ALPHONSE DE POLIGNAC

Note sur une propriété des nombres cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__215_0>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES CUBIQUES

(Voir t. V, p 640) ;

PAR M. ALPHONSE DE POLIGNAC,
Élève de l'Institution Sainte-Barbe.

1. *Théorème.* La différence des cubes de deux nombres consécutifs est égale à la somme de quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. On a les deux identités

$$(2n+1)^3 - (2n)^3 = (3n+1)^2 + 3n^2,$$
$$(2n)^3 - (2n-1)^3 = (3n-1)^2 + 3n^2.$$

2. *Lemme.* Le produit de deux facteurs quadratiques,

$$x^2 + my^2, \quad t^2 + mu^2,$$

est de la même forme quadratique.

Démonstration.

$$x^2 + my^2 = \left(x + y\sqrt{-m}\right)\left(x - y\sqrt{-m}\right),$$
$$t^2 + mu^2 = \left(t + u\sqrt{-m}\right)\left(t - u\sqrt{-m}\right),$$
$$\left(x + y\sqrt{-m}\right)\left(t + u\sqrt{-m}\right) = tx - muy + \sqrt{-m}\,(ux + ty),$$
$$\left(x - y\sqrt{-m}\right)\left(t - u\sqrt{-m}\right) = tx - muy - \sqrt{-m}\,(ux + ty);$$

donc

$$(x^2 + my^2)(t^2 + mu^2) = (tx - muy)^2 + m\,(ux + ty)^2.$$

C. Q. F. D.

3. *Théorème.* Lorsque tous les facteurs d'un produit sont les différences des cubes de deux nombres consécutifs, le produit est égal à quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.