

VOLPICELLI

**Sur la décomposition d'un carré
en deux autres**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 305-308

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_305_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN CARRÉ EN DEUX AUTRES;

PAR M. VOLPICELLI,

Professeur à l'Université de Rome.

En représentant par z un produit de k facteurs, tous différents entre eux, et chacun égal à la somme des deux carrés, les solutions entières de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

se divisent en k espèces différentes. Les solutions comprises dans la première espèce sont au nombre de k ; et chacune d'elles admet $k - 1$ facteurs communs avec z ; celles de la deuxième espèce sont au nombre de

$$\frac{2k(k-1)}{1.2},$$

et ont chacune $k - 2$ facteurs communs avec z ; et, de la même manière, le nombre de celles qui forment la troisième espèce est donné par

$$\frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3},$$

dont chacune admet $k - 3$ facteurs communs avec z ; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière espèce, qui se composera de 2^{k-1} solutions, aucune n'ayant de facteurs communs avec z .

Le nombre total de ces solutions, qu'on obtient en sommant les termes du polynôme

$$2^0 k + \frac{2^1 k(k-1)}{1.2} + \frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3} + \dots + 2^{k-2} k + 2^{k-1},$$

sera évidemment

$$\frac{3^k - 1}{2}.$$

Cette expression correspond à celle qu'on a en faisant

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = 2$$

dans la formule que donne M. Gauss (*), pour assigner le nombre de décompositions en deux carrés d'un entier quelconque qui admet une telle décomposition.

Quant à la forme des solutions, pour le moment nous dirons seulement que les k valeurs des inconnues x, y , qui appartiennent à la première espèce, s'expriment, en général, de la manière suivante :

$$x = (a_\gamma^2 - b_\gamma^2) \frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2}, \quad y = 2a_\gamma b_\gamma \frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2},$$

en observant que l'indice γ doit recevoir successivement toutes les valeurs comprises depuis 1 jusqu'à k , et ayant pris, par hypothèse,

$$z = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_k^2 + b_k^2).$$

Exemple. L'équation

$$x^2 + y^2 = 1105^2 = (5 \cdot 13 \cdot 17)^2,$$

dans laquelle on a

$$k = 3,$$

admet

$$\frac{3^k - 1}{2} = 13$$

solutions différentes, divisées en trois espèces. Les trois solutions de la première espèce sont :

$$x = \begin{cases} 975 = 5 \cdot 13 \cdot 15 \\ 663 = 17 \cdot 13 \cdot 3 \\ 425 = 17 \cdot 5 \cdot 5 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 520 = 5 \cdot 13 \cdot 8 \\ 884 = 17 \cdot 13 \cdot 4 \\ 1020 = 5 \cdot 17 \cdot 12 \end{cases}$$

(*) *Disquisitiones arithmeticae*. Lipsiæ, 1801. p. 219.

Les six solutions de la deuxième espèce sont :

$$x = \begin{cases} 561 = 17. 33 \\ 105 = 5. 21 \\ 169 = 13. 13 \\ 1001 = 13. 77 \\ 855 = 5. 171 \\ 1071 = 17. 63 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 952 = 17. 56 \\ 1100 = 5. 220 \\ 1092 = 13. 84 \\ 468 = 13. 36 \\ 700 = 5. 140 \\ 272 = 17. 16 \end{cases}$$

Enfin les quatre solutions de la troisième espèce sont :

$$x = \begin{cases} 47 \\ 943 \\ 817 \\ 1073 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1104 \\ 576 \\ 744 \\ 264 \end{cases}$$

Note. La formule générale des *Disquisitiones* citée ci-dessus s'énonce ainsi : Tout nombre entier donné peut se mettre sous la forme $2^\mu S a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$; μ est un nombre entier positif, qui devient égal à zéro lorsque le nombre est impair ; S est le produit de tous les diviseurs premiers de la forme $4n + 3$; et lorsqu'il n'existe pas de diviseurs de cette forme, on fait $S = 1$; $a, b, c, \text{etc.}$, sont des diviseurs premiers de la forme $4n + 1$; $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$, sont des exposants entiers ; s'il n'existe aucun diviseur de cette forme, la décomposition est impossible. Il y a encore impossibilité si S n'est pas un nombre carré. Ces cas exclus, si tous les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$, sont pairs, le nombre des solutions est

$$\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots - 1}{2};$$

si ces exposants ne sont pas tous pairs, le nombre des solutions est

$$\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots}{2}.$$

Nous accueillerons avec reconnaissance une démonstration de cette belle formule.

Dans l'endroit cité, on lit $+\frac{1}{2}$ au lieu de $-\frac{1}{2}$. On sait que les *Disquisitiones*, imprimées loin de l'auteur, fourmillent de fautes typographiques; ce qui n'a rien de surprenant. Mais il est extrêmement surprenant que l'ouvrage de génie le plus extraordinaire de notre siècle, il date de 1801, n'ait pas encore une seconde édition, soignée, de luxe, in-4°; la traduction française en est peut-être cause. Espérons que l'Allemagne fera un jour pour les œuvres de l'illustre directeur de l'observatoire de Gottingue, ce que l'Angleterre a fait pour Newton et la France pour Fermat et Laplace. Les contemporains devraient même devancer la postérité : il est des hommes pour lesquels celle-ci commence dès leur vivant.