NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

De la manière de bien conditionner les triangles dans les levers ; et note historique sur Roger Cotes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 195-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__195_1>

DE LA MANIÈRE DE BIEN CONDITIONNER LES TRIANGLES DANS LES LEVERS ; ET NOTE HISTORIQUE SUR ROGER COTES.

---

1. Un triangle, généralement parlant, est déterminé quand on en connaît trois parties, parmi lesquelles doit se trouver au moins un côté. Ainsi, sur le terrain, on mesure trois éléments du triangle, et on déduit par le calcul les trois autres parties. Si l'on se trompe dans les mesures, il y aura aussi des erreurs dans les parties calculées, à moins qu'elles ne se compensent fortuitement. Il s'agit donc de savoir : 1° quelle est l'influence des erreurs commises dans les parties mesurées ; 2° quelle forme il faut donner aux triangles pour que cette influence soit la moindre possible. Le célèbre Roger Cotes, dont nous parlerons plus bas, est le premier qui ait soulevé et résolu ce genre de questions. Ensuite, les principaux auteurs qu'on peut consulter sur cette matière sont :

1°. Bouguer, *la Figure de la terre,* page 86, 1749 ; c'est celui qui a le plus avancé la question et le plus approché de la vraie solution.

2°. Cagnoli, *Trigonométrie,* page 198, deuxième édition, 1808 ; la première est de 1784 (traduit de l'italien par Chompré).

3°. Delambre, *Traité d'Astronomie*, tome III, page 529, 1814.

4°. Puissant, *Géodésie*, tome I, page 158, troisième édition, 1842; la deuxième édition est de 1805.

2. On suppose toujours tacitement qu'on a de bons instruments et de bons observateurs; de sorte que les erreurs impossibles à éviter, et provenant soit du matériel, soit du personnel, sont pourtant renfermées dans des limites très-resserrées. Il s'ensuit qu'on est suffisamment autorisé à considérer les *rapports* entre ces *erreurs*, comme des rapports entre des quantités infiniment petites, autrement, comme des rapports différentiels; aussi Roger Cotes et Bouguer ont déterminé ces rapports par des considérations de géométrie différentielle, et les auteurs plus modernes par des considérations d'analyse différentielle. Nous adoptons cette dernière méthode comme la plus courte. En voici un exemple. Soit ABC un triangle dans lequel on a mesuré la base b et les angles adjacents A et B; on veut connaître l'influence des erreurs commises dans la mesure des angles A et B sur la grandeur du côté à calculer a. On suppose que l'erreur sur la mesure de b est nulle. On procède ainsi :

$$a \sin B = b \sin A;$$

différentiant, on obtient

$$\sin B\, da + a \cos B\, dB = b \cos A\, dA = a \sin B \cot A\, dA. \tag{1}$$

C'est un fait d'expérience que le même observateur, avec le même instrument, se trompe toujours de la même quantité, soit par excès ou par défaut, dans la mesure des angles; de sorte que l'on a

$$dA = dB \quad \text{ou bien} \quad dA = -dB.$$

Premier cas. $dA = dB$; on tire de l'équation (1)

$$da = a(\cot A - \cot B)\, dA;$$

ainsi moins B différera de A, ou, ce qui revient au même, moins la base mesurée b différera du côté a qu'il s'agit d'évaluer, moins l'erreur sur cette évaluation sera grande.

Deuxième cas. $dA = -dB$; l'équation (1) donne

$$da = a(\cot A + \cot B)dA = \frac{a \sin(A+B)dA}{\sin A \sin B}$$
$$= a\frac{2\sin(A+B)dA}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}.$$

Les erreurs sur A et sur B étant égales en sens inverse, l'évaluation de l'angle C ou de $2^q - A - B$ est exacte; l'erreur da diminue à mesure que cos (A—B) augmente: ce qui ramène au même résultat que dans le cas précédent. De là cette règle générale due à Bouguer, et qu'il exprime ainsi : *Lorsqu'on est assujetti à donner une certaine grandeur à l'angle compris entre deux côtés dont il s'agit de découvrir le rapport, il faut, le plus qu'on peut, rendre le triangle isocèle ou faire la base qu'on doit mesurer de même longueur que l'autre ligne.* (Figure de la terre, page 87.)

Roger Cotes était parvenu au même résultat, mais seulement pour le cas où l'angle *compris* est droit.

3. On a mesuré la base c et le côté b; on demande l'angle qu'il faut prendre pour B afin que l'erreur sur C devienne un minimum. On a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$

d'où

$$0 = da(a - b\cos C) + ab\sin C\, dC,$$

et

$$dC = \frac{(b\cos C - a)da}{ab\sin C}.$$

Ainsi dC sera un minimum en faisant $b\cos C = a$; alors B doit être un angle droit : telle est, à ce qui nous semble, la solution peu claire donnée par Bouguer. M. le général Piobert, examinateur à l'École d'application de Metz, a indiqué, il y a plusieurs années, dans le cours des examens, une solution plus complète du problème, et que nous rapporterons comme il suit.

Les solutions précédentes ne conviennent que dans le cas où l'on ne veut déterminer par le calcul qu'un seul côté du triangle, et où deux angles seulement ayant été mesurés, on suppose que les erreurs de ces angles sont égales. Ces solutions de cas hypothétiques ne sont pas applicables dans les opérations géodésiques d'une grande exactitude, pour lesquelles on mesure tous les angles et on calcule tous les côtés des triangles. Aussi, c'est à tort que, dans plusieurs ouvrages modernes, on a conclu de ces solutions que le triangle équilatéral était toujours le plus convenable à employer en géodésie, comme étant celui dans lequel les erreurs d'angles influaient le moins sur la longueur des côtés. D'ailleurs, même dans les hypothèses où l'on s'est placé pour le deuxième cas rapporté ci-dessus, la solution ne donne pas l'erreur absolue minimum; en effet, la valeur de cette erreur pouvant se mettre sous la forme

$$da = \frac{2a \sin C\, dA}{\cos(A - B) + \cos C},$$

l'on voit que si elle diminue avec $A - B$, elle diminue bien plus encore avec sin C ou quand C se rapproche de 0 degré ou de 180 degrés.

Si, maintenant, on applique les mêmes solutions au cas où l'on calcule les trois côtés des triangles, comme en géodésie, on voit que si l'on suppose les erreurs des angles A et B dans le même sens, l'erreur sur l'angle C sera égale à leur somme ou double, et le côté opposé c sera très-inexact; il sera donc important de choisir les autres angles de manière que le résultat soit le moins fautif. Si ε est l'erreur de mesure des angles, on aura $dc = a \sin 2\varepsilon$, ou à très-peu près, $dc = 2a \sin \varepsilon$, dans la solution indiquée

$A = B$; tandis qu'en général, C étant mesuré, on a sensiblement

$$dc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin B},$$

erreur qui est plus petite que la précédente, tant que $B > 30$ degrés, et dont le minimum est donné par $B = 90$ degrés.

Dans le cas où les erreurs sur A et B sont égales et de signes contraires, l'angle C est exact, et l'erreur sur le côté opposé serait sensiblement nulle, si B approchait de 90 degrés; on a aussi

$$da = \frac{c \sin \varepsilon}{\sin B},$$

qui est également un minimum pour $B = 90$ degrés, de sorte que l'égalité des angles n'est nullement la meilleure solution dans les divers cas, où l'on suppose que les erreurs de mesure des angles sont égales.

La solution qui convient le mieux pour les calculs géodésiques est celle qui donne le triangle le moins déformé; en supposant une base AC donnée, la déformation dépend du déplacement du sommet B opposé, il faut donc que ce déplacement $BB' = D$ soit le plus petit possible; or il est facile de voir, à des infiniment petits du second ordre près, que

$$D = \sqrt{da^2 + dc^2 + 2\, da\, dc \cos B},$$

$$da \sin B = c \sin dA \quad \text{et} \quad dc \sin B = a \sin dC,$$

d'où

$$D = \sqrt{\frac{c^2 \sin^2 dA + a^2 \sin^2 dC + 2\, ac \cos B \sin dA \sin dC}{\sin^2 B}},$$

et D est un minimum pour $\sin B = 1$, $B = 90$ degrés.

Toutefois, le cas le plus avantageux est celui où le rapport du déplacement à la hauteur du triangle est un minimum; car, lorsqu'on lie deux points par une chaîne de triangles, il y a d'autant moins de chances d'erreurs que les sommets sont moins *déplacés* et qu'il y a moins de triangles ou que les hauteurs des triangles sont plus grandes. Or ce rapport est

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{D}{a \sin C}$$

$$= \frac{1}{\sin B}\sqrt{\frac{\sin^2 dA}{\sin^2 A} + \frac{\sin^2 dC}{\sin^2 C} + \frac{2 \sin dA \sin dC \cos B}{\sin A \sin C}}.$$

Quelles que soient les erreurs dA et dC, la déformation sera d'autant plus petite que A et C, et surtout B, approcheront le plus de 90 degrés. Si dA et dC ne diffèrent pas beaucoup, on a

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C \cos B}}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Si, de plus, A et C ne diffèrent pas sensiblement, il vient

$$\frac{D}{a \sin A} = \frac{\sin dA}{\sin B \sin A}\sqrt{2 \pm \cos B},$$

suivant que les erreurs sont ou non de même signe. Si cos B était très-petit ou variait très-peu, le minimum serait donné par sin B sin A ou sin B sin C maximum; alors

$$\cos B \sin A\, dB + \sin B \cos A\, dA = 0:$$

mais

$$2A + B = 180°,$$

d'où

$$dB = -2dA \quad \text{et} \quad \tang 2A + \tang B = 0.$$

Substituant la valeur de dB dans la première, il vient

$$2 \tang A - \tang B = 0,$$

d'où

$$2 \tang A = -\tang 2A = -\frac{2 \tang A}{1 - \tang^2 A}:$$

enfin

$$\tang^2 A = 2,$$

donc

$$A = C = 54^\circ 44' 7'',8 \quad \text{et} \quad B = 70^\circ 31' 44'',4.$$

Observation. Dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie par M. Gaucherel sur les meilleures conditions à donner aux triangles géodésiques, on combat les opinions émises à cet égard par M. Puissant; nous ne savons pas si M. Gaucherel s'est rencontré avec ce que M. Piobert a exposé il y a plusieurs années. (*Comptes rendus,* 25 février 1850, page 200.)

Roger Cotes. C'est encore un génie dont la courte apparition émerveilla les géomètres du XVII^e^ siècle. Cotes vit le jour à Burbage, petite ville du comté de Leicester, le 10 juillet 1682, et termina sa carrière terrestre à l'Université de Cambridge, le 5 juin 1716, âgé de 34 ans. N'étant encore que simple bachelier, il fut *exceptionnellement* promu à la chaire d'astronomie et de philosophie, fondée par le révérend Thomas Plume. Les fonds ne suffisant pas pour faire les expériences, le célèbre philologue Bentley, ami de Cotes, y suppléa à ses dépens et par des souscriptions. Un autre de ses amis, le célèbre Robert Smith, lui succéda dans cette chaire, et publia en un volume in-4° ses œuvres, six années après la mort de l'auteur, sous ce titre :

Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotæ : accedunt alia opuscula mathematica per Rogerum Cotesium. Edidit et auxit Robertus, collegii S. Trinitatis apud Cantabrigienses socius; astronomiæ et experimentalis philosophiæ post Cotesium professor. Cantabrigia, MDCCXXII, in-4°.

Ce *Harmonia* est le principal ouvrage de Cotes; l'ouvrage est divisé en quatre parties.

Première partie. *Logometria.* Traité des théories logarithmiques et de leur application à la quadrature de l'hyperbole, à la chute verticale des graves dans un milieu résistant, à la densité des couches atmosphériques, à l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point placé à l'extrémité de son axe; aux trajectoires décrites par un point attiré par une force en raison inverse des cubes des distances.

Deuxième partie. *Theoremata tum logometrica tum trigonometrica.* Contient des intégrales ramenées à des logarithmes et à des fonctions circulaires. Ces intégrales ont dix-huit formes principales.

Ces formes se ramènent la plupart à

$$\int dx(a+bx^n)^p(a'+b'x^n)^q,$$

et il les intègre on ne sait par quelle méthode, car il ne donne que les intégrales; mais les logarithmes sont indiqués par une *barre verticale :* c'est du moins ce qu'il faut supposer pour se rendre compte de ces intégrales.

La dix-huitième et dernière forme est

$$\frac{x^{tn-1}dx}{(k+lx^n)\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},$$

où t est un nombre entier, positif ou négatif, et n un exposant quelconque.

Ces formes sont suivies de cinq théorèmes sur des relations entre certaines intégrales. Voici le premier théorème; soient

$$Z=e+fx^n,\quad dX=z^{\theta n-1}Z^{\omega-1}dx,$$

$$dY=z^{\theta n+n-1}Z^{\omega-1},\quad dU=z^{\theta n-1}Z^{\omega}dx;$$

on aura

$$z^{\theta n}Z^{\omega}=n[\theta eX+(\theta+f\omega)Y],\quad U=eX+fY;$$

d'où l'on déduit les valeurs de X et de Y en fonctions de Z et de U.

Observation. Il est presque inutile d'avertir que Cotes fait usage du point newtonien pour désigner des différentielles.

Troisième partie. *Problematum analysis et constructio per formas præcedentes.* Application des intégrales précédentes à la quadrature de plusieurs courbes; la courbe des tangentes, des sécantes, etc. Application aux latitudes croissantes des marins, cissoïdes, spirales, caténaires, mouvement d'ascension verticale et de chute d'un grave, dans un milieu résistant. Lorsque certains coefficients deviennent imaginaires, il remplace les logarithmes par des lignes trigonométriques.

Observation. Le mot *logarithme* est composé de deux mots grecs λόγου ἀριθμός, *mesure du rapport.*

En effet, soit le rapport $1 : a$, et supposons que l'unité croisse par quantité infiniment petite, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à a. Partant de la valeur $1 + u$, elle prend la valeur infiniment voisine $1 + u + du$; le rapport $\frac{du}{1+u}$ est infiniment petit; supposons qu'il soit constant. La somme de tous ces rapports, depuis 1 jusqu'à a, est une quantité *finie* qu'on nomme *mesure du rapport*, et Cotes se sert presque toujours, non de l'expression dérivée du grec, mais de l'expression latine *rationis mensura.* Au lieu de supposer l'accroissement différentiel égal à du, on peut prendre Mdu, M étant un nombre constant quelconque. C'est ce nombre qu'on nomme *module,* et qui caractérise les divers systèmes de logarithmes; les logarithmes du même nombre croissent et décroissent dans le même rapport que le module; de même, les lignes trigonométriques croissent et décroissent avec le *rayon*, qui est aussi le module trigonométrique. Comme on passe des logarithmes aux lignes trigonométriques et *vice versâ*, de là le titre *Harmonia mensurarum* et aussi *logometria*.

Quatrième partie. *Theoremata tum logometrica tum trigonometrica datarum fluxionum fluentes exhibentia per methodum mensurarum ulterius extensam.*

La logométrie et les dix-huit formes d'intégrales avaient paru en 1714, dans les *Transactions philosophiques*, où l'auteur les a dédiées à Ed. Halley; il continua d'y travailler, lorsqu'il fut attaqué de la fièvre dont il mourut. Il remit le manuscrit non achevé de cette quatrième partie à Robert Smith, son ami et son parent. Les feuilles ne consistant qu'en notes tyroniennes, présentèrent de grandes difficultés. Cependant Cotes, dans une Lettre du 3 mai 1716 adressée au docteur Jones, lui annonçait qu'il avait découvert une formule élégante et générale pour intégrer $\frac{z^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1} dz}{e + fz^n}$; e, f sont des constantes quelconques, n un exposant quelconque, $\frac{\delta}{\lambda}$ une fraction quelconque et θ un entier positif ou négatif. Voici ce que dit Smith dans la préface de cette quatrième partie :

Præclari hujus inventi indicio excitatus, ne carissimi amici famæ optimisque scientiis deessem, contuli me continuo ad ejus adversaria, quæ, quanquam primo intuitu sibyllæ foliis obscuriora videbantur, quod nullo ordine nec verbo erant explicata, multiplices tamen conjectandi occasiones præbendo, spem fortiter conceptam non fefellerunt.

La science et Cotes doivent beaucoup à Smith (*); car c'est cette quatrième partie qui renferme la plus brillante

(*) Smith, né en 1689, est mort en 1768.

découverte de Cotes. Les intégrations par décomposition en fractions rationnelles avaient déjà été données par Leibnitz depuis 1702. Mais l'illustre Allemand n'a pu aller au delà de $\int \frac{dx}{x^3 \pm a^3}$; tandis que Cotes donne l'intégrale générale $\int \frac{dx}{x^n \pm a^n}$ pour n entier, et en montre l'admirable relation, avec une propriété de la circonférence devenue célèbre sous le nom de théorème de Cotes, et généralisé depuis par Moivre. La quatrième partie contient quatre-vingt-quatorze formes générales d'intégrales, parmi lesquelles il y en a d'assez compliquées; par exemple, la quatre-vingt-cinquième est

$$z^{\theta n-1}\, dz \sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}};$$

en rattachant toujours les intégrales à des constructions géométriques. Il était peut-être sur la voie des transcendantes elliptiques, et cela nous explique en quelque sorte ces paroles de Newton : *Si Cotes avait vécu, nous aurions su quelque chose.* Car Newton est aussi sublime dans ses divinations que dans ses découvertes. Il est à remarquer que les variations dans les éléments du triangle sphérique conduisent aux équations fondamentales des transcendantes elliptiques.

Smith parvint à déchiffrer dans ces mêmes papiers un théorème sur les courbes du troisième ordre, qu'il a communiqué à Maclaurin; celui-ci en a fait la base de son traité des propriétés des courbes géométriques : *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus*. C'est le théorème de *collinéation* des centres des *moyennes harmoniques*, devenu un cas tout à fait particulier d'une théorie infiniment générale, embrassant les surfaces, et que nous donnerons incessamment d'après M. Grasmann.

Professeur de Philosophie expérimentale, Cotes dirigea ses recherches vers l'optique, l'astronomie et la géométrie pratique. *Æstimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphærici.*

Tel est le titre d'un opuscule de vingt-deux pages, qui suit le *Harmonia mensurarum*. Cet opuscule n'a plus qu'un intérêt historique, étant le point de départ des travaux de ce genre. Il en est de même des autres opuscules qui terminent l'édition de Smith; ils ont pour objet:

1°. Faire passer une courbe parabolique par un nombre donné de points;

2°. De la construction des Tables par les différences; ce qu'il appelle la *Canonotechnie*.

Saunderson a démontré les *formes* de Cotes dans son ouvrage *The method of fluxions applied to M. Cotes formes*, et Walmsley, bénédictin anglais, a traduit en français le *Harmonia mensurarum* sous le titre *Analyse des mesures, des rapports et des angles*; 1748, in-4°.