partager une longueur AB en deux segments qui soient entre eux comme $\sin\alpha$ est à $\sin\beta$; les deux segments sont $\frac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$, $\frac{\mathrm{AB}\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$. Au point A on fait un angle égal à α, au point B un angle égal à β, on forme un triangle; la bissectrice de l'angle opposé à AB partage AB dans le rapport indiqué. Il est évident qu'on ne saurait donner des règles pour obtenir des constructions élégantes; cela dépend entièrement de la sagacité de l'opérateur.