NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Propriétés générales des surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 342-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__342_2>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES ALGÉBRIQUES

(voir p. 283).

1. Deux surfaces algébriques se coupent suivant une ligne dont la projection sur un plan est d'un degré mar-

qué par le produit des nombres qui indiquent les degrés des surfaces.

Observation. Dans des cas particuliers, plusieurs branches de la ligne d'intersection peuvent se superposer, se transposer à l'infini, etc.; circonstances qui diminuent le degré, le cas général donnant une limite.

2. Trois surfaces algébriques ont en commun un nombre de points égal au produit des trois nombres qui indiquent les degrés des trois surfaces.

Observation I. La même que la précédente.

Observation II. Bezout, le premier, a énoncé et démontré cette proposition, fondée sur la théorie de l'élimination que l'on doit à l'illustre examinateur; théorie des *polynômes multiplicateurs*, la plus philosophique que l'on ait jamais donnée sur cette matière, et qui comprend, comme cas particulier, tous les procédés que l'on a donnés depuis. (*Théorie générale des équations algébriques,* page 33; 1779.)

Observation III. Dans ce qui suit, on suppose que la surface est de degré n.

3. *Théorème segmentaire de Newton.* Par un point O dans l'espace, on mène deux transversales de *directions données*. Chaque transversale forme n segments à compter du point O; le produit des segments formés par la transversale de la première direction, divisé par le produit des segments de la seconde transversale, donne un quotient constant quel que soit le point O.

Démonstration. Si les quatre transversales sont dans un même plan, ou rentre dans la proposition II des courbes planes (page 283). Si les transversales sont dans deux plans parallèles, il suffit de rapporter la surface aux sécantes comme axes (t. III, p. 511).

4. *Théorème segmentaire de Carnot.* Soit un polygone plan ou gauche de p côtés; soient A_1, A_2, ..., A_p les

sommets consécutifs du polygone. Considérant A_1, $A_2\ldots$, A_p successivement comme des points fixes, les sécantes A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{p-1}A_p$, formeront chacune n segments, et, en tout, pn segments; relativement aux points fixes A_1, A_p, A_{p-1}, ..., A_2 et aux sécantes A_1A_p, A_pA_{p-1}, ..., A_2A_1, on aura pn autres segments dont le produit est égal au produit des pn premiers *segments*.

Démonstration. La même que pour les courbes planes (*voir* tome IV, page 526).

Observation. Newton et Carnot n'ont pas énoncé ces théorèmes *explicitement*.

5. *Surface centrale segmentaire* de M. Grassmann, professeur à Stettin. (Crelle, tome XXIV, page 262, 1842.)

Soit

$$F_n + F_{n-1} + \ldots + F_r \ldots + F_0 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface de degré n; F_r est une fonction homogène entière en x, y, z de degré r; par l'origine O, menons une transversale quelconque coupant la surface en n points, et donnée par les équations

$$x = az, \quad y = bz.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle se change en celle-ci :

$$z^n f_n + z^{n-1} f_{n-1} \ldots + z^r f_r + \ldots + f_0 = 0; \tag{2}$$

dans cette équation, f_r désigne la fonction F_r dans laquelle on a remplacé x par a, y par b, et z par l'unité. Prenons sur la transversale un point Q, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point; on a

$$X = aZ, \quad Y = bZ.$$

Soit I_r l'un quelconque des n points d'intersection I_1, I_2, ..., I_n; faisons $OI_r = t$, $OQ = q$; nous aurons évidemment

$$z = \frac{tZ}{q}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (2), elle prend cette forme :

$$(3) \qquad \frac{t^n}{q^n}\varphi_n + \frac{t^{n-1}}{q^{n-1}}\varphi_{n-1} + \ldots \frac{t^r}{q^r}\varphi_r + \ldots \varphi_0 = 0,$$

où φ_r désigne la fonction F_r dans laquelle on a remplacé x, y, z par X, Y, Z. Cette nouvelle équation a pour racines les n segments $OI_1, \ldots, OI_n$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n + 1$ constantes données, et supposons qu'on ait la relation *segmentaire*

$$(4) \alpha_n q^n + \alpha_{n-1} s_1 q^{n-1} + \alpha_{n-2} s_2 q^{n-2} + \ldots \alpha_r s_{n-r} q^r + \ldots \alpha_0 s_n = 0,$$

où s_r désigne le produit des n segments $OI_1, \ldots, OI_n$ pris r à r; or, en vertu de l'équation (3), on a

$$s_p = q^n \frac{(-1)^p \varphi_{n-p}}{q^{n-p}\varphi_n};$$

remplaçant $s_0, s_1, \ldots, s_n$ par leurs valeurs, dans l'équation (4), elle se change en celle-ci :

$$(5) \qquad \alpha_n F_n + \alpha_{n-1} F_{n-1} + \ldots \alpha_r F_r + \ldots \alpha_0 F_0 = 0;$$

c'est l'équation de la surface, lieu géométrique du point Q correspondant à la relation (4); on a mis légitimement F au lieu de φ.

Observation. Cette surface segmentaire est la plus générale de ce genre que l'on puisse avoir; car toute fonction symétrique algébrique entre des quantités se ramène à une relation entre des produits combinatoires.

6. Problème. Supposons que les coefficients $\alpha_n, a_{n-1}, \ldots$ jusqu'à α_{r+1} soient nuls; alors la relation (4) se réduit à

$$(6) \qquad \alpha_r s_{n-r} q^r + \alpha_{r-1} s_{n-r+1} q^{r-1} \ldots \alpha_0 s_n = 0;$$

on demande quelle relation il faut établir entre les coefficients α_r, $\alpha_{r-1}, \ldots$, α_0 pour que les n valeurs de t dans l'équation (3) devenant égales entre elles, les r valeurs de q dans l'équation (6) deviennent aussi égales entre elles et égales aux valeurs de t; ces conditions satisfaites, quel est le lieu du point Q?

Solution. Désignons par $n_{(p)}$ le nombre combinatoire de n objets pris p à p; les n valeurs de t devenant égales, ce que nous avons appelé ci-dessus s_p devient $n_p t^p$. Ainsi la relation (6) doit s'écrire ainsi :

$$\alpha_r n_{(r)} t^{n-r} q^r + \alpha_{r-1} n_{(r-1)} t^{n-r+1} q^{r-1} \\ + \alpha_{r-2} n_{(r-2)} t^{n-r+2} q^{r-2} + \ldots = 0,$$

car $n_{(n-k)} = n_{(k)}$. Dans cette équation, la somme des r valeurs de q prises p à p est égale à

$$\frac{(-1)^p \alpha_{r-p} n_{r-p} t^{n-r+p}}{\alpha_r n_r t^{n-r}};$$

la somme des valeurs de t prises p à p est $r_p t^p$; donc, d'après la seconde condition,

$$\alpha_{r-p} n_{r-p} (-1)^p = \alpha_r n_r r_p;$$

La relation (6) peut donc s'écrire ainsi :

$$\sum_0 \frac{r_{(p)}}{n_{(r-p)}} s_{n-r+p} (-1)^p q^{r-p} = 0,$$

car le facteur $\alpha_r n_{(r)}$, étant constant, disparaît. Or

$$s_{n-r+p} = q \cdot \frac{(-1)\varphi_{r-p}}{q^{r-p} \varphi_{(n)}};$$

donc la dernière équation peut s'écrire, en ôtant le facteur commun φ_n,

$$\sum_0^r \frac{r_p}{n_{r-p}} \varphi_{r-p} = 0.$$

Or

$$r_p = \frac{[r]}{[r][r-p]}, \quad n_{r-p} = \frac{[n]}{[r-p][n-r+p]},$$

les crochets indiquent des produits continuels; donc, après avoir ôté les facteurs constants $[n]$ et $[r]$, l'équation se réduit à

$$\sum_0' \frac{[n-r+p]}{[p]} \varphi_{r-p} = 0.$$

Mais

$$[n-r](n+r+p)_p = \frac{[n-r+p]}{[p]};$$

donc, finalement,

$$\sum_0' (n+r+p)_p \varphi_{r-p} = 0,$$

où $(n+r-p)_p$ est le nombre combinatoire de $n+r-p$ éléments pris p à p. Ainsi l'équation du lieu cherché est, après avoir changé φ en F,

$$F_r + (n-r+1)F_{r-1} + \frac{(n-r+2)(n-r+1)}{1.2}F_{r-2} + \frac{(n-r+3)(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3}F_{r-3} + \ldots = 0.$$

C'est cette surface que M. Grassmann désigne sous le nom de *surface centrale* d'ordre r, relativement à la surface donnée par l'équation (1) et à l'origine O, nommé *pôle*; c'est une polaire *successive* d'ordre $n-r$ de Bobillier (Gergonne, tome XIX, page 302; 1829).

Corollaire. La surface d'ordre 1 est un plan; c'est le plan des *centres harmoniques*. La surface d'ordre 2 est du second degré.

Observation. La condition analytique de ce problème correspond à cette condition géométrique : lorsque tous les points $I_1, I_2, \ldots, I_n$ se réunissent, les points Q se réunissent aux mêmes points; comme cela a lieu pour les divisions harmoniques. (*Suite.*)