Théorèmes de la géométrie de situation, d'après M. Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 415-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__415_2>

THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION,

D'APRÈS M. CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, t. XXXI, p. 213, 1846; en français.)

1. Soient n points dans l'espace désignés par les chiffres $1, 2, 3, \ldots, n$; en les joignant deux à deux, on obtient N_2 droites; prenant ces points trois à trois, on obtient N_3 plans. Menons un plan sécant, il coupera

les N_2 droites en N_2 points désignés par la droite sur laquelle il se trouve, par exemple, les points 12, 13, 23, etc., et il coupera les N_3 plans en N_3 droites désignées chacune par le plan sur lequel se trouvent, par exemple, les droites 123, 124, 234, etc. Il est évident que les trois points pq, qr, rp sont sur la même droite pqr; on a donc :

THÉORÈME I. *On peut former un système de* N_2 *points situés trois à trois sur* N_3 *droites.*

2. Soit $n = 5$, on a $N_2 = 10$, $N_3 = 10$. Les cinq points 12, 23, 34, 45, 51 forment un pentagone, représentons-le par A; il a pour côtés, 123, 234, 345, 451, 512. Les cinq autres points 13, 35, 52, 24, 41 forment un second pentagone B, ayant pour côtés 135, 352, 524, 241, 413. Chacun des cinq côtés du polygone B passe par un sommet du polygone A; ainsi le côté 135 passe par le point 51, le côté 352 par le point 23, et ainsi de suite; donc le pentagone B est circonscrit au pentagone A, et *vice versâ,* le pentagone A est circonscrit au pentagone B; donc :

THÉORÈME II. *La figure composée de dix points, trois à trois sur dix droites, peut être considérée (même de six manières différentes) sous la forme de deux pentagones, inscrits et circonscrits l'un à l'autre.*

3. Soient $n=7$, $N_2=21$, $N_3=35$; on obtient les trois heptagones (12345671); (13572461); (15263741); c'est-à-dire formés par les sept points 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71, etc.; le premier est circonscrit au deuxième, le deuxième au troisième et le troisième au premier; et cette décomposition en trois heptagones peut se faire de cent vingt manières différentes. On a le théorème général suivant :

4. THÉORÈME III. *n étant un nombre premier, le système de* N_2 *points situés sur* N_3 *droites peut être consi-*

déré comme composé de $\frac{n-1}{2}$ *polygones de* n *sommets chacun, le premier circonscrit au deuxième, le deuxième au troisième, etc., et le dernier au premier, et cette décomposition peut se faire de* $\frac{1.2\ldots(n-2)}{n-1}$ *manières.*

On voit que ce théorème se rattache à la théorie des polygones étoilés.

Observation. Lorsque n n'est pas un nombre premier, il existe aussi des théorèmes, mais sans élégance.