ALPHONSE DE POLIGNAC

Six propositions arithmologiques déduites du crible d'Ératosthène

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 423-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__423_1>

SIX PROPOSITIONS ARITHMOLOGIQUES DÉDUITES DU CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE;

PAR M. ALPHONSE DE POLIGNAC,
Élève de l'École Polytechnique.

L'opération qui sert à obtenir ce qu'on appelle le *crible d'Ératosthène* fournit un moyen commode d'étudier les nombres premiers au moyen de certaines suites que j'ai appelées *suites diatomiques* (*).

Soit la suite naturelle des nombres

$$(a)\left\{\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13, \\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ldots, \end{array}\right.$$

Si nous effaçons tous les nombres de deux en deux, à commencer par zéro, nous obtiendrons le tableau (a_1),

$$(a_1)\quad \cancel{0},\ 1,\ \cancel{2},\ 3,\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ 9,\ \cancel{10},\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ \ldots$$

(*) L'auteur avait d'abord adopté le nom de suites *distanciées*. Il conviendrait peut-être de les appeler suites *cribrogènes*. TM.

Nous avons toujours *un* nombre effacé compris entre deux conservés ; donc, après cette première opération, ces permanences de termes effacés se succèdent comme les termes de la suite

(1) $$1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots,$$

que nous appellerons *suite diatomique de* 2, ou première suite diatomique.

Si nous effaçons maintenant derechef de trois en trois, dans le tableau (a_1), nous obtenons le tableau (a_2) :

$$(a_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \cancel{0},\ 1,\ \cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10}, \\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ \cancel{15},\ \cancel{16},\ 17 \ldots \end{array}\right.$$

Nous avons le nombre effacé zéro, puis *trois* nombres effacés entre deux conservés, puis *un* seul effacé entre deux conservés, et ainsi de suite ; de telle sorte que ces séquences de termes effacés se suivront dans cette seconde opération, comme les termes de la suite (2)

(2) $$1,\ 3;\ 1,\ 3;\ 1,\ 3;\ 1,\ 3;\ \text{etc.} \ldots$$

Nous appellerons cette suite, *suite diatomique de* 3, ou deuxième suite diatomique.

La suite diatomique de 5 serait

1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5.

On conçoit dès lors ce que nous entendons par le tableau (a_n), et par suite diatomique de P_n ou $n^{ième}$ suite diatomique, P_n désignant le $n^{ième}$ nombre premier.

Nous appelons *période du tableau* (a_n) la série des nombres consécutifs qui forment la période correspondante de la $n^{ième}$ suite, et nous entendons par *place d'un nombre, dans la période du tableau,* le rang de ce nombre dans la période considérée.

Ceci posé, nous avons les six propositions suivantes :

1°. Toute suite diatomique est périodique, et la période commence avec la suite.

2°. Le premier nombre du tableau (a_n), après lequel les séquences de termes rayés se reproduisent périodiquement, nombre que nous désignons par (μP_n), est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à P_n inclusivement. Il suit évidemment de là que le premier terme d'une diatomique quelconque est égal à l'unité; car, $\mu P_n - 1$ et $\mu P_n + 1$ ne sont divisibles par aucun des nombres premiers non supérieurs à P_n. Donc, après la $n^{ième}$ opération, $\mu P_n - 1$ et $\mu P_n + 1$ ne seront effacés ni l'un ni l'autre, et μP_n seul sera effacé entre eux.

3°. Dans toute suite diatomique, la période a pour premier terme l'unité, et, dans la série de tous les autres, les termes également distants des extrêmes sont égaux.

4°. Si nous désignons par $\varphi(\mu P_n)$ le nombre des termes de la période de la $n^{ième}$ suite diatomique, $\varphi(\mu P_n)$ sera aussi égal au nombre des termes non effacés jusqu'à μP_n; or ce nombre est celui des nombres inférieurs et premiers à μP_n. Donc, d'après une formule connue,

$$\varphi(\mu P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\ldots(P_{n-3}-1)\\(P_{n-2}-1)(P_{n-1}-1)(P_n-1).$$

On voit que le nombre des termes augmente très-rapidement,

Pour $n = 1 \ldots$	$\varphi(\mu P_n)$ devient	1,
$n = 2$	....	2,
$n = 3$	....	8,
$n = 4$	....	48,
$n = 5$	....	480.

5°. Si nous désignons par S_n la somme des termes de la période de la $n^{ième}$ suite, ou, ce qui revient au même, le nombre des entiers inférieurs à μP_n et divisibles par un ou par plusieurs facteurs premiers non supérieurs à

P_n, on aura, d'après les deux numéros précédents,

$$S_n = \mu P_n - \varphi(\mu P_n).$$

6°. Les multiples de P_n occupent toutes les places par rapport à la période du tableau (a_{n-1}), et ne les occupent qu'une seule fois dans chaque période du tableau (a_n).

Théorème I. Admettons qu'il soit vrai pour la $n-1^{ième}$ suite; si celle-ci est périodique, en effaçant dans le tableau (a_{n-1}) les nombres de P_n en P_n pour former le tableau (a_n), je finirai nécessairement par trouver deux multiples de P_n déjà effacés et occupant la même place relativement à la suite $n-1^{ième}$. Soient KP_n et $K'P_n$ ces nombres; alors les termes de la $n^{ième}$ suite, trouvés en allant de KP_n vers $K'P_n$, se répéteront après $K'P_n$ indéfiniment et dans le même ordre, et, réciproquement, on trouvera ces mêmes termes dans le même ordre en allant de $K'P_n$ vers KP_n, ou de KP_n vers zéro. Maintenant, je puis supposer que la distance entre $K'P_n$ et KP_n est plus grande qu'entre KP_n et zéro; donc, puisque tous les termes en allant de KP_n vers zéro se suivent dans le même ordre qu'en allant de $K'P_n$ vers KP_n, il arrivera que je trouverai entre KP_n et $K'P_n$ un certain multiple rP_n qui occupera, par rapport à la période de la $n-1^{ième}$ suite diatomique, la même place que zéro. Donc les termes trouvés en allant de zéro vers rP_n se répéteront indéfiniment et dans le même ordre après rP_n; donc, si le théorème existe pour la suite $(n-1)$, il existe aussi pour la suite (n). Or le théorème est vrai pour $n=1$; donc, etc.

Théorème II. En partant du nombre μP_n, et effaçant les nombres de deux en deux, puis de trois en trois, puis de cinq en cinq, etc., et, enfin, de P_n en P_n, on effacerait juste les mêmes nombres qu'en partant de zéro, et faisant les mêmes n opérations. Donc μP_n est égal au produit $2.3.5\ldots P_n$, ou à un sous-multiple de ce produit.

Or ce sous-multiple contenant au moins un nombre premier de moins, on ne serait pas dans les mêmes conditions que si l'on partait de zéro. Donc, $\mu P = 2.3.5.7\ldots P_n$.

Théorème. III. Considérons, dans le tableau (a_n), deux multiples consécutifs de μP_n, par exemple, μP_n et $2\mu P_n$; il est évident que les termes de la période de la suite (n), qui seront à égale distance de μP_n et de $2\mu P_n$, seront égaux ; le nombre des termes d'une suite étant impair, il y a toujours un terme du milieu, et nous pouvons démontrer que ce terme est toujours le nombre 3, et qu'à mesure qu'on fait croître l'indice des suites diatomiques, les termes, à partir du terme milieu, prennent des valeurs fixes, déterminées, et forment une série qui jouit de propriétés curieuses.

Théorème VI. Le nombre des places dans la période de la $n - 1^{ième}$ suite est $\frac{(\mu P_n)}{P_n}$. Il faut prouver que les μ places occupées par les multiples de P_n, depuis P_n jusqu'à (μP_n), sont toutes différentes par rapport à la période du tableau a_{n-1}. Or cela a lieu, sans quoi (μP_n) ne serait pas le premier à partir duquel la période de la $n^{ième}$ suite recommencerait, comme à partir de zéro.

Ce dernier théorème est d'une haute importance.

Note. Dans la séance de l'Académie des Sciences du 15 octobre 1849, l'auteur a lu un Mémoire sur les suites diatomiques, divisé en quatre parties (*) : la première contient des définitions; la deuxième contient les énoncés de neuf théorèmes : les six propositions rapportées ci-dessus et les trois suivants.

Théorème VII. Au-dessous d'une certaine limite, chaque suite diatomique comprend tous les nombres impairs possibles.

(*) *Comptes rendus*, tome XXIX, page 387.

Théorème VIII. Tous les nombres de la $(n-1)^{ième}$ suite diatomique sont compris au moins un nombre égal de fois dans la $n^{ième}$ suite.

Théorème IX. Dans toute suite diatomique, en faisant abstraction du premier terme, le terme milieu de la période est toujours 3, et l'on peut remarquer qu'à mesure qu'on fait croître l'indice des suites diatomiques, les termes, à partir du terme milieu, prennent des valeurs fixes, déterminées, et forment une série qui jouit de propriétés curieuses.

Troisième partie : *Applications*.

Théorème I. Entre P_n et P_n^2, il y a toujours un nombre premier.

Théorème II. Entre a^n et a^{n+1}, il y a toujours un nombre premier.

Quatrième partie : *Inductions*.

Théorème I. Tout nombre pair est égal à la différence de deux nombres premiers *consécutifs* d'une infinité de manières.

Théorème II. Tout nombre impair est égal à une puissance de 2 plus à un nombre premier. (Vérifié jusqu'à 3 millions.)

Observations. Le théorème suivant n'est pas encore démontré : *tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*. Ce théorème est énoncé par Euler, qui le tenait de Goldbach. C'est ce qu'on lit dans la Lettre XLIV, de 1742, page 135 de cet ouvrage : *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres* du XVIII^e *siècle, précédée d'une Notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg; par* P. H. Fuss, membre et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg; 2 tomes in-8°; 1842.

Quand notre Académie publiera-t-elle la correspondance de d'Alembert, Lagrange, Laplace, etc.? Quand publiera-t-elle l'ouvrage de Desargues, dont tant était bruit il y a quelques années? Se contentera-t-on du bruit? C'est toujours quelque chose. Souvent même, chez nous, c'est tout.

TM.