

TERQUEM

Seconde solution du même problème

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 252-255

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__252_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DU MÊME PROBLÈME.

1. Une considération ingénieuse a ramené la recherche du précédent lieu géométrique à une question de tétragonométrie; mais on peut aussi trouver le lieu directement de la manière suivante :

La bissectrice de l'angle AOB est évidemment le lieu des centres. Prenons cette bissectrice pour axe des x , et la droite AB, polaire du point O, pour axe des y ; le milieu I de AB est donc l'origine des coordonnées.

Soient $OI = l$; $AI = BI = y'$; l et y' sont des quantités connues. L'équation de la conique a évidemment la

forme suivante :

$$y^2 + Cx^2 + Ex - y'^2 = 0.$$

On a

$$2yy' + Ex - 2y'^2 = 0, \quad \text{polaire du point } O,$$

d'où

$$E = \frac{2y'^2}{l}.$$

On a

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC) = \frac{4y'^2}{l^2}(y'^2 + Cl^2),$$

$$m = B^2 - 4AC = -4C,$$

$$X = \frac{k}{m} = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = -\frac{E}{2C} = -\frac{y'^2}{Cl} = \text{abscis du centre.}$$

Si la courbe est rapportée au centre, α , β étant les coordonnées du foyer, on a

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 \cos \gamma + \alpha\beta &= \frac{4CL}{m^2} \cos \gamma \\ \alpha^2 \cos \gamma + \alpha\beta &= \frac{4L}{m^2} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{(voir tome II, page 429);}$$

mais l'origine n'étant pas au centre, mais en I, il faut remplacer α par $\alpha + X$ ou par $\alpha - \frac{y'^2}{Cl}$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \beta^2 \cos \gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} &= \frac{4CL}{m^2} \cos \gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{Cl^2} \cos \gamma, \\ \left(\alpha - \frac{y'^2}{Cl}\right)^2 \cos \gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} &= \frac{4L}{m^2} \cos \gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{Cl^2} \cos \gamma. \end{aligned}$$

La première équation donne

$$C = \frac{y'^2(y'^2 \cos \gamma + l\beta)}{l^2[\cos \gamma(\beta^2 - y'^2) + \alpha\beta]};$$

la deuxième donne

$$C = \frac{y'^2(\beta + 2\alpha \cos \gamma + l \cos \gamma)}{l\alpha(\beta + \alpha \cos \gamma)}.$$

Égalant les deux valeurs de C, on obtient

$$\alpha(\beta l + \gamma'^2 \cos \gamma)(\beta + \alpha \cos \gamma) \\ = l(\beta + 2\alpha \cos \gamma + l \cos \gamma)(\beta^2 \cos \gamma + \alpha\beta - \gamma'^2 \cos \gamma),$$

équation du troisième degré.

2. Faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$\beta = \pm \gamma' \quad \text{et} \quad \beta = -l \cos \gamma.$$

Faisant $\beta = 0$, on a

$$\alpha = -l.$$

Ainsi la courbe passe par les points O, A, B; ce qu'on pouvait prévoir. Car le système des droites OA, OB représente une conique satisfaisant à la question, et dont le centre et les deux foyers sont réunis en O; de même la droite AB représente une ellipse dont le centre est en I, et dont les deux foyers sont en A et B.

3. Faisant

$$\gamma'^2 \cos \gamma + l\beta = 0, \quad \beta + 2\alpha \cos \gamma + l \cos \gamma = 0,$$

on obtient

$$\beta = \frac{-\gamma'^2 \cos \gamma}{l}, \quad \alpha = \frac{\gamma'^2 - l^2}{l};$$

c'est le foyer de la parabole. Ce point partage la courbe en deux parties; l'une renferme les foyers des hyperboles, et l'autre les foyers des ellipses dont aucune ne peut devenir un cercle, à moins que γ ne soit un angle droit.

4. Développant l'équation, on obtient, après avoir divisé par $\cos \gamma$,

$$l\beta(\beta^2 + 2\alpha\beta \cos \gamma + \alpha^2) + \alpha\beta(l^2 - \gamma'^2) + \cos \gamma(l^2\beta^2 - \alpha^2\gamma'^2) \\ - l\gamma'^2(\beta - 2\alpha \cos \gamma) - l^2\gamma'^2 \cos \gamma = 0.$$

Les deux facteurs de $\beta^2 + 2\alpha\beta \cos \gamma + \alpha^2$ étant imaginaires, la courbe ne peut avoir qu'une asymptote paral-

lèle à l'axe des α . L'équation de cette asymptote est

$$\beta = \frac{y'^2 \cos \gamma}{l} \text{ (voir VANNON, tome II, page 391).}$$

Si l'on fait $\cos \gamma = 0$, l'équation se décompose en $\beta = 0$, et

$$l(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha(l^2 - y'^2) - ly'^2 = 0,$$

équation d'un cercle; le cercle correspondant aux foyers des hyperboles et la droite à ceux des ellipses.