

**Transformation remarquable d'une  
fonction du quatrième degré ; d'après  
MM. Eisenstein et Cayley**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 8  
(1849), p. 417-419

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1849\\_1\\_8\\_\\_417\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__417_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**TRANSFORMATION REMARQUABLE D'UNE FONCTION DU  
QUATRIÈME DEGRÉ;**

D'APRÈS MM. EISENSTEIN ET CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 54; 1845.)

---

**THÉORÈME.** *Soit*

$$u = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde \\ - 2bgcf - 2bgde - 2cdef + 4adfg + 4bceh;$$

*faisons*

$$(1) \quad A = \frac{1}{2} \frac{du}{da}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{du}{db}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{du}{dc}, \dots, \quad H = \frac{1}{2} \frac{du}{dh}.$$

*Représentons par U ce que devient u en remplaçant a, b, c, ..., h par A, B, C, ..., H; on a U = u<sup>3</sup>.*

*Démonstration.* Faisons

$$a' = v_1a + v'_1e, \quad b' = v_1b + v'_1f, \quad c' = v_1c + v'_1g, \quad d' = v_1d + v'_1h, \\ e' = v_2a + v'_2e, \quad f' = v_2b + v'_2f, \quad g' = v_2c + v'_2g, \quad h' = v_2d + v'_2h.$$

*Représentons par u' ce que devient u en y mettant d'abord a', b', c', ..., h' au lieu de a, b, c, ..., h; et, ensuite,*

pour  $a', b', c', \dots, h'$  les valeurs données ci-dessus; il vient

$$u' = (v_1 v_2' - v_2 v_1')^2 u.$$

Faisons

$$\begin{aligned} v_1 = v_2' &= ah - bg - cf - de, & v_1' &= -2(ad - bc), \\ v_2 &= -2(eh - fg); \end{aligned}$$

on aura

$$v_1 v_2' - v_2 v_1' = u, \quad \text{d'où} \quad u' = u^2.$$

Or, d'après les valeurs (1), on a

$$\begin{aligned} a' &= H, & b' &= -G, & c' &= -F, & d' &= E, \\ h' &= A, & g' &= -B, & f' &= -C, & e' &= D; \end{aligned}$$

donc

$$U = u^2.$$

*Remarque.* M. Eisenstein avait donné sans démonstration la formule suivante

$$\begin{aligned} (a^2 d^2 - 3 b^2 c^2 + 4 a c^3 + 4 d b^3 - 6 a b c d)^2 \\ = A^2 D^2 - 3 B^2 C^2 + 4 A C^3 + 4 D B^3 - 6 A B C D; \end{aligned}$$

A, B, C, D ayant les valeurs (1). (Crelle, tome XXVII. page 105; 1844.)

M. Cayley a démontré cette formule et l'a même considérablement généralisée, de cette manière :

Imaginons la fonction  $u$

$$\begin{aligned} a x_1 y_1 z_1 + b x_1 y_1 z_2 + c x_1 y_2 z_1 + d x_1 y_2 z_2 \\ + e x_2 y_1 z_1 + f x_2 y_1 z_2 + g x_2 y_2 z_1 + h x_2 y_2 z_2. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2', & y_1 &= \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2', & z_1 &= \nu_1 z_1' + \nu_2 z_2', \\ x_2 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2', & y_2 &= \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2', & z_2 &= \nu_1 z_1' + \nu_2 z_2'. \end{aligned}$$

Faisant les substitutions, on obtient une fonction de la forme

$$a' x_1' y_1' z_1' + b' x_1' y_1' z_2' + \dots + h' x_2' y_2' z_2'.$$

Remplaçant dans  $u$  les lettres  $a, b, c, \dots, h$  par  $a', b', c', \dots, h'$ , il vient

$$u' = (\lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1)^2 (\mu_1 \mu'_2 - \mu_2 \mu'_1)^2 (\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u.$$

En effet, changeant seulement  $z_1$  et  $z_2$ , on obtient, comme ci-dessus,

$$(\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u;$$

et changeant dans celle-ci  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , il suffit de multiplier le résultat par  $(\mu_1 \mu'_2 - \mu_2 \mu'_1)^2$ , etc.