Nouvelles annales de mathématiques

Transformation remarquable d'une fonction du quatrième degré ; d'après MM. Eisenstein et Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 417-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__417_1>

TRANSFORMATION REMARQUABLE D'UNE FONCTION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS MM. EISENSTEIN ET CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 54; 1845.)

THÉORÈME. *Soit*

$$u = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde \\ - 2bgcf - 2bgde - 2cdef + 4adfg + 4bceh;$$

faisons

$$(1) \quad A = \frac{1}{2}\frac{du}{da}, \quad B = \frac{1}{2}\frac{du}{db}, \quad C = \frac{1}{2}\frac{du}{dc}, \ldots, \quad H = \frac{1}{2}\frac{du}{dh}.$$

Représentons par U *ce que devient* u *en remplaçant* a, b, c,..., h *par* A, B, C,..., H; *on a* $U = u^3$.

Démonstration. Faisons

$$a' = v_1 a + v'_1 e,\ b' = v_1 b + v'_1 f,\ c' = v_1 c + v'_1 g,\ d' = v_1 d + v'_1 h,$$
$$e' = v_2 a + v'_2 e,\ f' = v_2 b + v'_2 f,\ g' = v_2 c + v'_2 g,\ h' = v_2 d + v'_2 h.$$

Représentons par u' ce que devient u en y mettant d'abord a', b', c',..., h' au lieu de a, b, c,..., h; et, ensuite, pour a', b', c', ..., h' les valeurs données ci-dessus; il vient

$$u' = (v_1 v'_2 - v_2 v'_1)^2 u.$$

Faisons

$$v_1 = v'_2 = ah - bg - cf - de, \quad v'_1 = -2(ad - bc),$$
$$v_2 = -2(eh - fg);$$

on aura

$$v_1 v'_2 - v_2 v'_1 = u, \quad \text{d'où} \quad u' = u^3.$$

Or, d'après les valeurs (1), on a

$$a' = \mathrm{H}, \quad b' = -\mathrm{G}, \quad c' = -\mathrm{F}, \quad d' = \mathrm{E},$$
$$h' = \mathrm{A}, \quad g' = -\mathrm{B}, \quad f' = -\mathrm{C}, \quad e' = \mathrm{D};$$

donc

$$\mathrm{U} = u^3.$$

Remarque. M. Eisenstein avait donné sans démonstration la formule suivante

$$(a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd)^3$$
$$= \mathrm{A}^2\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 + 4\mathrm{AC}^3 + 4\mathrm{DB}^3 - 6\mathrm{ABCD};$$

A, B, C, D ayant les valeurs (1). (Crelle, tome XXVII. page 105; 1844.)

M. Cayley a démontré cette formule et l'a même considérablement généralisée, de cette manière :

Imaginons la fonction u

$$ax_1y_1z_1 + bx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_1 + dx_1y_2z_2$$
$$+ ex_2y_1z_1 + fx_2y_1z_2 + gx_2y_2z_1 + hx_2y_2z_2.$$

Posons

$$x_1 = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2, \quad y_1 = \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2, \quad z_1 = \nu_1 z'_1 + \nu_2 z'_2,$$
$$x_2 = \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2, \quad y_2 = \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2, \quad z_2 = \nu'_1 z'_1 + \nu'_2 z'_2.$$

Faisant les substitutions, on obtient une fonction de la forme

$$a'x'_1y'_1z'_1 + b'x'_1y'_1z'_2 + \ldots + h'x'_2y'_2z'_2.$$

Remplaçant dans u les lettres a, b, c, ..., h par a', b', c', ..., h', il vient

$$u' = (\lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1)^2 (\mu_1 \mu'_2 - \mu_2 \mu'_1)^2 (\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u.$$

En effet, changeant seulement z_1 et z_2, on obtient, comme ci-dessus,

$$(\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u\,;$$

et changeant dans celle-ci y_1 et y_2, il suffit de multiplier le résultat par $(\mu_1 \mu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2$, etc.