

ALPHONSE DE POLIGNAC

Note sur une propriété des nombres cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__215_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES CUBIQUES

(Voir t. V, p. 640);

PAR M. ALPHONSE DE POLIGNAC,

Élève de l'Institution Sainte-Barbe.

1. *Théorème.* La différence des cubes de deux nombres consécutifs est égale à la somme de quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. On a les deux identités

$$(2n + 1)^3 - (2n)^3 = (3n + 1)^2 + 3n^2,$$

$$(2n)^3 - (2n - 1)^3 = (3n - 1)^2 + 3n^2.$$

2. *Lemme.* Le produit de deux facteurs quadratiques,

$$x^2 + my^2, \quad t^2 + mu^2,$$

est de la même forme quadratique.

Démonstration.

$$x^2 + my^2 = (x + y\sqrt{-m})(x - y\sqrt{-m}),$$

$$t^2 + mu^2 = (t + u\sqrt{-m})(t - u\sqrt{-m}),$$

$$(x + y\sqrt{-m})(t + u\sqrt{-m}) = tx - muy + \sqrt{-m}(ux + ty),$$

$$(x - y\sqrt{-m})(t - u\sqrt{-m}) = tx - muy - \sqrt{-m}(ux + ty);$$

donc

$$(x^2 + my^2)(t^2 + mu^2) = (tx - muy)^2 + m(ux + ty)^2.$$

C. Q. F. D.

3. *Théorème.* Lorsque tous les facteurs d'un produit sont les différences des cubes de deux nombres consécutifs, le produit est égal à quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.