NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES HAREL

Théorème sur les coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 234-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__234_1>

THÉORÈME SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES

(Voir p. 214);

PAR M. JULES HAREL,
Élève du lycée de Rouen.

THÉORÈME. *Le lieu décrit par le sommet d'un angle droit circonscrit à deux coniques homofocales, est un cercle.*

Démonstration. Conservons même notation que pour le problème 201 (*voir* page 206); les tangentes étant perpendiculaire l'une sur l'autre, on a, pour leurs équations,

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{A^2}{m^2} + B^2};$$

l'élimination de m, entre ces deux équations, donnera l'équation du lieu si l'on exprime que les deux ellipses sont homofocales.

Or, avec ces deux équations, on obtient

$$y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2,$$

$$m^2 y^2 + 2mxy + x^2 = A^2 + B^2 m^2.$$

Ajoutons membre à membre, il vient

$$y^2(m^2 + 1) + x^2(m^2 + 1) = A^2 + b^2 + m^2(a^2 + B^2),$$

et,

$$A^2 + b^2 = a^2 + B^2.$$

Donc l'équation ci-dessus peut être remplacée par

$$(y^2 + x^2)(m^2 + 1) = (A^2 + b^2)(m^2 + 1),$$

d'où

$$y^2 + x^2 = A^2 + b^2;$$

équation d'un cercle dont le rayon est $\sqrt{A^2 + b^2}$.

La propriété démontrée pour deux ellipses homofocales est également vraie pour deux hyperboles qui se trouvent dans le même cas. Il suffit de remarquer que les calculs sont absolument les mêmes en changeant b^2 en $-b^2$ et B^2 en $-B^2$, et le lieu du point de rencontre des tangentes est un cercle de rayon $\sqrt{A^2 - b^2}$.

On voit, en outre, que si les deux ellipses ou les deux hyperboles se confondent, la propriété n'en subsiste pas moins; et on retrouve alors les propriétés connues.

Dans le cas de deux paraboles homofocales, on trouve que le lieu est une droite perpendiculaire à l'axe commun. On pouvait prévoir ce résultat; car la parabole pouvant être considérée comme cas limite de l'ellipse, et pour deux ellipses homofocales le lieu du point d'intersection étant un cercle, dans les deux paraboles homofocales le centre sera situé à l'infini, c'est-à-dire le lieu se réduira à une droite.