Seconde solution de la question 215

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 151-154

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__151_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 215

(voir t. IX, p. 56);

PAR M. A. H., abonné.

Par tout point A d'une conique, passent quatre cercles osculateurs ayant leurs points de contact en A, B, C, D.

Le centre de la conique est le centre des moyennes distances de B, C, D. (JOACHIMSTAL.)

Le principe ne pouvant être vrai que pour les coniques à centre, nous prendrons pour la conique l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Soient donc (x_1, y_1) le point A pris sur la conique; (x, y) un des points de contact des cercles osculateurs qui passent par A. Nous avons d'abord :

$$(1) \qquad a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2,$$

$$(2) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

D'un autre côté, (X, Y) étant le centre du cercle osculateur en (x, y), on a

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2;$$

et comme

$$X = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad Y = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

il vient

$$(3) \quad \left(\frac{c^2 x^3}{a^4} - x\right)^2 + \left(\frac{c^2 y^3}{b^4} + y\right)^2 = \left(\frac{c^2 x^3}{a^4} - x_1\right)^2 + \left(\frac{c^2 y^3}{b^4} + y_1\right)^2.$$

Pour calculer les coordonnées des points de contact, il faudrait tirer x et y des équations (2) et (3), combinées avec l'équation (1).

Mais il est facile de voir qu'il nous suffira de prouver que l'équation finale en x, *débarrassée des racines étrangères à la question*, n'est que du troisième degré et manque de second terme.

Procédons à l'élimination de y et y_1 entre les équations (1) (2) et (3).

L'équation (3) donne

$$(3') \quad (y - y_1)\left(y + y_1 + \frac{2c^2 y^3}{b^4}\right) + (x - x_1)\left(x + x_1 - \frac{2c^2 x^3}{a^4}\right) = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(4) \qquad (y - y_1)(y + y_1)a^2 + (x - x_1)(x + x_1)b^2 = 0.$$

Éliminant $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ entre les équations (3') et (4), on a

$$(5)\ a^2(y + y_1)\left(x + x_1 - \frac{2c^2 x^3}{a^4}\right) - b^2(x + x_1)\left(y + y_1 + \frac{2c^2 y^2}{b^4}\right) = 0;$$

remplaçant $a^2 - b^2$ par c^2, et divisant par c^2, qui devient facteur commun, on obtient

$$(5') \quad (y+y_1)(x+x_1)-\frac{2x^3}{a^2}(y+y_1)-\frac{2y^3}{b^2}(x+x_1)=0.$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que : 1° $(x=x_1,\ y=y_1)$ est une solution du système des équations (1), (2) et (3) évidemment étrangère à la question, dans laquelle on ne considère que les points de contact autres que A; 2° si l'élimination de $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, entre les équations (3') et (4), *paraît* avoir eu pour résultat de supprimer cette solution, elle en a introduit une autre (*) $(x=-x_1,\ y=-y_1)$ qui est aussi étrangère, de sorte que, après avoir éliminé y et y_1 entre les équations (1), (2) et (5), il faudra, dans l'équation finale, supprimer les racines $+x_1$, $-x_1$, chacune autant de fois qu'elle s'y trouvera.

Dans l'équation (5), remplaçons $\frac{y^2}{b^2}$ par sa valeur $1-\frac{x^2}{a^2}$ tirée de l'équation (1),

$$(6) \quad y\left[2x_1x^2-a^2(x+x_1)\right]+y_1\left[2x^3-a^2(x+x_1)\right]=0.$$

Tirant de l'équation (6) le rapport $\frac{y^2}{y_1^2}$ et l'égalant à sa valeur $\frac{x^2-a^2}{x_1^2-a^2}$ tirée des équations (1) et (2), nous obtenons pour équation finale :

$$(7) \quad (a^2-x^2)\left[2x_1x^2-a^2(x+x_1)\right]^2-(a^2-x_1^2)\left[2x^3-a^2(x+x_1)\right]^2=0.$$

$$(7') \quad 0=\left\{\begin{array}{l} x_1^2\left[a^4(x+x_1)^2+4x^6-4a^2x^3(x+x_1)\right] \\ -x^2\left[a^4(x+x_1)^2+4x_1^2x^4-4a^2x_1x^2(x+x_1)\right]\end{array}\right\}+4a^2x^2(x^2-a^2)(x_1^2-x^2).$$

$$(7'') \quad 0=(x_1^2-x^2)(x+x_1)^2a^4-4a^2x^3x_1(x_1^2-x^2)+4a^2x^2(x^2-a^2)(x_1^2-x^2).$$

Nous voyons évidemment que $+x_1$ et $-x_1$ sont racines;

(*) $x=-x_1$, $y=-y_1$ vérifient l'équation (5) et rendent identiques les équations (1) et (2).

supprimons-les, nous aurons

(8) $$o = (x + x_1)^2 a^4 - 4 a^2 x^3 x_1 + 4 a^2 x^2 (x^2 - a^2);$$

supprimant encore la racine $+ x_1$, on a

(9) $$4x^3 - 3 a^2 x - a^2 x_1 = o.$$

Cette équation du troisième degré manque, en effet, de second terme.

Note. Les trois racines de cette équation sont réelles et comprises entre $+ a$ et $- a$; de même les trois racines de l'équation

$$4y^3 - 3 b^2 y - b^2 y_1 = o$$

sont réelles et comprises entre $+ b$ et $- b$. Ainsi, dans l'ellipse, il existe toujours quatre cercles osculateurs passant par un même point de l'ellipse Dans l'hyperbole, la dernière équation devient

$$4y^3 + 3 b^2 y + b^2 y_1 = o,$$

qui n'a qu'une seule racine réelle, et il n'existe que deux cercles osculateurs. (*Voir* Rectification, page 115 de ce volume.)