NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions 219 et 220

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 206-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__206_1>

QUESTIONS 219 ET 220

(voir t. IX, p. 11)

PAR M. A. H., abonné.

Deux angles trièdres trirectangles ayant même sommet :

1°. Les intersections de leurs six arêtes par un même plan sont sur une conique (*Question* 219).

2°. Leurs faces sont tangentes à une même surface conique du second degré (*Question* 220). (STEINER.)

Question 219. Il suffit de démontrer que les six arêtes sont sur une même surface conique du second degré.

Soient pris pour axes coordonnés les arêtes d'un des angles trièdres. Soient, de plus, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$,

$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les cosinus des angles $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)\ldots$, que font avec ces axes les arêtes de l'autre angle trièdre, de sorte que

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \\ &= \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Une droite passant par l'origine est représentée par les équations

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Pour qu'on puisse la considérer comme une quelconque des génératrices d'un cône du second ordre, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2 + \mathrm{D}\beta\gamma + \mathrm{E}\alpha\gamma + \mathrm{F}\alpha\beta = 0.$$

Pour des valeurs réelles de A, B, C, ..., cette équation (P) peut être vérifiée quand la droite (E) se confond successivement avec nos six arêtes. Pour les axes des X, Y, Z, on a

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0, \ldots;$$

la considération du premier angle trièdre réduit donc l'équation (P) à celle-ci :

$$(\mathrm{P}') \qquad \mathrm{D}\beta\gamma + \mathrm{E}\alpha\gamma + \mathrm{F}\alpha\beta = 0.$$

Il faut, à cause du second angle trièdre, qu'on ait

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\beta_0\gamma_0 + \mathrm{E}\alpha_0\gamma_0 + \mathrm{F}\alpha_0\beta_0 &= 0, \\ \mathrm{D}\beta_1\gamma_1 + \mathrm{E}\alpha_1\gamma_1 + \mathrm{F}\alpha_1\beta_1 &= 0, \\ \mathrm{D}\beta_2\gamma_2 + \mathrm{E}\alpha_2\gamma_2 + \mathrm{F}\alpha_2\beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Or ces trois équations, ajoutées membre à membre, donnent $0 = 0$ à cause de l'équation (Q) ; elles se réduisent donc à deux, et déterminent les rapports entre les coefficients D, E, F. Le théorème est donc démontré.

Question **220.** Soient pris pour plans coordonnés la face de l'un des angles trièdres.

Soient, de plus, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les cosinus des angles que font avec ces plans les faces du second angle trièdre, ou, ce que revient au même, les cosinus des angles que font, avec les axes, les perpendiculaires à ces faces, de sorte que

$$(Q) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \\ &= \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Un plan passant par l'origine est représenté par

$$(E) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Pour qu'on puisse considérer le plan comme tangent à un cône du second ordre, on reconnaît facilement, d'après un théorème démontré par MM. Briot et Bouquet, pages 218 et 219 de leur *Géométrie analytique*, qu'il faut et il suffit que

$$(P) \qquad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha\beta = 0;$$

pour que le plan (E) se confonde avec les plans coordonnés successivement, il faut que

$$A = B = C = 0,$$

ce qui donne, au lieu de (P),

$$(P') \qquad D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha\beta = 0.$$

La démonstration se continue comme on vient de le voir.

Remarque. Le théorème 220 se déduit immédiatement, au moyen du *principe de dualité*, du théorème 219. Il suffit de considérer les cônes *supplémentaires* dont M. Chasles a fait un si remarquable usage dans ses Mémoires sur les cônes du second degré et les coniques sphériques; mais ces Mémoires (*Académie de Bruxelles*, 1830, 1831) étant très-rares, j'ai voulu démontrer directement les deux théorèmes.